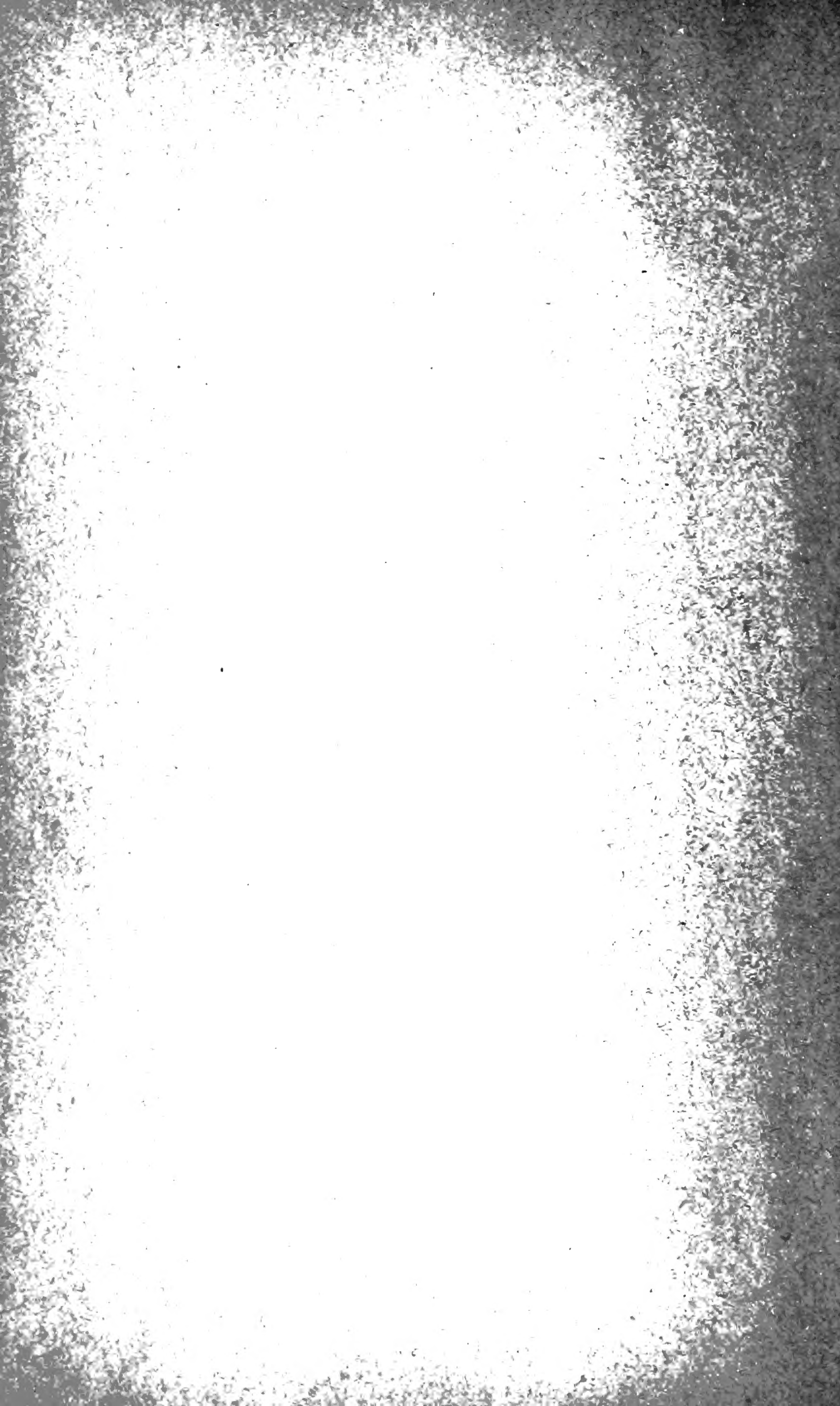
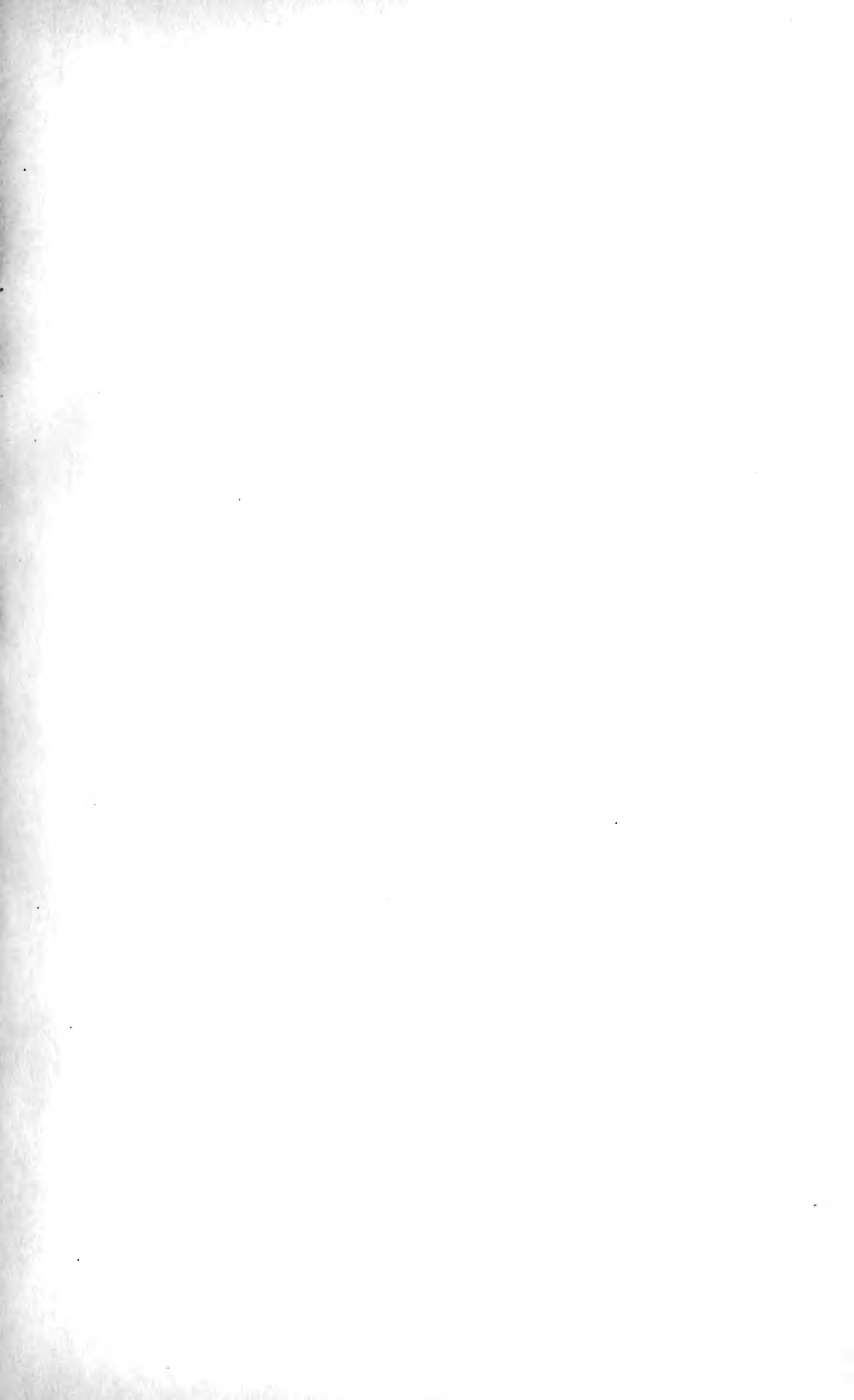








Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1919

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

24-94732 May 8

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1919.

Sitzung am 11. Januar.

1. Herr v. Drygalski spricht über die

Antarktis und ihre Vereisung.

Die Antarktis ist ein Land von kontinentaler Größe, das den Südpol umgibt und in dieser Klimalage ein großes Inlandeis bildet. Die orographischen Verhältnisse begünstigen die Bildung, die Winde beschränken sie regional, doch nicht derart, daß die Ablation den Schneefall überwiegt. Der Ernährungsüberschuß wird durch die Bewegung des Eises ins Meer geführt, doch ist diese der tiefen Temperatur wegen sehr langsam, vielfach gleich Null. Die Antarktis hatte früher eine noch größere Vereisung wie heute, also eine Eiszeit wie die anderen Erdräume, und wohl auch zu gleicher Zeit wie diese. Die antarktische Eiszeit ist aber durch reichlichere Niederschläge zu erklären, nicht durch eine Temperatursenkung, was für andere Länder angenommen wurde, doch auch bezweifelt werden darf. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Ludwig Burmester hält einen Vortrag über die

Konstruktionen der Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung des ruckweise bewegten Malteserkreuzes und des Filmes im Kinematographen.

Durch diese Diagramme werden die gewöhnlich $^1/_{60}$ Sekunde dauernden Bewegungsvorgänge veranschaulicht. Es ergibt sich,

daß verhältnismäßig die Geschwindigkeit schnell und die Beschleunigung sehr schnell zu- und abnimmt. Deshalb muß das Malteserkreuz sowie das antreibende eingreifende Einzahnrad aus dem besten Stahl hergestellt werden, um die Abnutzung zu vermindern. Der H. Lehmannsche Aufnahmeapparat, der „Zeitlupe“, auch „Zeitmikroskop“ genannt wird, ermöglicht bis 500 Aufnahmen in der Sekunde. Dadurch wird der Kinematographie ein ergiebiges Gebiet der Erforschung schneller Bewegungen eröffnet, die bei der Vorführung des Filmes verlangsamt in den einzelnen Phasen erkennbar werden. Und somit empfängt unser Gesichtssinn eine neue Erweiterung, durch die wir zu mannigfaltiger, lehrreicher Kenntnis schneller Bewegungen gelangen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Sommerfeld legt vor für die Sitzungsberichte:

1. Eine Arbeit von M. v. Laue:

Über die Möglichkeit neuer Versuche an Glühelektroden.

Die Entwickelung der Verstärkerröhren im Kriege hat eine Reihe von theoretischen und praktischen Fragen aufgeworfen. Verfasser zeigt, wie sie durch systematische Versuche beantwortet werden können.

2. Eine Arbeit von Paul S. Epstein:

Über die Interferenzfähigkeit von Spektrallinien vom Standpunkt der Quantentheorie.

Aus der Übereinstimmung zwischen Wellentheorie und Quantentheorie für große Quantenzahlen wird die Zeitdauer der Lichtemission einer Spektrallinie ermittelt und an den gemessenen Linienbreiten der Röntgenspektren geprüft.

4. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von A. Rosenthal:

Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.

Es wird eine weitreichende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes von der Zweiteilung der Ebene gegeben. Die geschlossene Jordansche Kurve besteht aus zwei einfachen Kurvenbögen mit gemeinsamen Endpunkten und diese einfachen Kurvenbögen sind bekanntlich beschränkte, zwischen ihren Endpunkten irreduzible Kontinua, die noch eine Nebenbedingung erfüllen. Hat man nun allgemein die Vereinigung 𝔈 von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen, die nur die Punkte a und b gemeinsam haben, so kann 𝔈 die Ebene zwar in beliebig viele Gebiete zerlegen; aber unter diesen sind stets genau zwei ausgezeichnet, die nämlich von dem ganzen Gebilde 𝔈 begrenzt werden. Der Beweis wird mit Hilfe einiger allgemeiner Sätze über Teilung von Gebieten erbracht. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 8. Februar.

1. Herr Liebmann trägt vor über

Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises,

d. h. den Satz, daß der Kreis unter allen Kurven von gleichem Umfang den größten Inhalt besitzt. Dieser wird im Anschluß an eine Arbeit von Frobenius, jedoch völlig elementar und rein geometrisch bewiesen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr R. Willstätter trägt vor eine von ihm gemeinsam mit Herrn M. Bommer ausgeführte Arbeit

Über die Oxydation von Olefinen.

Die Untersuchung behandelt das Verhalten von Olefinen gegen Sauerstoff bei Gegenwart von Katalysatoren und in Abwesenheit derselben. (Wird anderweitig gedruckt.)

3. Herr v. Groth legte den zweiten und dritten Teil vor von J. Königsbergers (Freiburg i. B.)

Studien über alpine Minerallagerstätten.

Diese enthalten eine Übersicht über die Mineralassoziationen in den verschiedenen Gesteinen der Zentralalpen und daraus sich ergebende Schlüsse auf die Bildung der betreffenden Mineralien, ferner das Hauptverzeichnis dieser Mineralassoziationen innerhalb einer jeden Gesteinsart nach den Fundorten geordnet mit krystallographischer Beschreibung der in den einzelnen Fundorten vorkommenden Mineralien, endlich eine vollständige Literaturzusammenstellung und eine Anleitung zur Bestimmung der in den Sammlungen meist nicht genau bestimmten Fundorte. (Erscheint in den Abhandlungen.)

4. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Mitteilung von F. v. Dalwigk:

Formeln für die Geländeaufnahme aus der Luft.

Die aufgestellten Formeln gestatten eine unmittelbare Umrechnung der Koordinaten der Bildpunkte in solche der Kartenpunkte, wenn 3 Bildpunkten die entsprechenden Kartenpunkte zugewiesen sind. Ihre Verwendung setzt die Kenntnis der genauen Lage des Standpunktes in der Luft nicht voraus.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 1. März.

1. Herr R. v. Hertwig sprach über den

Bau der zu den Radiolarien gehörigen Acanthometren.

In früheren Untersuchungen hatte er einkernige Zustände bei Acanthometren beschrieben und die Umwandlung derselben in Vielkernigkeit, wie sie der Schwärmerbildung vorausgeht, verfolgt. Diese Angaben waren in Zweifel gezogen und auf parasitische Vorkommnisse bezogen worden. Der Vortragende hat nun Gelegenheit gehabt, an einem reichen Material von Acanthometren, welches er während eines Aufenthalts in Tenrifa gesammelt hatte, das Vorkommen einzelliger Formen und die Umwandlung derselben in vielkernige Zustände aufs neue nachzuweisen. Dabei hat sich herausgestellt, daß die Gattung Xiphacantha fast ausschließlich im einkernigen Zustand angetroffen wird.

2. Herr v. Dyck trägt vor über

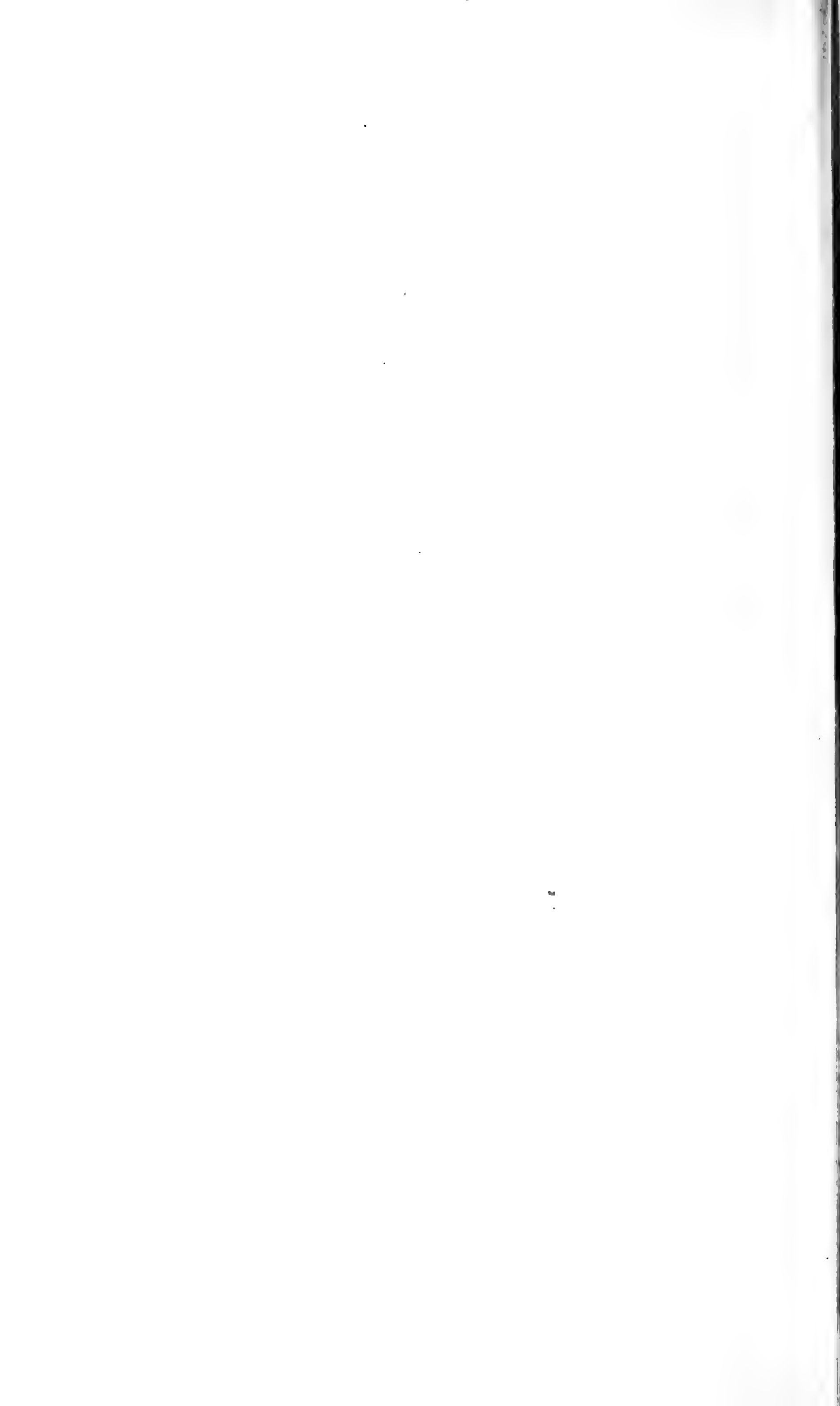
graphische Methoden in der Algebra.

3. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von M. Lagally:

Uber orthogonale Kurvensysteme in der Ebene.

Durch Einführung tetrazyklischer Koordinaten wird die Aufstellung sämtlicher orthogonaler ebener Kurvensysteme auf die Integration einer Laplaceschen Differentialgleichung mit einer quadratischen Nebenbedingung zwischen den Integralen derselben zurückgeführt. Daraus ergibt sich eine Einteilung der ebenen Orthogonalsysteme nach den Rangzahlen jener Differentialgleichung in Klassen, denen ausgezeichnete gemeinsame geometrische Eigenschaften zukommen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)



Sitzung am 17. Mai.

1. Im Auftrag des Herrn Lindemann wird für die Sitzungsberichte vorgelegt dessen Abhandlung

Binäre kubische Formen und Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene.

2. Herr E. Stromer trägt vor

Der Rhein, Deutschlands Strom, aber nicht Deutschlands Grenze.

Es wird in kurzer Übersicht klargelegt, daß sich die geologische Geschichte des Gebietes am mittleren Rhein in allem Wesentlichen in gleicher Weise abspielte, so daß die Grundbedingungen menschlicher Kultur und Geschichte beiderseits die gleichen sind, dementsprechend erweist die Urgeschichte des Menschen ebenso wie die geschichtliche Entwicklung, daß der Rhein nur ausnahmsweise, nur für kurze Zeiten und fast stets nur streckenweise eine Grenze bildete und daß sein Tal seit dem Bestehen des Deutschen Reiches ein deutsches Kulturzentrum war und ist. E. M. Arndt hat dies schon vor 100 Jahren klar erkannt und ausgesprochen.

3. Herr P. Groth legte eine Abhandlung von H. Laubmann über Mathias Flurl, den Begründer der Geologie Bayerns, sein vaterländisches Mineralienkabinet und sein Reisetagebuch aus dem Jahre 1787 vor, und berichtet darüber folgendes:

Bald nach der ältesten geologischen Kartierung, derjenigen Sachsens, erschien die erste geologische Karte Bayerns in dem Werke von Flurl, Beschreibung der Gebirge von Baiern und der oberen Pfalz, München 1792, deren Verfasser sich darin nicht nur als sachkundiger Mineraloge und Geologe, sondern auch als hervorragender und begeisterter Volkswirt erwies, dem Bayern zahlreiche Verbesserungen in der Ausbeutung seiner Mineralschätze und noch weit mehr, leider nicht befolgter Rat-

schläge zu solchen verdankt. Der Verfasser der vorgelegten Abhandlung hat nun die in der hiesigen Oberbergdirektion noch vorhandene „Flurlsche Sammlung", welche im Wesentlichen das jenem Werke zugrunde liegende Material enthält, einer Durcharbeitung unterzogen und entdeckte dabei ein dort aufbewahrtes handschriftliches Werk: „M. Flurls, kurfürstl. wirkl. Bergraths usw. Tagebuch oder Bemerkungen, welche er auf einer Reise durch die obere Pfalz und einen Theil von Franken, Sachsen und Böhmen gemacht hat, verfaßt im Jahre 1787." Dieses als Ergänzung des oben genannten Buches und überhaupt für die Tätigkeit des um Bayern hochverdienten Gelehrten wichtige Werk dürfte in der jetzigen Zeit, in der es sich darum handelt, die Bodenschätze des Landes intensiver auszunützen, als es bisher geschah, von besonderem Interesse sein, daher es im Zusammenhang mit einem Überblick über das Leben und die wissenschaftliche Tätigkeit Flurls, sowie einer kurzen Beschreibung der wichtigsten Stücke seiner Sammlung nunmehr der Öffentlichkeit übergeben werden soll.

(Die Abhandlung erscheint als besondere Veröffentlichung der Akademie.)

4. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Dr. F. Staeble:

Isoplanatische Korrektion und Proportionalitäts-Bedingung.

Der günstige Korrektionszustand eines zentrierten optischen Systems ist durch Hebung der sphärischen Aberration und Erfüllung der Abbéschen Sinusbedingung noch nicht erreicht, sobald endliche Öffnung bei kleinem Gesichtsfeld in Frage kommen. Er erfordert die Erfüllung einer neuen Bedingung (Isoplanarie), die in diesem Falle praktisch wichtiger ist als die erstgenannten. Diese läßt eine einfache geometrische Bedeutung zu und kann für die Durchrechnung der Systeme in verschiedenen Formen verwendet werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr v. Seeliger legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung von Herrn Kuno Hoffmeister vor:

Über die Bahn der von Donner begleiteten Feuerkugel vom 8. April 1916.

6. Herr M. Schmidt bringt eine kürzlich erschienene Veröffentlichung der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung in Vorlage über die in den letzten 10 Jahren unter seiner Leitung ausgeführten „Ergänzungsmessungen zum Bayerischen Präzisionsnivellement", über deren wissenschaftliche Ergebnisse von ihm bereits in einem am 6. Juli 1918 gehaltenen und in den Sitzungsberichten gedruckten Vortrag eingehend berichtet worden ist.

Die vorliegende Abhandlung enthält nach einigen allgemeinen Mitteilungen über die neuerdings bei den Feinnivellements der bayer. Erdmessungskommission verwendeten Instrumente und Meßmethoden die im oberbayerischen Alpenvorland durch die neuesten Messungen festgestellten Höhenänderungen, ferner ausführliche Angaben über die Anlage und Ausgleichung des oberbayerischen Höhennetzes, sowie eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Messungs- und Berechnungsergebnisse, die sich auf die Höhenbestimmung von 460 auf 15 Linien mit 607 km Gesamtlänge verteilten Nivellementsfestpunkten beziehen.

Der mittlere Höhenfehler für 1 km Streckenlänge und 10 m Höhenunterschied ist aus der Netzausgleichung zu $\pm$ 1,35 mm berechnet worden. Als besonders bemerkenswert dürfte hervorzuheben sein, daß eine Vergleichung der im Höhenverzeichnis besonders auf S. 61 u. f. angegebenen neu bestimmten Höhen mit den vor 3 bis 4 Jahrzehnten gefundenen ursprünglichen Werten eine mit der Zeit fortschreitende Bodensenkung erkennen läßt, welche für eine Reihe von Punkten bis zu 2 mm im Jahre beträgt.

Sitzung am 21. Juni.

1. Einer Anregung des Herrn M. SCHMIDT nachkommend, sprach Herr E. KAYSER über die geologische Bedeutung der neueren Feinmessungen (Präzisions-Nivellements) im oberbayerischen Alpenvorlande.

Diese überaus sorgfältigen Arbeiten haben ergeben: 1. daß die am Nordrand der bayerischen Alpen gelegenen Dreieckspunkte im S von München (Wendelstein u. a.) sich im Laufe der letzten 100 Jahre um rund $^1/_4$ m nach N bzw. NW verschoben haben, also München um so viel näher gekommen sind, und 2. daß während die Höhenlage von München selbst anscheinend keine Änderung erfahren hat, das östlich davon liegende Stück der bayerischen Hochebene, in einer auf 100 km bis an die österreichische Grenze verfolgten Länge und einer 50 km betragenden, vom Alpenrande nach N bis zum Inn reichenden Breite, sich im Zustande dauernder Senkung befindet.

Der Vortragende berührte zunächst die in neuerer Zeit in Nord- und Mitteldeutschland gemachten Wahrnehmungen über Höhenänderungen gewisser Punkte, um dann zu ähnlichen Feststellungen im Bodenseegebiete überzugehen, für welches badische und schweizerische Feinmessungen ansehnliche neuere, zum Teil im Gefolge von Erdbeben eingetretene, bleibende Bodensenkungen nachgewiesen haben. So bei Bregenz allein in den Jahren 1896—1906 solche von 102, und bei Konstanz von 1817—1890 solche von 317 mm. Ja, die dort seit Ende der Eiszeit erfolgten Senkungen sollen volle 15 m erreichen!

Weit schärfere und umfangreichere Messungen verdanken wir den neuen bayerischen Arbeiten. Sie haben es möglich gemacht, die Senkungserscheinungen in dem oben bezeichneten Teile des Alpenvorlandes (in einer hier wohl zum ersten Male angewandten, den bekannten skandinavischen Isoanabasenkarten de Geers entsprechenden Weise) durch Isokatabasen (Linien gleicher Senkung) auf einer Karte übersichtlich darzustellen. Es ergibt sich daraus, daß das im O von München

liegende Stück der oberbayerischen Hochebene stetig einsinkt und zwar um so stärker, je weiter nach Norden, gegen den Inn zu, und ebenso je weiter nach Osten, gegen das Salzburgsche zu. Hier hat der Betrag der Senkung zwischen Mühldorf und Marktl allein in den Jahren 1887 bis 1906, also in einem Zeitraum von nur 19 Jahren, 66,4 mm betragen. Die Fortdauer der Senkung in gleichem Maße vorausgesetzt, würde die Senkung für 100 Jahre 0,3, für 1000 Jahre 3 m ergeben. Es würde also gegebenenfalls schon die (geologisch gesprochen) ganz geringe Zeitspanne von wenigen Jahrtausenden genügen, um zwischen München und der österreichischen Grenze ein breites, dem des Bodensees vergleichbares Einbruchsbecken entstehen zu lassen. Wie diese Erscheinungen sich jenseits der österreichischen Grenze gestalten, darüber ist bisher leider nichts bekannt.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß beide Senkungsfelder, das des Bodensees wie auch das in Bildung begriffene oberbayerische, inmitten der schweizerisch-süddeutschen Molassen- oder Miozänmulde liegen, einer großen Geosynklinale, einem Gebiete, das sich bereits seit der älteren Tertiärzeit in starker Senkung befindet. Die gewaltige, über 2000 m betragende Mächtigkeit der bekannten Rigi-Nagelfluh — einer großen olizogän-miozänen Deltabildung — ist dafür Beweis genug, soweit die Tertiärzeit in Frage kommt, während die vielbesprochenen verbogenen (zum Teil alpenwärts fallenden) Terrassen an den Abhängen des Zürichsees uns die Fortdauer der Senkung während der Diluvialperiode vor Augen führen.

Erinnert man sich dieser und anderer Tatsachen, so erscheinen demgegenüber die jetzt nachgewiesenen Senkungen im O von München als ein verhältnismäßig schwacher Nachklang jener älteren Bodenbewegung. Daß übrigens der ganze Untergrund der Geosynklinale von Stetigkeit noch weit entfernt ist, zeigt schon die Häufigkeit der Erdbeben im nördlichen Alpenvorlande. C. Regelmann hat schon 1907 die Senkungen am Bodensee auf einen von den Alpen her wirkenden Tangentialdruck zurückführen wollen. Das Alpen-

gebirge wäre nach ihm in einem langsamen Vordringen nach N begriffen und preßt dadurch die große ihm vorliegende, bis zum Schwarzwald-Vogesenkern reichende, wie zwischen den Backen eines Schraubstockes gelegene Miozänmulde zusammen. Dieselbe Annahme möchte der Vortragende auch auf die Fortsetzung der großen Mulde nach O, nach Oberbayern, übertragen. Auch sie wird durch das Vorwärtsdrängen der Alpen in ähnlicher Weise gegen die alte böhmische Masse gepreßt. Die durch die Münchener Messungen erwiesene Verkürzung des Abstandes der Alpen von München, ebenso wie das Einsinken der Oberfläche der Mulde im Bereiche der „Inn-Salzach-Platte“ M. Schmidts, erklären sich daraus in einfacher Weise, und dasselbe gilt für die schon lange bekannten auffälligen Überkippungen der (alpenwärts einfallenden) Braunkohlenflötze am Rande der bayerischen Alpen bei Miesbach und Penzberg.

2. Derselbe legte vor eine Abhandlung von Dr. Kurt Leuchs (München)

Über marines Oberkarbon im zentralen Tianschan.

Während man solches im Süden des Gebirges schon seit längerer Zeit kennt, war es bisher im Inneren noch nirgends nachgewiesen. Die in der Arbeit beschriebenen, von den Merzbacherschen Expeditionen aufgesammelten Fossilien beweisen indes, daß auch im Innern des Tianschan marines Oberkarbon vorhanden ist. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Derselbe legte weiter vor eine der kriegsgeologischen Tätigkeit entstammende Abhandlung von Dr. Karl Boden (München) über

Limnisches Pliocän im Gebiete der Vesouze in franz. Lothringen.

Die fraglichen Schichten (Tone und Sande) werden von schwach gefaltetem Muschelkalk unterlagert, dessen Verwerfungen sich in bemerkenswerter Weise auch ins Pliocän hinein fortsetzen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr F. Lindemann spricht

Über die Weingartnerschen Flächen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr Ernst Stromer legt eine Arbeit vor des Münchner Geologen Dr. A. Lebling über

Forschungen in der Baharîje-Oase und anderen Gegenden Ägyptens

und empfiehlt sie zur Aufnahme in die Abhandlungen als Fortsetzung der „Ergebnisse der Forschungsreisen Prof. E. Stromers in den Wüsten Ägyptens.“ Dr. Lebling hat mit Unterstützung der Akademie im Frühjahr 1914 eine mehrmonatliche Reise in das ägyptische Niltal, seine nähere Umgebung und in die Baharîje-Oase ausgeführt und hat über die Schichten der Kreide und Tertiärformation speziell des letzteren Gebietes bemerkenswerte Feststellungen gemacht, vor allem, daß die sandigen und tonigen Schichten der mittleren Kreide seitlich in Dolomite übergehen und daß kretazische ebenso wie alttertiäre Schichten örtlich durch Kontaktmetamorphose eisenschüssig geworden sind. Erheblich sind auch seine Beobachtungen und Schlüsse über die Wüstenbildungen, besonders über die eigenartigen in der herrschenden Windrichtung sich hinziehenden Sanddünenketten und über die Kieswüste. Schließlich sind seine Feststellungen von Bedeutung, daß in und bei der genannten Oase und bei Kairo keine gewöhnlichen tektonischen Falten, sondern merkwürdige dünne und geschlossene Mulden vorhanden sind.

6. Herr H. Liebmann legt für die Sitzungsberichte vor eine Arbeit:

Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung.

Es wird gezeigt, wie einige bekannte und einige neue Sätze über die Verbiegung begrenzter Flächenstücke durch rein kinematische Methoden bewiesen werden können. Ferner wird eine Methode der Verbiegung für Kugelflächen mit beliebig kleiner Öffnung angegeben.

Sitzung am 12. Juli.

1. Herr Rückert legt vor eine Abhandlung des Herrn Ludwig Neumeyer:

Vergleichend-anatomische Untersuchungen über den Darmkanal fossiler Fische.

In der Arbeit wird bei Vertretern verschiedener Ordnungen und Unterordnungen fossiler Fische der im Innern des Tieres erhalten gebliebene Darmkanal, insbesondere der Spiraldarm beschrieben. (Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Herr Lindemann spricht

Uber die Differentialgleichung $y' = Ay^p + By^q$.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 15. November.

1. Herr A. Voss legt eine Note vor

Zur Theorie der Kanal- und Röhrenflächen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Arbeit von Herrn Dr. Max Lagally:

Über gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2. Ordnung.

Flächen, welche von den Ebenen eines Büschels nach affinen Kurven mit gemeinsamer Affinitätsachse geschnitten werden, lassen Verbiegungen zu, wobei ihr geometrischer Charakter erhalten bleibt. Aus den Schnittkurven eines beliebigen Zylinders mit einem Ebenenbüschel, dessen Achse zu seinen Mantellinien senkrecht steht, lassen sich unendlich viele, von einer willkürlichen Funktion abhängende Paare von aufeinander abwickelbaren Flächen der soeben gekennzeichneten Art ableiten. Als Beispiel wird eine stetige Folge von Biegungsflächen eines dreiachsigen Ellipsoides behandelt.

3. Herr A. Sommerfeld überreicht der Klasse sein Buch Die Atomtheorie und die Spektrallinien und macht Mitteilungen über seine im vorigen Herbst in Schweden gemachten Erfahrungen.

4. Herr Kayser bespricht die Untersuchungen von Prof. Schlosser über die Tertiärfauna Mazedoniens.

5. Herr S. Günther legte für die Sitzungsberichte eine größere Abhandlung vor:

Die indirekten Ortsbestimmungsmethoden in der Entwicklung der mathematischen Geographie.

Eingehend werden besprochen das Triquetrum, das geometrische Quadrat und vor allem der „Radius“ (Jakobsstab). Die Geschichte des letzteren wird zurückverfolgt bis Archimedes und Hipparch. Die Streitfrage, welche Rolle er im

Entdeckungszeitalter gespielt habe, gibt Veranlassung zu neuer Behandlung des Behaim-Problemes.

6. Herr A. Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor:

Hans Hamburger (Berlin):

Uber eine Erweiterung des Stieltjeschen Momentenproblems. (Vorläufige Mitteilung.)

Bei dem sogenannten Momentenproblem handelt es sich darum, zu einer vorgeschriebenen Folge positiver Zahlen c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine für $u = 0$ verschwindende, für $0 \leqq u \leqq +\infty$ niemals abnehmende Funktion $\varphi(u)$ von der Beschaffenheit herzustellen, daß:

$$\int_0^\infty u^n \, d\varphi(u) = c_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Stieltjes hat dieses Problem durch Heranziehung des mit der Potenzreihe $\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \cdots$ korrespondierenden Kettenbruches gelöst, unter der Voraussetzung, daß zwei aus den c_n gebildete Folgen von Determinanten durchweg positiv ausfallen. Der Verfasser behandelt den merklich verwickelteren Fall, welcher sich ergibt, wenn man die obige Voraussetzung in Bezug auf die eine der beiden Determinanten-Folgen fallen läßt.

Otto Szász (Frankfurt a. M.):

Über unendliche Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Der Verfasser gibt eine wesentlich vereinfachte und vervollkommnete Formulierung eines (auch von M. v. Pidoll, A. Pringsheim) behandelten Perronschen Satzes über „nahezu“ eingliedrig periodische Kettenbrüche. Die von ihm aufgefundene Konvergenzbedingung besitzt gegenüber den verschiedenen bisherigen Fassungen neben größerer Einfachheit und vermehrter Tragweite insbesondere den Vorzug, auch dann unveränderte Geltung zu behalten, wenn die Teilzähler des Kettenbruches in einer gewissen Umgebung der Null liegen.

Sitzung am 6. Dezember.

1. Herr L. Burmester sprach

Über eine einfache angenäherte Geradstreckung der Kreisbögen; konstruktive Bestimmung ihrer Längen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. Pringsheim trug vor

Über singuläre Punkte gleichmäßiger Konvergenz.

Eine Funktionenfolge $F_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der komplexen Veränderlichen x heißt „im Punkte“ x' gleichmäßig konvergent, wenn, unter der Voraussetzung $\lim\limits_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x)$, die Bedingung

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

bei jedem $\varepsilon > 0$, außer für x' selbst, für alle Stellen einer gewissen Umgebung $|x - x'| < \varrho_\varepsilon$ durch Wahl von $\nu \geqq n_\varepsilon$ befriedigt werden kann. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß ϱ_ε gleichzeitig mit ε unbegrenzt abnimmt, während bei der verwandten Weierstraßschen Definition der gleichmäßigen Konvergenz „in der Nähe des Punktes“ x' an die Stelle von ϱ_ε ein beliebig kleines aber festes ϱ tritt. Es gilt dann, wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe, der Satz, daß die bloße Voraussetzung dieser „punktweise“ gleichmäßigen Konvergenz für jeden einzelnen Punkt eines abgeschlossenen Bereiches (B) allemal die gleichmäßige Konvergenz „im Bereiche“ (B) in dem üblichen Sinne nach sich zieht — als Verschärfung des von Weierstraß unter Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz „in der Nähe“ der einzelnen Punkte bewiesenen entsprechenden Satzes. Daraus folgt, daß, wenn es überhaupt Punkte x' gibt, in denen wirklich *nur* punktweise gleichmäßige Konvergenz stattfindet und die ich als singuläre Punkte gleichmäßiger Konvergenz bezeichne, in beliebiger Nähe derartiger Punkte stets auch Punkte ungleichmäßiger Konvergenz und eventuell ausschließlich solche liegen

müssen. Der Verfasser konstruiert arithmetische Ausdrücke verhältnismäßig einfacher Natur, die geeignet sind, die in dem vorliegenden Zusammenhange sich ergebenden Möglichkeiten zu illustrieren, und zeigt schließlich, daß Folgen analytischer Funktionen im Innern ihres Konvergenzbereiches keine singulären Punkte gleichmäßiger Konvergenz aufweisen können.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Wieland trägt vor: 1. über die Nitrierung des Aethylens und 2. über Beiträge zur Chemie des vierwertigen Stickstoffs. Die beiden Arbeiten werden an anderer Stelle veröffentlicht.

4. Herr F. Lindemann trug vor:

Zur Theorie der Planetenbahnen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Verzeichnis der im Jahre 1919 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 40, 1918.

Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:
— — Taschenbuch für 1919.

Agram. K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. 20, Heft 1. 2.
— Kroat. archäologische Gesellschaft:
— — Vjesnik, Bd. 14, 1915—19.

Altenburg. Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes:
— — Mitteilungen N. F. Bd. 16.
— Geschichts- und altertumsforschender Verein des Osterlandes:
— — Mitteilungen, Bd. 13, Heft 1.

Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verslagen en mededeelingen, 5. Reeks, deel 2.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 36, No. 2—6, deel 37, No. 1.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 12, stuk 3. 4.
— — Wiskundige opgaven, deel 12, stuk 5. 6 und Register zu 1875—1900.
— Zoologisch Genootschap:
— — Festschrift für Kerbert. 1919.

Aschaffenburg. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1918/19.

Athen. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, tom 30, Heft 1—4.
— Universität:
— — *Ἐπιστημονικὴ ἐπετερὶς* Bd. 1913, 1913/14—1916/17.

Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 44. Jahrg., 1918/19.
— Naturwissenschaftl. Verein:
— — Bericht 42.

Baltimore. Johns Hopkins University:
— — Circulars 1912 No. 8; 1913 No. 10.

Bamberg. Lehrerbildungsanstalt:
— — 45. Jahresbericht, 1918/19.
— Lyzeum:
— — Jahresbericht 1918/19.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 75, 1917.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Memorias, vol. 15, No. 6—10.

Basel. Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 29. 1918.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1919 in 4⁰ und 8⁰.
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1917/18.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 56, afl. 3/4.
— — Notulen van de vergaderingen, deel 52, afl. 1—3.
— — Verhandelingen, deel 61, afl. 1.
— — Oudheidkundig verslag 1914, 2. 3.
— — Rapporten van den Oudheidkundigen Dienst in Nederlandsch Indie 1913.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Observations, vol. 36, 1913.
— — Seismological Bulletin 1916, VII, IX, X; 1919 III—VI.
— — Verhandelingen 4.
— Kon. Natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Heyne, Nuttige Planten von Nederl. Indie Bd. II—IV.

Bayreuth. Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 27, Heft 2.

Berkeley. University of California:
— — Publications, Geography vol. 1, No. 1—6; Geology vol 7, No. 21—25, vol. 8 No. 1—5.

Berlin. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen, Philos.-histor. Klasse 1918, 14—18; 1919, 1—12.
— — Sitzungsberichte 1918, 39—52; 1919, 1—53.
— — Haberlandt: Rede auf Schwendener. 1919.
— — Corpus Inscriptionum Latinarum. 2. editio, vol. I, 2, fasc. 1.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 28, Nr. 1. 2.
— Allg. Elektrizitätsgesellschaft:
— — Geschäftsbericht 1918/19.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 50. Jahrg., Nr. 18; 51. Jahrg., Nr. 18; 52. Jahrg. Nr. 1—11.
— — Chemisches Zentralblatt 1920, Nr. 2, I. II.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Zeitschrift 1918 (70) Nr. 1—12; 1919 (71) Nr. 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 70, Nr. 1—4; 71, 1, 2.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 73. Jahrg., 1917, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 21, Nr. 1—22.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 45, Nr. 1.
— Deutsches Archäologisches Institut:
— — Jahrbuch, Bd. 33 Heft 3/4.
— Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, No. 298—303.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Jahrbuch, 1916 I 3 und II 1 u. 2 und 1917 I 1 u. 2.
— Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1921.
— — Veröffentlichungen No. 43.
— — Kleine Planeten, Jahrg. 1920.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen, Bd. 2, Heft 4; Bd. 3 Heft 1.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, S.S. 1914; W.S. 1914/15.
— — Programm 1914/15; 1915/16.
— — Festrede 1915.
— Universität:
— — Geschichte der Universität Berlin, 2. Bd., 2. Hälfte von M. Lenz.
— Verein für das Deutschtum im Ausland:
— — Wegweiser 1917—18.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1919, Nr. 1—24.

Berlin. Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 31, 2; Bd. 32, 1.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1919, Nr. 1—12.
— — Berliner Kalender 1917 und 1918.
— — Schriften, Heft 47, 1913.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift 1918, Nr. 12; 1919, Nr. 1—12.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. III, Heft 6—10.

Bern. Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Jahrbuch, Bd. 44.
— Universitätskanzlei:
— — Schriften der Universität, 1917/18 und 1918/19.

Beuron. Erzabtei.
— — Texte und Arbeiten I, 3. 4.
— — Benediktinische Monatsschrift 1919, 1—12; 1920, 1. 2.

Bonn. Naturhistorischer Verein der preuß. Rheinlande:
— — Verhandlungen, 71. bis 74. Jahrg., je 1. 2. Hälfte.
— — Sitzungsberichte 1914. 1916.

Boston. Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 86.

Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch 1918 (= 29. Jahrg.).
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 24, 1.

Breslau. Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, W.-S. 1918/19.
— — Programm 1919/20.

Bromberg. Stadtbibliothek:
— — Jahresbericht 1918.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 10 Nr. 5—12; Jahrg. 11 Nr. 1—3.

Brünn. Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 22. Jahrg. Heft 3, 4; 23. Jahrg. Heft 1—4.

Brüssel. Société des Bollandistes:
— — Analecta Bollandiana, tom. 33 fasc. 4.

Budapest. Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 29, Heft 5. 6.
— Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 42, No. 1. 2.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Gedenkschrift zum 100 jähr. Bestehen, 1917.
— — Mededeelingen van hat Laboratorium voor Plantenziekten, No. 19—37.
— — Mededeelingen van het Proefstation voor Rijs c. a. No. II. III.
— — Mededeelingen van het Lab. voor Agrogeologie en Grondonderzoek No. 3. 4.
— — Mededeelingen van het agricultur-chemisch Laboratorium, No. 13-29.
— — Mededeelingen voor thee, No. 41—60. 61 a. 62—64. 66.
— — Mededeelingen uit den cultuurtuin, No. 6—12.
— — Mededeelingen van het Algemeen Proefstation voor den Landbouw, No. 1. 2.
— — De nuttige planten van Nederl. Indie, deel III. IV.
— — Jaarboek 1915—1917.
— — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 19, 21—28; III. sér., vol. I, fasc. 1—4.
— — Treubia, Recueil de travaux zool., hydrobiol., et océanogr. vol. I, 1. 2.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1918.

Chicago. Academy of sciences:
— — The Open Court No. 728.
— John Crerar Library:
— — Report for the year 1917 und 1918.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 48. Jahresbericht, 1918.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — 59. Jahresbericht 1918/19.

Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 20, No. 4.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 18, Nr. 1—4.
— — Zeitschrift, Heft 59.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XV, Heft 1, 2.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis S.S. 1918.
— — Programm 1919/20.
— — Statistik 1918/19.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — 41. Bericht.

Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1918, 12; 1919, 2—12.
— — Jahresübersicht der Beobachtungen 1913, 1914, 1916, 1917.
Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 13, Heft 2.
Dillingen. Lyzeum:
— — Bericht für 1918/19.
— Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Band 5, Lieferung 5. 6.
Dresden. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 39 und 40.
— — Jahresbericht 1917 und 1918.
— Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1913, 2. Hälfte; 1914, 1. Hälfte; 1916, 1. u. 2. Hälfte.
— — Dekaden-Monatsberichte 1916, Jahrg. 19.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1918, Nr. 21—24; 1919, Nr. 1. 2. 7—12.

Edinburgh. Mathematikal Society:
— — Proceedings, vol. 37, 1918/19.
Emden. Naturforschende Gesellschaft:
— — 101. und 102. Jahresbericht.
— Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Uptalsboom-Blätter, 8. Jahrg. 1918/19.
Erfurt. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 44/45.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 39.
Erlangen. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1918/19.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1918.

Fiume. Deputazione Fiumana di storia patria:
— — Bulletino, vol. 4.
Frankfurt a. M. Senckenbergische Bibliothek:
— — 8.—12. Bericht, 1919.
— Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — 47. und 48. Bericht.
— — Verzeichnis der laufenden Zeitschriften, 1914.

Frankfurt a. M. Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1917/18.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde:
— — Mitteilungen über römische Funde in Heddernheim, 5.
— — Altfrankfurt. Frankfurt 1917.
— Römisch-germanische Kommission des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — Kataloge west- und süddeutscher Sammlungen, Bd. 4.
— — Korrespondenzblatt („Germania"), Bd. 3, Nr. 1—4.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land":
— — „Schau ins Land", 45. Jahrlauf.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 22, Heft 1.
— Universität:
— — Schriften aus den Jahren 1918/19.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Freiburger Diözesanarchiv, Bd. 46.

Genf. Conservatoire et jardin botanique:
— — Annuaire 20 = 1916—18.
— Observatoire:
— — Observations des fortifications de St. Maurice, 1915.
— — Resumée météorologique de l'année 1915, 4 Sonderabzüge von Gautier.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. XVI, 4; XVII, 1. 3.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 39, No. 2.
— — Compte rendu des séances 36, 1—3.
— Universität:
— — Schriften, 1919.

Giessen. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht, N.F., medizinische Abteilung, Bd. 11; N.F., naturwissenschaftliche Abteilung, Bd. 7 (1916—19).
— Giessener Hochschulgesellschaft:
— — Abhandlungen, No. 1.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1919 in 4⁰ und 8⁰.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 94. 95.

Göttingen. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1918 (180) Nr. 1—6; 1919 (181) Nr. 1—8.
— — Nachrichten: a) Philol.-hist. Klasse, 1918, Heft 3. 4; b) Math.-phys. Klasse, 1918, Heft 1—3 und Beiheft; 1919 Heft 1; c) Geschäftliche Mitteilungen 1918 und 1919.
— Universitätsbibliothek:
— — Vorlesungsverzeichnis 1919.
— — Verzeichnis der Studierenden 1918/19.
— — Dissertationen 1918/19.
— — Simon: Rektoratsrede 1918.
Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1919, W.-S. 1919/20.
Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 19.

Haag. Bureau Central Statistique des Pays-Bas:
— — Bijdragen, No. 251.
— Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1919.
— K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, deel 75, afl. 1—4.
— — Naamlijst der leden, 1919.
Halle. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina, Heft 55, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 73, Heft 1—4; Bd. 74, Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, N. F., Nr. 7.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1918.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, 1919 u. 1920.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Neue Mitteilungen, Bd. 9, Heft 1. 2.
Hamburg. Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 7.
— Deutsche Seewarte:
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 47, Nr. 1—12.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 38. Jahrg., 1918.
— — Zeitschrift, Bd. XXIII.

Hannover. Technische Hochschule:
— — 4 Dissertationen von 1919.
— Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 22. Jahrg., Heft 1—4.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, 83. Jahrg., 1918, Heft 1—4.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der math.-naturw. Klasse, Nr. 7.
— — Sitzungsberichte: a) philol.-histor. Klasse, 1918, Nr. 8—15; 1919 Nr. 1—9. 11. 12; b) mathem.-naturw. Klasse, 1918, A 10—17, B 3; 1919, A 1—9, B 1. 2.
— — Jahresheft 1918.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 7, Nr. 7—10.
— Universität:
— — Personalverzeichnis 1918 und 1918/19.
— — 2 Rektoratsreden: Bezold, Endemann.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 21, Heft 1.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 14, Heft 1.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 14, Abt. Helgoland, Heft 1.

Helsingfors. Geograf.-foreningen i Finland:
— — Meddelanden 10, 1913/14.
— Historische Gesellschaft:
— — Arkisto, 24, 1. 2. 27. 1918.
— Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Öfversigt af förhandlingar 56. 1913/14 A. B. C; 57. 1914/15 A; 58. 1915/16 A. B. C; 59. 1916/17 A. B. C; 60. 1917/18 A. B.
— — Hydrolog.-biol. Untersuchungen No. 13.
— — Acta, tom. 43, No. 3, tom. 44, No. 7, tom. 45, No. 2—4, tom. 46, No. 1 - 8, tom. 47, tom. 48, No. 1—4.
— — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, Heft 74, 1; 75, 2; 77, 1—7; 78, 1 u. 3.
— Societas pro fauna et flora Fennica:
— — Acta 39—44.
— — Meddelanden, 40—44.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1915—1918.

Jena. Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 33/34, 35/36.
— Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 55, Heft 4, Bd. 56. 1,
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 24, 1.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1919, Nr. 3—39.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1919.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 34, Heft 1—4.
Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 52.
— — Mitteilungen 1917/18.
— Verein für Naturkunde:
— — Abhandlungen und Bericht, Bd. 55 (1916—1919).
Kaufbeuren. Verein „Heimat":
— — Deutsche Gaue, Heft 365—380; 385—400; Sonderheft 107. 108.
Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 48. 49.
— — Quellen und Forschungen, Bd. 6. 7.
Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 108. Jahrg., No. 1—6.
— — Carinthia II, 108. Jahrg.
— — Jahresbericht des Historischen Museums 1917.
— — Jahrbuch, 29. Band.
Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 38. Jahresbericht, 1918.
Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Biologiske Meddelelser I, 9—12 u. 14.
— — Hist.-filol. Meddelelser II, 3—6.
— — Mathemat.-fysiske Meddelelser I, 11. 12.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 86.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 14, No. 3—7.
— — Bulletin atlantique, 1910—13.
— — Bulletin statistique des pêches maritimes, vol. 8. 9.
— — Rapports et procès verbaux, vol. 25.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. Raekke, Bd. 7. 8.

Kopenhagen. Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Skrifter, No. 9.
— — Middelelser, Serie Fiskeri, Bd. V, 1—8.
— — „ „ Hydrografi, Bd. II, 5—7.
— — „ „ Plankton, I, 13.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä No. 28, 30—33.
Krakau. Historische Gesellschaft:
— — Archizum filologiczne, No. 1.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 54, 2.
Lausanne. Société d'histoire de la Suisse:
— — Mémoires et documents, II. sér., tom. 10, 1918.
Leiden. s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen, No. 37.
— Redaktion des „Museum":
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 26, No. 5—12; Jahrg. 27, No. 1—4.
— Physikalisches Laboratorium der Universität:
— — Communicationes, No. 153, Suppl. No. 41.
Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter, 1918, Bd. 42, Nr. 24; 1919, Bd. 43, Nr. 1—20.
— Deutsche Bücherei:
— — 6. Bericht, 1918.
— Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 35, Nr. 2; Bd. 36, Nr. 2 u. 3.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 35, Nr. 6; Bd. 36, Nr. 1. 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 70, Nr. 4—7; Bd. 71, Nr. 1—6.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 70, Nr. 2. 3; Bd. 71, Nr. 1.
— Gesellschaft für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1917—19.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 45 und 46.
— — Jahresbericht, 1914 und 1919.
Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Peru:
— — Boletin, No. 55.
Lindenberg. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten, Bd. 12 u. 13.
Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 77. Jahresbericht.

Lissabon. Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Bulletin, vol. 4, fasc. 3; vol. 5, fasc. 1.
Ludwigshafen a. Rh. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1918/19.
Lund. Kulturhist. förening och Museum:
— — Redogörelse för 1917/18 und 1918/19.
— Redaktion von „Botaniska Notiser":
— — Notiser, 1919, 1—6.
— Universität:
— — Acta, N. Ser., aft. I, 13. 14. 1. 2; aft. II, 1918, 1—4.
— — Bibelforskaren 19, 1918.
— — Arskrift, Kyrkohistorisk, 1918, 1—4.
— — Årsberättelse (Bulletin de la Soc. des lettres 1918/19).
— — Karlin, Kulturhistor. Museum in Lund, 1918.
Lyon. Société litteraire, historique et archéologique:
— — Bulletin trimestr., 1916 et 1917.

Madrid. R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 70, No. 1—6.
Mailand. Archivio storico civico:
— — Raccolta Vinciana, tom. 9. 10.
Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 12/13, 14.
Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 19. Jahrg., Nr. 11/12; 20. Jahrg., Nr. 1—12.
Mantua. R. Accademia Virgiliana:
— — Atti memorie, N. Ser., vol. 7, parte 2; vol. 8, parte 1. 2.
Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1918/19.
Meissen. Verein für Geschichte der Stadt Meissen:
— — Mitteilungen, Bd. 8, Heft 4; Bd. 9, Heft 1—3; Bd. 10, Heft 1. 2.
Mexiko. Museo Nacional:
— — Neujahrskarte 1915.
— Observatorio meteorológico-magnético central:
— — Boletín mensual 1914, April bis Dez.
München. Luitpold-Gymnasium:
— — Beilage zum Jahresbericht 1918/19 (von Diller).
— Realgymnasium:
— — 53. u. 54. Jahresbericht.
— Institut Stoll:
— — Jahresbericht 16, 1919.

München. Technische Hochschule:
— — Programm für das Studienjahr 1919/20.
— — Personalstand im W.-S. 1918/19, S.-S. 1919.
— Kadettenkorps:
— — Jahresbericht 1918/19.
— Landeswetterwarte:
— — Übersicht der Witterungsverhältnisse, 1918, 11. 12; 1919, 1—10.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1919/20 mit einer Chronik des Jahres 1918.
— Museum von Meisterwerken etc.
— — 15. Verwaltungsbericht, 1917/18.
— Staatsministerium für Unterricht und Kultus:
— — Amtsblatt, 1919.
— Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1919.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1919 und W.-S. 1919/20.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 27. 28.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 61.
Münster. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 76, 1.

Neisse. Philomathie:
— — 37. Bericht, 1916/17.
Neuchâtel. Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 43.
New Haven. Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Transactions, vol. 21, 1—114.
— Yale University Library:
— — Yale Review, N. S., vol. 6, No. 2.
New York. Public library:
— — Bulletin, vol. 19, No. 11.
— American Museum of Natural History:
— — Journal, vol. 16, No. 8.
— American Geographical Society:
— — Geographical Review, vol. 2, No. 6; vol. 5, No. 5.
— Rockefeller Institute for medial research:
— — List of publications, 1916.
— American Jewish Historical Society:
— — Publications, vol. 24, 1916.

New York. Columbia University:
— — Word: Researches in Physical optics, part 2, N.Y. 1919.
Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 1918.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1918, 1—4.
— — Mitteilungen 1918 und 1919.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 41. Jahresbericht 1918.
— Kreisoberrealschule:
— — 12. Jahresbericht 1918/19 mit Programm von Mosbacher.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 76, 2.
Padua. Accademia Veneto-Trentina-Istriana:
— — Atti Anno 8, 1915.
Palermo. Circolo matematico:
— — Rendiconti, tom. 40, fasc. 1—3; tom. 41, fasc. 1—3; tom. 42, fasc. 1—3; tom. 43, fasc. 1.
Paris. Redaction „La paix et le droit“:
— — La paix et le droit, année 26, No. 23/24; année 29, No. 7—10; No. 7—10.
Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1918/19.
Philadelphia. College of pharmacy:
— — American journal of pharmacy, vol. 91, No. 12.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Report 43, 1919.
Pisa. Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, ser. VI, anno 64, vol. 16, sem. 2, fasc. 5/6; anno 65, vol. 17, sem. 1, fasc. 1/10.
Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 29. Jahresschrift, 1919.
Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., Nr. 76—78. 80.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Katalog Bd. 23.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, Nr. 33.
Prag. Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft etc.:
— — Rechenschaftsbericht über 1918.

Prag. Knopfmuseum:
— — Berichte, Jahrg. 3, Nr. 3/4.
— — Bericht über die Eröffnung, 1918.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 66, Nr. 1—5.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 57, Nr. 1—4.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1919; W.-S. 1919/20.
— — Personalstand 1918/19.
— — Inauguration des Rektors 1918/19.

Regensburg. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 69.
Rio de Janeiro. Biblioteca nacional:
— — Annaes, vol. 31–34, 1909–1912.
Rom. Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 70, sess. 1—3.
— — Memorie, Ser. II, vol. 2, 1916.
— Deutsches Archäologisches Institut:
— — Jahresbericht 1915 und 1918.
— — Mitteilungen, Römische Abteilung, Bd. 31, 1916 = Register zu Band I—XXX; Bd. 32, No. 1–4.
Rostock. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1920.
— — Personalverzeichnis 1918—20.
— — Vorlesungsverzeichnis 1918—20.
— — Herbig: Friede. Ansprache, 1919.
— — Staude: Rektoratsrede, 1919.
Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefondervuidelijke Wijsbegeerte:
— — Catalog van bibliotheek, 1917.
— — Gedenkboek, 1761–1919.

Salzburg. Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 59, 1919.
St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch, Bd. 54.
— Historischer Verein:
— — Neujahrsblätter, 1918 und 1919.
San Fernando. Instituto y Observatorio de marina:
— — Anales, Sec. 2ª, Observ. meteorologie, 1914—1917.
— — Almanaque para el año 1916–1920 und je 1 Suppl.

Sarajevo. Landesmuseum:
— — Glasnik 30 und 31, 1.

Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 83.

Speier. Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 37/38, 1918.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 9.

Stavanger. Museum:
— Aarshefte for 1913 (24.) und 1917 (28).

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Monatsblätter 1917, Nr. 1—12.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Handlingar, Bd. 52, No. 1—17; Bd. 57, No. 1—9.
— — Arkiv för Zoologie, Bd. 11, No. 3. 4.
— — Arkiv för Kemi, Bd. 7, No. 1—3.
— — Arkiv för Botanik, Bd. 15, No. 1. 2.
— — Arkiv för Matematik, Bd. 13, No. 1—4; Bd. 14, Nr. 1. 2.
— — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 3 No. 4; Bd. 5.
— — Årsbok for år 1918.
— — Acta horti Bergiani, t. 6.
— — Berzelius Bref, III, 1.
— — Samuel Klingenstierna, Stockh. 1918.
— Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 11, 1916.
— — Antikvvarisk Tidskrift, Bd. 20, 2.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 57, No. 7/8; Bd. 58, No. 1—5.
— K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 32, 1917.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 39, 1918, No. 1—4.
— Geologiska Föreningen:
— — Förhandlingar, Bd. 40, No. 7; Bd. 41, No. 1—7.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Annaler Geogr. Arg. 1, No. 1. 2.
— — Ymer, Jahrg. 38, No. 4; Jahrg. 39, No. 1—3.
— Svenska Literatursälskapet:
— — Skrifter 7, No. 2.
— — Samlaren 39.

Stockholm. Nordiska Museet:
— — Fataburen 1918, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, No. 45—47.
— Sveriges geologiska Undersöckning:
— — Årsbok 1918.
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 15.
— — Flygblad 10—15.
Stonyhurst. College Observatory:
— — Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1918.
Straubing. Historischer Verein:
— — Jahresbericht 21, 1918.
Stuttgart. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 57, 58.
— Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 27, 1918.

Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Mitteilungen, Heft 26. 27.
Tokyo. Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2. ser., vol. 8, No. 21/22; vol. 9, No. 5.
Toronto. University:
— — Studies, Review of Historical publications, vol. 22, 1917/18.
— — History and economics, vol. 3, 2.
— — Physiological Series, No. 17—20. 22. 23.
— — Geological Series, No. 10.
— — Papers from Physikal laboratories, No. 59—61.
Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 12, 13.
Tübingen. Universität:
— — Universitäts-Schriften 1919.
— — Universitätszeitung, Sonderheft 1917.
Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti, vol. 49, No. 8—15; vol. 52, No. 9—15; vol. 53, No. 1—15; vol. 54, No. 1—15.
— — Memorie, tom. 64 und 66, I.
— — Osservazioni meteorol. nell' anno 1913.

Upsala. K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1917/18.
— — Årskrift 1914 und 1917.
— — Arbeten, No. 24.

Upsala. K. Universität:
— — Linné, Skrifter, vol. 1, No. 7.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 16, fasc. 1—4.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensuel., vol. 50, 1918.
Utrecht. Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Overzicht, Jahrg. 16, 1919, Jan.—Nov.
— Physiol. Laborat. der Hoogeschool:
— — Onderzoekingen, Register 1897—1918.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 18. 19.
Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti, N. S., vol. 6, 1917 und 1918.

Washington. National Academy of Sciences:
— — Proceedings, vol. 1 No. 12; vol. 2, No. 1. 2. 5—7, 9—12; vol. 3 No. 1.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1915.
— — Bulletin of the Mount Weather Observatory, vol. 7, No. 11. 12; vol. 8, No. 1—3.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin, No. 103. 105. 107.
— U. S. Naval Observatory:
— — Annual Report for 1916.
Weihenstephan. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1918/19.
Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 52.
Wien. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 177, Abh. 1; Bd. 186, Abh. 4; Bd. 187, Abh. 4; Bd. 188, Abh. 2. 3; Bd. 189, 1. 3—5; Bd. 190 1. 2. 4. 5; Bd. 191 1. 2; Bd. 192 1. 2; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 126, Abh. 10; Bd. 127, 1—3, 6—9; Abt. IIa, Bd. 126, Heft 10; Bd. 127 Heft 1—9; Abt. IIb, Bd. 127, Heft 1—10.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 61, 2; Bd. 62, 2. 3; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 94 und 95.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1918, 18—27; 1919, 1—27.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, Nr. 51—54.
— — Almanach, 68. Jahrg., 1918.
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 105, 2; 106, 2.
— Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1919.

Wien. Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 68, Nr. 1—5; Bd. 69, Nr. 1—5.
— — Abhandlungen, Bd. 10, Nr. 1.
— Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 32, Nr. 1—4.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 26.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 56, 1915/16; Bd. 57, 1916/17; Bd. 58, 1917/18.

Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, Bd. 44 (1916 u. 1917).
— — Mitteilungen, Jahrg. 20 u. 21.
— Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, 71. Jahrg.

Winterthur. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 12.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 22—24.

Woods Hole (Mass.). Marine Biological Laboratory:
— — Biological Bulletin, vol. 30, No. 4.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1917, 7—9; 1918, 1—6.
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 45, Heft 4—7.
— Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1918/19.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1919/20.
— — Personalstand 1918/19, 1919, 1919/20.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 60.
— — Jahresbericht für 1917.

Zürich. Naturforschende Gesellschaft:
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 63, Heft 3/4; Jahrg. 64, Heft 1/2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, Gartentechnische Serie, Lieferung 7.
— — Geologische Spezialkarten, Nr. 84.
— — Spezialkarte von Baden, Nr. 145 = Wièchs-Schaffhausen.

Zürich. Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 20, Nr. 3; Bd. 21, Nr. 1—3.
— — 27. Jahresbericht, 1918.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen, 1919.
— — Programm, S.-S. 1919; W.-S. 1919/20.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1917/18.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 54. Jahrg.
Zweibrücken. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1918/19.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Balde, Thomas Willing in Philadelphia:
— A World Court in the Light of United States Supreme Court.
Bezold Karl in Heidelberg:
— Zeitschrift für Assyriologie, Bd. XXXII, Heft 2—4.
Böhlaus H. Nachf., Verlagsbuchhandlung in Weimar:
— Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtsgeschichte, Bd. 40 in 3 Abteilungen.
Brill E. J., Verlagsbuchhandlung in Leiden:
— Enzyklopädie des Islam, Liefg. 25.
Engelmanns Buchhandlung in Berlin:
— Die Hochschule, 3. Jahrg.
v. Fischer Hermann in Tübingen:
— Schwäbisches Wörterbuch, 57. Liefg.
Goerz C. P., Optische Anstalt in Berlin-Friedenau:
— Festigkeit von Quarz von G. Berndt.
— Sechs Sonderabdrücke von Dr. Hans Schulz.
v. Goebel K. in München:
— Die Entfaltungsbewegungen der Pflanzen und deren teleologische Deutung.
Gümbel Alb. in Nürnberg:
— Neue archivalische Beiträge zur Nürnberger Kunstgeschichte.
Heim Albert in Zürich:
— Das Gewicht der Berge (Sond.-Abdr.)
Hosseus C. C. in Buenos-Aires:
— 10 botanische Abhandlungen von 1915 und 1916.
— 1 Liste seiner Veröffentlichungen, 1903—1913.

Hupp Otto in Schleißheim:
— Wider die Schwarmgeister, 3. Teil. 1919.

Lerch Eugen in München:
— Die Verwendung des romanischen Futurums als Ausdruck eines sittlichen Sollens. (Gekrönte Preisschrift der Samson-Stiftung.)

Mac Donald Arthur in Washington:
— Die geistige Betätigung der Völker und antisoziale Erscheinungen.

Meyer Hans in München:
— Platon und die Aristotelische Ethik.

Noreen A. in Upsala:
— Vårt Språk, nysvensk grammatik i utförling framställning (6 Hefte = VII, 1—6).

Oberhummer Eugen in Wien:
— Veröffentlichte Schriften E. Oberhummers, 1881—1919.

Pringsheim Alfred in München:
— Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. L. 1916.
I, 1 Reelle Zahlen und Zahlenfolgen. 1916.
I, 2 Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. 1916.

Reininghaus Fritz in Zürich:
— Neue Theorie der Biegungs-Spannungen, 3. Auflage.

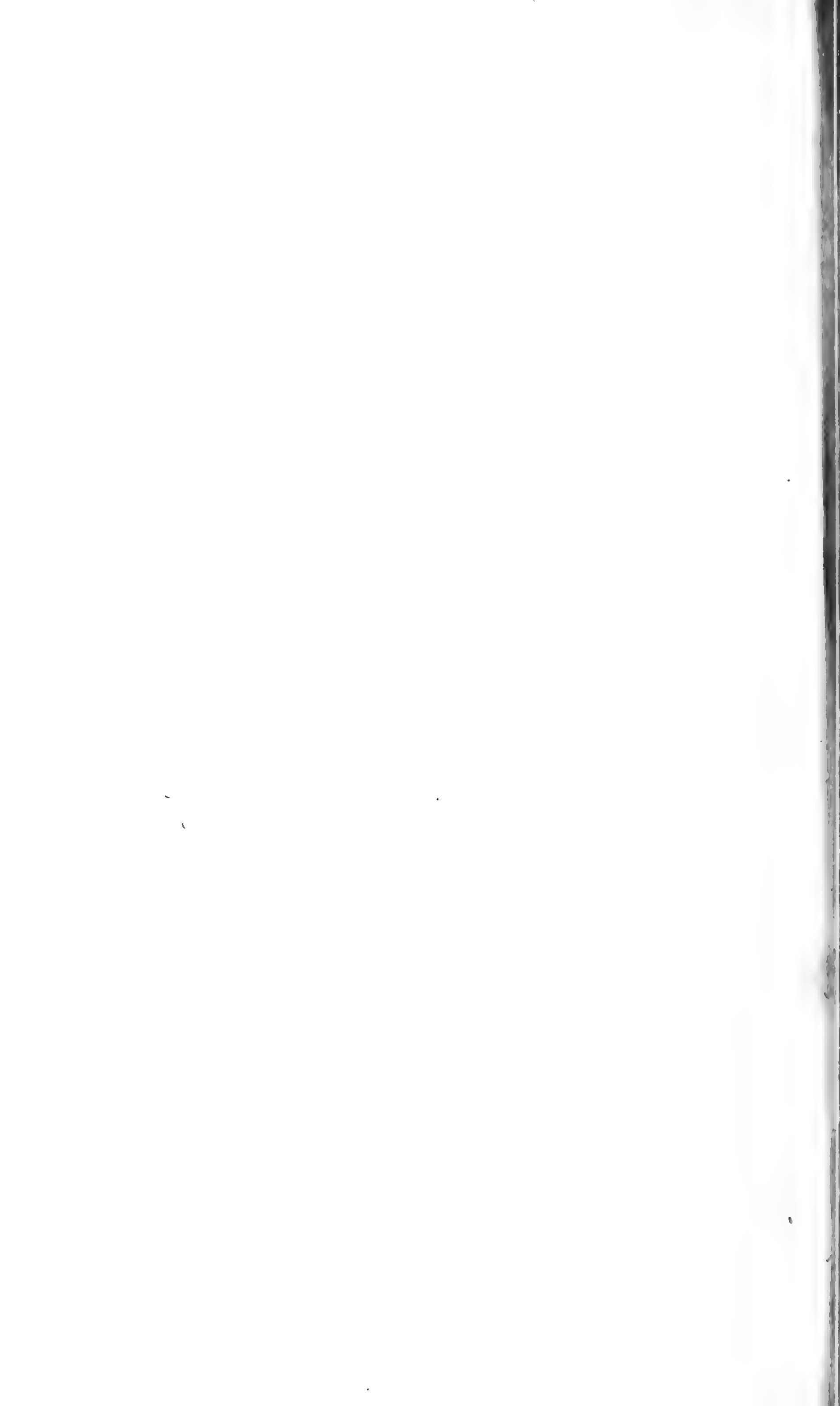
Schmidt Rich. in Münster i. Westf.
— Der Buddhismus nach älteren Pali-Werken (dargestellt von Edmund Hardy), Münster i. W., 1919.

Schoenflies Arthur in Frankfurt a. M.:
— Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig, 1891.
— Gruppentheorie und Krystallographie. Göttingen, 1893.

Sirl Michael in Rettenbach:
— Die drei Hofmarken Mengkofen, Weichshofen, Tunzenberg — eine Ortsgeschichte.

Stieve Hermann in Leipzig:
— Das Verhältnis der Zwischenzellen zum generativen Anteil im Hoden der Dohle (S.-A.).

Teubner B. G., Verlagsbuchhandlung in Leipzig:
— Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. II, 3. Heft 3.



Die Antarktis und ihre Vereisung.

Von **Erich von Drygalski.**

Vorgetragen in der Sitzung am 11. Januar 1919.

Das allgemeine Bild der Antarktis, das wir nach den Südpolar-Expeditionen der letzten Jahrzehnte in den Atlanten sowohl wie in den Übersichtskarten der Reisewerke finden, ist im großen das gleiche wie vor der neuesten Forschungsperiode, doch im einzelnen wesentlich vertieft, das letztere teils durch unmittelbare Feststellungen geographischer Art, teils durch mittelbare, die aus meteorologischen, ozeanographischen, geologischen, glazialen, biologischen und anderen Forschungen hervorgingen. Wir sehen auf den Karten einen Kontinent, dessen massiger östlicher Teil auf der indischen Seite, also im Viktoria- und Gauß-Quadranten liegt und im Norden mit einem Küstenbogen etwa am südlichen Polarkreis endigt. An ihn setzt sich ein kleinerer westlicher Teil, der hornförmig gekrümmt und zugespitzt erst am 63° südlich von Kap Horn ausläuft. Seine pazifische Küste biegt sich im Roß-Quadranten bis über den 70° zurück, während die atlantische im Weddell-Quadranten mittels eines konkaven Bogens das Ende des Horns mit dem konvexen Küstenbogen des östlichen Teiles verbindet.

Hiernach erscheint die Antarktis wie ein verzerrtes Spiegelbild von Südamerika, und zwar spiegelt sich in dem westlichen Teil nicht nur die äußere Form, sondern in vielen Einzelheiten auch der geologische Bau[1]). Im östlichen sind die mas-

[1]) J. Gunnar Andersson, On the Geology of Graham Land in Bull. Geol. Instit. of Upsala, VII, 1906, S. 64 ff. O. Nordenskjöld in Um-

sigen Teile der indischen Seite im Vergleich zu dem Nordosten Südamerikas, dem sie im Bilde entsprechen würden, verbreitert und verkürzt, wie in einem konvexen Spiegel gesehen. Doch der Bau der beiden Kontinente ist auch dort noch vergleichbar, denn beide enden mit altkrystallinen Schollen, die durch sedimentäre Tafeln und durch Decken von Massengesteinen überlagert, auch durch junge Vulkankegel umrandet und durchsetzt werden, der Viktoria-Quadrant der Antarktis sowohl, wie die südamerikanischen Plateaulandschaften von Guayana und Brasilien[1]).

Daß die Antarktis ein Kontinent ist, wird jetzt allgemein angenommen und durch obigen Vergleich auch ausgedrückt, da dieser ihr ein den Anden ähnliches, also kontinentales Faltengebirge zuschreibt, welches alte Schollen von kontinentaler Größe und Entwicklung einfaßt. Auch die Vereisung ist kontinental, nämlich ein Inlandeis von unabsehbarer Größe, das überall mit den gleichen Mauern endet, gleichartige Eisberge[2]) abstößt, stets dieselben Schichtungen und sonstigen Strukturen zeigt, die auf gleiche Ernährungs- und Bewegungsart deuten, und überall ein ähnliches Randklima bildet. Auch der sonstige Charakter des Klimas ist kontinental[3]), vor allem durch die auffallend niedrigen Sommertemperaturen, die sich von den höheren des maritimen Nordpolargebiets wesentlich unterscheiden[4]); desgleichen hat das Leben im Meer[5]), das die Antark-

---

schau, 1910, S. 956 f. und Bull. Geol. Inst. Upsala, VI, 2, S. 234 ff. O. Wilckens, Zur Geologie der Südpolarländer im Zentralblatt f. Min. Geol. Paläont., 1906, S. 173 ff. G. Bodman in Wiss. Ergebn. d. schwed. Südpolar-Exp. 1901/3, Bd. III, Lief. 15, S. 85 ff. E. Gourdon in Exped. Antarc. Franc. Geographie Physique Glaciologie Petrographie, Paris 1908, S. 149 ff., 204 ff. E. Suess, Antlitz der Erde, III, 2, S. 552 ff.

[1]) Ed. Suess, Antlitz der Erde, III, 2, S. 334, 559.

[2]) H. Arctowski in Bull. Soc. roy. Belge de Geogr. 1901, I, S. 38.

[3]) W. Meinardus in Deutsch. Südpolar-Exped., Bd. III, S. 5, 317, 329 ff.

[4]) A. Supan in Pet. Mitt. 1899, Heft XII.

[5]) Diese Frage ist noch nicht zusammenfassend bearbeitet worden, läßt sich aber nach den vielen zoologischen Einzelarbeiten in den Bänden der Deutschen Südp.-Exp. IX ff. in obigem Sinne vertreten.

tis umgibt, kontinentale Züge und der Schlamm, der dessen Boden bedeckt[1]). Der kontinentale Charakter ist einheitlicher als bei den übrigen Kontinenten, weil die Antarktis im Gegensatz zu diesen nur einer Klimazone angehört und durch sie die alles einigende Eisverhüllung empfängt. Die Zusammenhänge, die bei den anderen Kontinenten sichtbar sind, gibt der Antarktis das Eis, auf dem das meiste beruht, was sie als Kontinent charakterisiert.

Vor allem ist die Antarktis auch nach außen ein zusammenhängender Erdraum von kontinentaler Größe, der nach allen Seiten zuerst langsam in einem Schelf[2]) und dann steil zur Tiefsee absinkt. Die beiden großen Buchten in ihren Küsten, das Weddellmeer und das Roßmeer, stören diese Auffassung nicht, da jenes äußerlich und im Bau wie ein verkürztes Spiegelbild der argentinischen Bucht Südamerikas erscheint und das Roßmeer als Einbruch im antarktischen Nordrand in ähnlicher Lage, wenn auch viel länger und breiter, wie es die Lagune von Maracaibo im Nordrand Südamerikas ist, freilich nicht von ähnlichem Bau. Beide antarktischen Buchten verflachen sich gegen das Land[3]), beide haben ein Schelfeis, wie es in den Küstenmeeren der Antarktis entsteht und Küsteneinfassung voraussetzt; beide haben Windsysteme[4]), die auf hohe Gebirgsränder schließen lassen, und vom Roßmeer wissen wir durch die Expeditionen[5]) von Scott, Shackleton und Amundsen un-

---

[1]) E. Philippi in Deutsche Südp.-Exp., Bd. II, S. 582 ff. J. H. Harvey Pirie in Scott. geogr. Mag. 1905, S. 416. H. Arctowski et A. F. Renard in Mem. Acad. Belg. **61**, 1901, Sitzung vom 7. VII. 1900.

[2]) H. Arctowski siehe Anm. 1. Charcot in La Geographie 23, 1911, S. 5.

[3]) W. Brennecke in Ann. d. Hydr., 1913, S. 140 und Tafel 3. W. Bruce in Scottish geogr. Mag. 1905, S. 402 ff., sowie Scottish Oceanogr. Labor., 1910, S. 1 ff. R. F. Scott. in The Voyage of the Discovery, Bd. I, Chart. of the ant. Ocean.

[4]) W. Meinardus in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, 1, S. 338 f.

[5]) R. Amundsen, Die Eroberung des Südpols, München 1912, Karte. Kapitän Scott letzte Fahrt, Leipzig 1913, Karte. R. E. Priestly und T. W. Edgeworth David in XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, S. 767 ff.

mittelbar, daß es von Gebirgen umzogen ist, deren Höhen und Entwicklung ein tieferes Eingreifen des Meeres in den Kontinent als bis 83° oder 84° s. Br. nahezu ausschließt. So erscheinen beide nicht als trennende, den Kontinent teilende Meere oder Anfänge von Meeresarmen, sondern nur als Buchten, die den Küstenverlauf unterbrechen und gliedern.

Noch eine dritte Stelle der Antarktis ist so aufgefaßt worden, daß von ihr ein Meeresarm ausgeht, der den Kontinent teilt, oder doch tief in ihn einführt, nämlich das Gebiet südlich von Kerguelen. Es waren im wesentlichen zwei Momente, welche zu dieser Auffassung führten, nämlich die Expedition des Amerikaners Morrell 1823 und das polwärts gekrümmte Zurücktreten der äußeren Kante des Treibeises südlich von Kerguelen gegenüber ihrem sonstigen Verlauf in der Ostantarktis. Morrells Berichte sind unklar, doch sie konnten in obigem Sinne gedeutet werden, und die Einbuchtung der Schollen- und Eisberg-Grenze ist vorhanden; sie hatte die Vorstellung von einem südwärts gerichteten warmen Meeresstrom gezeitigt, der das Eis zurückdrängen und vielleicht durch hohe Breiten bis zum Weddellmeer führen sollte.

Beide Gründe dürfen heute als beseitigt gelten. Denn Morrells Berichte sind berechtigten Zweifeln begegnet, denen schon G. v. Neumayer[1]), H. R. Mill[2]), K. Fricker[3]) und O. Nordenskjöld[4]) bestimmten Ausdruck gegeben haben. Ich teile diese Zweifel vollkommen, da ich es nach den jetzt bekannten Wind-Wellen und Eis-Verhältnissen an dem von Morrell berichteten Weg, gleichgültig, ob er von 118° 27′ östl. Länge v. Gr. bis Enderby-Land nördlich oder südlich vom Polarkreis lag, für völlig ausgeschlossen halten muß, daß seine Fahrt mit einem Segelschiff in der kurzen Zeit zurückgelegt sein kann, die er angibt. Bei dieser Unsicherheit der Grundlagen kann

---

[1]) Hamburger Geographentag 1885, auch Auf zum Südpol, Berlin, S. 246 ff.

[2]) The Siege of the South Pole, London 1905, S. 104 ff.

[3]) Antarktis, Berlin 1898, S. 48 f.

[4]) Schwed. Südpol.-Exp., I, 1, S. 44 ff.

seine Expedition jedenfalls keine Meeresbucht oder Straße in der Antarktis südlich von Kerguelen beweisen. Und auch für den Strom, den vor allem G. v. Neumayer[1]) annahm, sind keine Beweise erbracht worden, wohl aber manche dagegen, so daß man ihn nicht mehr annimmt[2]). Es ist zwar richtig, daß der Rand des Treibeises südlich von Kergulen polwärts zurücktritt, doch die Gründe dafür liegen in nordwärts und nicht in südwärts gerichtete Strömungen.

Ob nun trotz Versagens der ursprünglichen Gründe in der Küste des Kontinents eine Bucht südlich von Kerguelen besteht, wie es in der Grenze des äußeren Eisrandes der Fall ist, und in welcher Tiefe, ist durch unmittelbare Beobachtungen noch nicht festgestellt worden. Es ist aber anzunehmen, daß sie in geringem Ausmaß besteht, etwa im Meridian von Kerguelen (70°) oder etwas östlich davon, gegen den 80. Meridian hin, daß sie aber breit und flach ist und nicht tief hinein führt. Es ist nur eine leichte Einbiegung der dort sonst dem Polarkreis folgenden Küste, nicht ein tiefer Einbruch, der den Kontinent teilt, auch nicht der Anfang einer Meeresstraße, die ihn durchzieht. Dafür sprechen die folgenden Gründe:

Der „Challenger" hat am 16. II. 1874 bei 78° 22′ östl. L. Gr. 66° 40′ s. Br. erreicht und der „Gauß" am 30. III. 03 bei 80° 33′ östl. L. Gr. 65° 27′ s. Br. Beide sahen bei gutem Wetter kein Land. Der „Challenger" hatte bei seiner südlichsten Lotung unter 65° 42′ s. Br. und 79° 49′ östl. L. Gr. 3063 m Tiefe und der „Gauß" unter 65° 16′ s. Br. und 80° 28′ östl. L. Gr. 3400 m. Das zeigt ähnliche Tiefen und Neigungen des Meeresbodens, wie sie der „Gauß" weiter östlich am 93. Meridian um den 64° s. Br. fand. Hier lag die Küste fast 3° weiter südlich. Nimmt man dieselben Verhältnisse für den 80. Meridian an, würde sie an ihm etwa bei $68^1/_2$° s. Br. zu suchen sein. Die Einbuchtung wäre also sehr flach. Legt man aber die Erfahrungen von W. Bruce[3]) zu

---

[1]) Auf zum Südpol, Berlin, S. 61, 114, 163.

[2]) O. Krümmel, Ozeanographie, Bd. II, Stuttgart 1911, S. 680.

[3]) Scott. geogr. Mag. 1905, S. 408 f. Scott. Oceanogr. Labor. 1910, S. 6.

Grunde, der für die Weddellsee schon bei Tiefen von weniger als 2000 Faden (3658 m) auf größere Nähe der Küste schließt, würde diese am 80. Meridian nördlich von 68° s. Br. zu suchen und die Einbuchtung noch flacher sein.

Daß die Küste auch tatsächlich von den südlichsten Punkten des „Challenger“ und „Gauß“ nicht mehr fern lag, haben beide aus der Fülle der frischen Eisberge geschlossen, die sie dort sahen, und die man ähnlich immer in Landnähe findet. Auch die Nord und Nordwest gerichteten Oberflächenströmungen am dortigen Wege des „Gauß“ ergaben den gleichen Schluß, da sie 10° weiter östlich in dieser gleichen Form vor der Küste auftraten. Urteilt man nach dem Küstenstreichen, das der „Gauß“ weiter östlich fand (Deutsche Südp.-Exp. I, Tafel 17), wäre das Land am 80. Meridian zwischen 67° und 68° s. Br. zu suchen, und desgleichen, wenn man seine Lage mit W. Meinardus nach dem Isobarenverlauf beurteilt[1]).

So vereinigt sich alles, was man kennt, zu demselben Ergebnis[2]), daß die Einbuchtung der antarktischen Küste südlich von Kerguelen nur flach ist. Natürlich wäre es erwünscht, das Land dort selbst zuerreichen, doch wird eine darauf zielende Expedition mit Sicherheit damit rechnen müssen, daß die Küste nur 1 oder 2 Grade südlicher liegt als am Gaußberg, also bei 68° oder 69° s. Br., und daß ein Schiff dort nicht in hohe südliche Breiten vordringen kann. Wenn sie der „Challenger“ von 66° 40′ s. Br. nicht sah, ist es nicht zu verwundern; wir konnten von der Gaußstation die noch nicht 1° südlich von ihr gelegene Inlandeisküste auch nicht sehen und nur ausnahmsweise den in derselben gelegenen 371 m hohen Gaußberg, der sich seiner dunklen Farbe wegen weithin abhob. Das Inlandeis sahen wir bei klarem Wetter nur als hellen Schein, ähnlich wie es der „Challenger“ für seine Sicht nach Süden hin angibt[3]); er wird die Küste daher am 68° s. Br. oder noch näher gehabt haben.

---

[1]) W. Meinardus in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, S. 319 ff.

[2]) L. Mecking in geogr. Zeitschr., XV, S. 440 f.

[3]) H. R. Mill, The Siege of the South Pole, S. 356.

Über die Einzelheiten der Küste am Wege des „Gauß“ ist schon berichtet worden (Deutsche Südp.-Exp. I, S. 381, 448 f., Tafel 17). Wir fanden eine einförmige Ostwest bis ONO-WSW ziehenden Inlandeismauer, die nur am Gauß-Berg und durch seinen Einfluß auf das Strömen und die Ablation des Inlandeises eine geringe Veränderung erfährt. Westlich vom Gaußberg ist ihr eine breite Schelfeismasse vorgelagert, östlich eine Insel, die wir am 21. II. 02 als „Hohes Land“ sichteten, und die später D. Mawsons Expedition 1911/14 als Insel erkannte und Drygalski-Insel benannte[1]. Östlich von ihr liegen nach Mawson vor der Küste wieder gewaltige Schelfeismassen.

Termination-Land, das Ch. Wilkes von 64° 1′ s. Br. und 97° 37′ östl. L. Gr. als „appearance of land“ am 17. II. 1840 sichtete[2] und das später von anderen so benannt und auf der Karte verzeichnet wurde, ist nicht vorhanden, wie „Challenger“[3], „Gauß“[4] und Mawson[5] übereinstimmend bekunden. Wilkes ist etwa 70 km von ihm, also von seiner „appearence of land“ entfernt gewesen, der „Challenger“ hatte 30—40 km und der „Gauß“ dicht vor dem Nordende der Position desselben gestanden, beide ohne Land zu sehen. Mawsons Expedition ist 1912 und 1914 sogar darüber hinweg gefahren. Es ist also sicher, daß kein Land vorhanden ist, wo das Termination-Land nach Wilkes gezeichnet wurde.

Wenn jetzt aber gesagt wird, daß es doch vorhanden wäre[6] und nur weiter südwestlich läge, als Wilkes annahm,

---

[1] Sir Douglas Mawson, The home of the blizzard, London, Bd. II, S. 113, 120, 270, auch Karte des Queen Mary Land.

[2] Narrative of the U. S. Exploring Expedition 1838/42, Bd. II und Atlas Karte 2, London 1845. Auch „The Antarctic Manual“, London 1901, S. 402.

[3] Narrative of the Cruise of the Challenger, I, S. 407. Auch H. N. Moseley, „Notes by a naturalist on the Challenger“, London 1879, S. 250.

[4] E. v. Drygalski, Zum Kontinent des eisigen Südens, Berlin 1904, S. 232 f.

[5] D. Mawson, The Home of the Blizzard, London, Bd. I, S. 9, 77.

[6] W. Bruce in Scottish geogr. Mag. 1911, S. 315.

indem es mit dem „Hohen Land" des „Gauß", der „Drygalski-Insel" Mawsons identisch wäre, so ist zu erwidern, daß diese über 200 km südwestlich von dem angeblichen Termination-Land liegt und über 300 km von Wilkes Standort entfernt, als er die Landsichtung hatte. Wilkes konnte sie daher unmöglich sehen, zumal er unsichtiges Wetter hatte, denn sie ist nach Mawson[1]) nur 1200 Fuß (rund 400 m) hoch, wäre von Wilkes Mast also höchstens aus 100 km Entfernung sichtbar gewesen. Sein Schiffsort hätte daher in Länge fast 4° und in Breite fast 2° anders gewesen sein müssen, als er angibt, falls er es sah. Das ist auch bei der Schwierigkeit polarer Positionsbestimmungen nicht möglich, zumal Wilkes einer Eisbergbank wegen diese andere Position, aus der er die Insel hätte sehen können, nur auf Umwegen und schwer erreicht haben würde. So ist anzunehmen, daß seine „appearance of land" eine Täuschung durch Eis war, wie sie leicht vorkommen kann, zumal bei unklarem Wetter, wie er es hatte. Dieses ist jetzt durch Mawsons Feststellung, daß für Wilkes in der Richtung auf sein Termination-Land eine Bank mit festen Eisbergen liegt, zur Sicherheit geworden; Mawson hat die letztere daher als „Termination Ice Tongue" bezeichnet[2]).

Uber die Größe des antarktischen Kontinents habe ich keine neue Berechnung angestellt, weil die Lage seiner Küsten nicht zur Hälfte bekannt ist und, wo man sie kennt, erhebliche Unsicherheiten darin liegen, was man als Küste ansieht, ob den Rand des Schelfeises oder des Inlandeises oder gar den, mit welchem sich der Gesteinsboden unter dem Inlandeis aus dem Meere erhebt.

Der Rand des Schelfeises bezeichnet, von geringen Schwankungen abgesehen, die heutige Lage der Küste, als der Grenze zwischen dem festen und dem flüssigen, für längere Zeiten, der Rand des Inlandeises für solche von geologischer Dauer, nämlich solange die heutige antarktische Eiszeit währt, doch erst der Rand des festen Gesteins in sonstigem Sinn, so-

---

[1]) A. a. O., Bd. II, S. 270. [2]) A. a. O., Bd. I, S. 77.

lange keine Hebungen oder Senkungen eintreten. Das Inlandeis strömt über die letztere hinaus und endigt im Meere, wo es den Boden verliert und zu schwimmen beginnt, und das Schelfeis geht noch über die Inlandeisgrenze hinaus, da es fast durchweg schwimmt. So wird das Areal des Kontinents sich am größten ergeben, wenn man bis zur Schelfeisgrenze rechnet und am kleinsten, wenn man die Gesteinsgrenze annimmt. Die gegenseitigen Beziehungen der drei Grenzen wechseln von Ort zu Ort mit den Formen des Landes und des Meeresbodens, sowie mit der Dicke des Eises; sie sind nur an kleinen Küstenstrecken der Antarktis bekannt. Es fehlen also die Grundlagen, um die drei Areale zu vergleichen, und damit die Möglichkeit, das Areal des Kontinents genauer festzustellen, abgesehen davon, daß über die Hälfte der Küsten überhaupt noch nicht gesichtet ist.

W. Bruce[1]) schätzt die Größe des Kontinents zu 14,2 Millionen □ km. Sie mag etwas kleiner sein, weil das Weddellmeer größer ist, als Bruce annimmt, also etwa 14 Mill. □ km rund. Das wäre fast doppelt so groß, wie Australien, rund $3^1/_2$ Mill. □ km kleiner als Südamerika und nahezu halb so groß wie Afrika. Die Antarktis fügt sich also gut in die Größenreihe der Südkontinente ein. Rechnet man deren Areale zusammen, erreicht die Summe sehr nahe den Flächeninhalt der Nordkontinente, so daß man nach diesen Feststellungen in der Antarktis von dem in alten Zeiten erörterten Gleichgewicht der Festlandareale beider Hemisphären sprechen kann.

Ich habe den Südpolar-Kontinent in obigem „Antarktis“ genannt, doch sind auch andere Namen gebraucht. Man liest Antarktika, auch Antarktia oder Antarktien. L. Mecking[2]) erörtert die Namensfrage und vermißt für Antarktika sachliche Begründung, es sei denn, daß diese in der Analogie mit der Namensbildung Amerika läge, also einer nicht glücklichen, weil sie sowohl in ihrem Recht der Herkunft wegen bis heute bestritten ist, wie in ihrer Zweckmäßigkeit wegen der Unbe-

---

[1]) Scottish geogr. Mag. 1906, S. 373.

[2]) Pet. Mitt. 1914, S. 336.

quemlichkeit des Gebrauchs für zwei Kontinente. Auch wäre das Wort antarktika schon in anderem Sinne, nämlich als Adjektiv gebräuchlich und deshalb ungeeignet, um weitere Ableitungen, z. B. antarktikanisch, davon zu bilden. Meckings Gründe sind berechtigt; Antarktia oder Antarktien, das er vorschlägt, ist besser, wenn man „Antarktis" für den Kontinent und das ihn umgebende Eismeer zusammen, nicht aber für den Kontinent allein gebrauchen will. Im übrigen ist aber der Kontinent in seinem weitesten Umfang, d. h. bis zum Rande des Schelfes, derart der Kern und der Inhalt und die Summe aller „antarctica", d. h. alles dessen, was antarktisch ist und der anders gearteten „Arktis" gegenüber liegt, daß man den Namen „Antarktis" auf ihn allein beziehen darf.

Denn nur er steht voll unter der Herrschaft des Eises. Er ist vom Eise bedeckt oder doch davon gestaltet; sein Schelf trägt Eis oder ein seichtes Meer, dessen Temperatur bei der Gaußstation bis zum Boden auf dem Gefrierpunkt stand, während die Böschung des Schelfs und die Tiefsee daneben schon Wärmeschichtung hatten, also heterotherm waren. Auf dem Schelf[1]) des Alexanderlandes greifen die heterothermen Verhältnisse etwas weiter hinauf, weil die Küste dort freier liegt, doch betont Arctowski[2]) auch für dieses westantarktische Gebiet den thermischen Unterschied zwischen Schelfmeer und Tiefsee; im Weddellmeer[3]) war es so wie an der Gaußstation. Auch das Leben der Tiefsee ist scharf von dem des Schelfs unterschieden; nur dieses ist antarktisch[4]), während jenes zum Leben der Ozeane hinüber leitet. Im Klima sind die Randgebiete des Eises und des Meeres daneben durch die gleichen

---

[1]) H. Arctowski und H. R. Mill in Exp. Antarct. Belge, Oceanographie, Relations Thermiques, Anvers, 1908, Tafel III.

[2]) Bull. Roy. de Belgique (Classe des sciences), No. 11, S. 648.

[3]) W. Brennecke in Annal. d. Hydr., 1913, S. 140 und Zeitschr. d. Ges. f. Erdk., Berlin 1914, S. 123. O. Nordensjöld in Wiss. Ergebn. d. Schwed. Südp.-Exp., Bd. I, Lief. 2, S. 20 und Tafel 2.

[4]) E. Vanhöffen, Die Tierwelt des Südpolargebiets in Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde, Berlin 1914, S. 363.

Erscheinungsformen der Winde und der Niederschläge vereinigt[1]), doch unmittelbar am Rande des festen zeigt sich im Charakter der Winde und der anderen meteorologischen Elemente trotzdem ein Sprung[2]). Also endigt in jeder Hinsicht mit der Grenze des Kontinents, wo er zur Tiefsee abfällt, die reine antarktische Natur, und man darf deshalb den Namen „Antarktis" auf jenen beschränken. Das tiefe Meer mit dem vielen Treibeis, das ihn umgibt, ist nur noch ein wechselvolles Kampfgebiet zwischen Eis und Meer und nach allem zur „Subantarktis" zu rechnen.

Das Eis der Antarktis besteht aus zwei Arten, dem Inlandeis und dem Schelfeis; das Treibeis der Subantarktis tritt als dritte Art des hohen Südens dazu. Das Inlandeis gehört zum Land, das Schelfeis zum flachen Meer und das Treibeis zur Tiefsee. Ersteres liegt dem festen Gestein auf, das zweite nur noch zum Teil, während es zum größeren Teil schwimmt, und das Treibeis schwimmt ganz. Das Inlandeis hat eine strömende Eigenbewegung, die auf inneren Vorgängen beruht und in Verschiebungen seiner Teile gegeneinander und gegen den Boden besteht. Das Schelfeis wird durch äußere Kräfte (Gezeiten, Fluten, Winde, nachdrängendes Inlandeis) gehoben oder geschoben und das Treibeis durch alle Bewegungen des Meeres lebhaft hin und her geworfen oder getrieben.

Das Inlandeis ist Schnee-Eis und entsteht aus den festen Niederschlägen, die periodisch auf das Land fallen, wodurch es seine Schichtung erhält. Es hat Beimengungen von Schmelzwassereis, doch spielen sie keine erhebliche Rolle. Es hat auch Beimengungen von Staub, doch nur in der Nähe von eisfreiem Land und, da dieses selten ist, relativ wenig. Dagegen enthält es sehr viele Luftblasen und ist deshalb spezifisch leicht. Die Folgen seines Strömens sind Spalten, Bänderungen und Moränen. Die Spalten werden sehr breit und die Bänderungen sehr dicht, während die Moränen klein bleiben, was alles daher

---

[1]) W. Meinardus in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, 1, S. 334.
[2]) W. Meinardus, a. a. O., S. 216 ff., 317 f.

rührt, daß das Strömen langsam ist und das Eis sehr alt wird, bis es vergeht. In der Härte des Klimas brauchen alle Umbildungen und Wirkungen des Eises sehr lange Zeiten.

Auch das Schelfeis ist Schnee-Eis, wenigstens weit überwiegend. Seine Hauptmenge ist abgestoßenes oder aufgelöstes Inlandeis und hat dann alle Eigenschaften desselben, Zusammensetzung, Schichtung, Bänderung, Spalten, Moränen. Zum anderen Teil ist es im Meere gebildet[1]), durch das Wachstum und durch Schneebelastung der Schollen oder durch Füllung seichter Meeresteile mit Schnee. Dann enthält es Beimengungen von Meereis, doch selten und wenig, weil dieses bei zunehmender Schneebelastung von oben nach unten tiefer eintaucht und dabei vergeht. Es hat dann auch andere Eigenschaften des Meereises, insbesondere dessen Schollenform und Schollenstruktur, während die Eigenschaften des Inlandeises nun naturgemäß fehlen. Beide Arten des Schelfeises tragen die Zeichen hohen Alters, sowohl in den abgeschliffenen runden Formen, die ich Blaueis genannt, wie in den zersetzten, zerfallenden, die von mir als Mürbeis beschrieben wurden. Soweit das Schelfeis vom Inlandeis kommt, wird es tatsächlich aus dessen ältesten, innersten Teilen bestehen, während das im Meer gebildete jünger seie kann; doch alte Formen haben beide, weil sie nur äußeren Kräften ausgesetzt sind und jede innere Weiterbildung und Erneuerung fehlt.

Beim Treibeis kehrt sich das beim Schelfeis bestehende Mischverhältnis zwischen Land- und Meer-Eis um, indem es hauptsächlich aus Schollen, also Meereisbildungen, und zum kleineren Teil aus Eisbergen, also Inlandeisstücken, besteht. Trotzdem ist es auch überwiegend Schnee-Eis, was bei den Eisbergen keiner Begründung bedarf und bei den Schollen daher rührt, daß ihre ursprünglich aus Meerwasser gefrorenen Teile infolge von wachsender Schneebelastung immer tiefer eintauchten und dabei vergingen, während gleichzeitig die Schneelast selbst vereiste und übrig blieb. Immerhin enthalten die Schollen des Treibeises mehr Meerwassereis als die des Schelf-

[1]) O. Nordenskjöld in Schwed. Südp.-Exp. I, 1, S. 119.

eises, weil sie in der Regel jünger sind als bei diesem, und deshalb nicht so lange Schneebelastung und Senkung erfuhren. Die Eisberge des Treibeises haben alle Eigenschaften des Inlandeises und des Schelfeises, da sie von beiden herkommen. Die Schollen haben meist flache Formen bis etwa 6 m Dicke, seltener mehr. Nur wenn sie Teile zerbrochener Schneewehen sind, können sie bis zu 20 m Dicke erreichen und als kleine Berge erscheinen, die aber mit den wirklichen Bergen nicht zu verwechseln sind. Sie sind feiner geschichtet als diese. Die flachen Formen haben auch Schichtung, doch unregelmäßig und wenig hervortretend.

Alle Schollen haben deutliche Zeichen ihres Treibens im Meer in aufgepreßten oder aufgeworfenen Trümmerwällen, die sie umranden, in Schmelz- oder Brandungskehlen in der Wasserlinie, in Strudellöchern, die von den Kehlen ausgehen, in Pilz- oder Tisch-Bildungen auf ihren Oberflächen, wenn die Kehlen so tief eingegriffen haben, daß die Oberfläche nur noch auf Stützen steht, in Abrundungen aller Ecken und Kanten zu den Formen des Pancake-Eises und zu jenen „Gasch" genannten breiigen Zertrümmerungsprodukten dazwischen. Man sieht im Treibeis verschiedene Alters- und Dicken-Stadien der Schollen, und diese verschiedenen Stadien meist in Gruppen gesammelt, doch die schwersten Schollen sieht man am meisten, weil sie sich am längsten halten. Eispressungen und Schollenpackungen, wie sie als Packeis aus der Arktis bekannt sind, sieht man im Süden selten, weil das Treibeis radial ins freie Weltmeer ausstrahlen kann, während es sich in der Arktis zwischen Landmassen schiebt und preßt.

Die Entstehung und Verbreitung der drei Eisarten des Südens hängt wesentlich von dem antarktischen Kontinent ab. Nur ein kontinentales Land in der polaren Lage kann ein so gewaltiges Inlandeis bilden, wie es die Antarktis trägt; nur dieses Inlandeis kann das polare Klima noch weiter verhärten, so daß es überall Schelfeismassen in die Flachsee vorschiebt und darin hält, und nur das Inlandeis, das Inlandeisklima und das Schelfeis zusammen können durch Eisberg-Bildungen, durch die

Abkühlung des Meeres und durch die Verbreitung kalter Strömungen derart breite Treibeiszonen erzeugen wie dort. So liegen im polaren Kontinent die Bedingungen der antarktischen Eisformen und ihrer Verbreitung.

Über die Einzelheiten der Frage, wie das Inlandeis einmal entstanden ist und unter welchen klimatischen Bedingungen, wird man schwer eine Vorstellung bilden können, da das heutige Klima mit vom Eise bestimmt wird und man dessen Einfluß nicht mehr auszuschalten vermag. Wichtiger ist auch die andere Frage, wie und wie weit sich das antarktische Inlandeis heute erhält, also die Frage nach seiner Ernährung und seinen Schwankungen.

Über die Ernährung durch Schnee im Sommer wie im Winter steht nach den Beobachtungen der letzten Forschungsperiode übereinstimmend fest, daß sie überall bis zum Meeresspiegel herab erfolgt, sowohl auf den größten Höhen des Inlandeises, die betreten sind, wie in seinen Randgebieten am Meer. Denn Scott[1]), Shackleton[2]), Amundsen[3]) berichten von Schneedecken und Schneewehen auf den Plateauhöhen des inneren Landes, wie von der Oberfläche des im Meere schwimmenden Roß-Eises[4]). Wir fanden das Meereis selbst noch wesentlich durch Niederschläge verdickt und sahen wachsende Schneewehen auf dem Gauß-Berg und auf den Randgebieten des Inlandeises, das ihn umgibt. Mawson erwähnt die Schneebedeckung der Inlandeis-Oberfläche im Randgebiet des Königin Marie und des Kaiser Wilhelm II Landes während der Schlittenreise im Dezember und Januar, also im antarktischen Sommer[5]), desgleichen von den Höhen des Adelie- und des

---

[1]) Kapitän Scott letzte Fahrt. Leipzig 1913, Bd. I, S. 290 ff., 299 ff., 305 ff.

[2]) E. H. Shackleton, The geogr. Journ. 34, 1909, S. 490 ff.

[3]) Die Eroberung des Südpols, München 1912, Bd. II, S. 569, 584, 600, 610.

[4]) H. T. Ferrar in National antarctic Exped. 1901/4, vol. I, S. 24, 64, 67 ff., 83 ff. R. F. Scott, The voyage of the Discovery, London 1905, Bd. II, S. 22 ff. W. H. Hobbs in Zeitschr. f. Gletscherkunde, 1910, S. 64 f.

[5]) The Home of the Blizzard, Bd. II, S. 124.

König Georg V Landes[1]); Arctowski[2]), Charcot[3]), Gourdon[4]) berichten über die Entwicklung der Eismassen aus Schnee an der Graham-Küste und am Gerlache-Kanal, auf den Höhen sowohl wie im Meeresniveau, und Nordenskjöld[5]) vom Schelfeis im Meere vor der König Oskar II Küste und von den Inseln um seine Winterstation auf Snow Hill; durchweg schneebedeckt war auch das Inlandeis im Luitpoldland[6]). Nur vom Weddellmeer wird durch Barkow[7]) auffallende Schneearmut betont, doch betrifft das nicht ein Inlandeisgebiet, sondern fern von dessen Rändern liegendes Meereis. Von allen Hochflächen und Randzonen des Inlandeises, welche gesehen wurden, ist festgestellt, daß sie weithin unter Schnee liegen, also zu den Nährgebieten gehören. Von allen wird auch Schichtbildung beschrieben, die solchen eignet, desgleichen von allen Rändern die Ablösung geschichteter Eisberge, welche die Ernährung bis zum Rande bekunden, und auf den Bildern aller Expeditionen, auf denen eisfreie Felsen dargestellt sind, sieht man die Schneeflächen an diesen emporsteigen, wie es für Nährgebiete charakteristisch ist.

Die Ernährung ist aber an allen betretenen Stellen keine gleichmäßige, da immer schneefreie, also nicht ernährte Gebiete die schneebedeckten unterbrechen. Ich habe das vom Inlandeis am Gauß-Berg, vom Berge selbst und vom Meereis geschildert. Ferrar[8]) spricht von jenem Mangel an Ernährung, der die toten Gletscher der Royal Society-Kette entstehen läßt, und in der ganzen Westantarktis sind ausgedehnte Hänge eisfreien Landes und Flächen schneefreien Eises der sichere Beweis, daß trotz reichlichen Schneefalls im Winter

---

[1]) The Home of the Blizzard, Bd. I, S. 287 ff.

[2]) Exped. antarct. Belge, Geologie, Anvers 1908, S. 39 ff., sowie Océanographie, S. 20 ff., auch Pet. Mitt., Erg.-Heft 144, 1903, S. 7, 23.

[3]) Le Français au Pol Sud, S. 74.

[4]) Exped. antarct. Française 1903/5, Geographie Physique, S. 71 ff.

[5]) Schwed. Südpolar-Exped., Bd. I, Lief. 1, S. 164 ff.

[6]) Nach freundlicher Mitteilung von Dr. F. Heim.

[7]) Meteorolog. Zeitschr. 1914, S. 123.

[8]) Nat. Ant.-Exped. 1901/4, Bd. 1, Geology, S. 73, 85.

wie im Sommer, trotz allgemeinen Überwiegens der Niederschlagsmengen über den Schwund, der durch Schmelzung und durch Verdunstung entsteht, trotz der überall erkannten Dauer der Schneedecken das ganze Jahr hindurch bis zum Meere herab — auch mangelhaft oder gar nicht ernährte Gebiete bestehen[1]). Die von E. Werth[2]) angeschnittene Frage, ob dieselben zum Teil unter der Schneegrenze liegen und ob diese in der Antarktis stellenweise über dem Meeresniveau liegt, werde ich weiter unten verneinen. Wichtiger ist zunächst, daß es Fels- und Eisflächen gibt, die sicher über der Schneegrenze liegen, viele schneeige Niederschläge erhalten, vom Eise umgeben werden und doch nicht vereisen.

Den Gründen und dem Ausmaß dieser Erscheinung, sowie der Frage, wie wirksam sie für den Eisbestand und seine Schwankungen ist, ob die ernährten oder die schwindenden Gebiete die Oberhand haben und ob das Inlandeis wächst oder abnimmt, kann man zunächst in zweierlei Weise nachgehen, nämlich von der Lage und von den Formen der schneefreien Flächen her.

Der Lage nach finden wir die größeren Ablations- oder nicht ernährten Gebiete sowohl in den hohen, ins Innere der Antarktis vorgeschobenen Ketten des Viktorialandes wie in der niedrigen, halbinselförmig in den Ozean vortretenden Westantarktis, und kleinere Flächen auch sonst überall. Die beiden Hauptgebiete sind und liegen so verschieden wie möglich. Nicht nur ihre Höhe und Polentfernung, sondern auch ihre Formen, ihr Bau und ihr Gestein ist verschieden. Daher muß man annehmen, daß es auf alles dieses nicht wesentlich ankommt, sondern mehr auf äußere Ursachen, und diese kann man aus den Formen der schneebedeckten und der schneefreien Flächen erkennen.

Diese Formen zeigen nämlich, daß der Schnee in der Antarktis selten ruhig fällt und daß er immer durch die Winde zu Wehen geordnet wird, auch wenn er still gefallen war.

---

[1]) Vgl. O. Nordenskjöld in Schwed. Südpol.-Exped., Bd. I, S. 168 ff.

[2]) Geogr. Zeitschr., Bd. 17, 1911, S. 45 ff.

Das wird von allen Teilen der Antarktis erwähnt, von den Hochflächen des Inlandeises sowohl wie von seinen Randgebieten, von den eisfreien Felsen und vom Eis im Meer. In der Umgebung des Gaußberges fehlten die Schneewehen nirgends, und was dort im großen wie im kleinen schneefrei blieb und der Ablation unterworfen, lag zwischen den Wehen und war von diesen umgrenzt. O. Nordenskjöld[1]) hebt für die Westantarktis diesen Einfluß der Winde ganz besonders hervor, desgleichen Ferrar[2]) für das Viktorialand und Gourdon[3]) für das Grahamland. Die Winde spielen überall eine wichtige Rolle[4]), indem sie das Nährmaterial verteilen oder fortführen, auch die Verdunstung steigern und die Ablation vergrößern.

Sie wirken aber regional oder örtlich und nicht so, daß die frei gehaltenen oder abgetragenen Flächen die schneebedeckten an Größe übertreffen. Das sah man auf dem Meereis nördlich vom Gaußberg, wo die Niederschläge so reichlich waren, daß die Schneewehen im Winter gewaltig wuchsen. Die eisfreien Striche wurden immer enger und waren im Frühjahr erheblich kleiner als die schneebedeckten, und der nachfolgende Sommer hob diesen Überschuß der Ernährung nicht auf. Ähnlich war es in den beiden Ablationsgebieten auf dem Inlandeise am Gaußberg, bei denen sich die örtliche Wirkung der Winde noch darin zeigte, daß die Stärke des Schwundes innerhalb kleiner Striche verschieden war. Auch wurden sie nicht durchweg abgetragen, sondern wesentlich auf ihren Kuppen und Hügeln, während die Mulden und Becken dazwischen Schnee behielten; daraus ging eine gewundene Schichtung hervor, die ich beschrieben habe. In der

---

[1]) Schwed. Südp.-Exped. I, 1, S. 170 ff.

[2]) Nat. ant. Exped. I, S. 84 f.

[3]) Exp. ant. Franc., Géogr. phys., S. 98 ff.

[4]) Vgl. hierzu auch A. Hamberg, Die Eigenschaften der Schneedecke in den lappländischen Gebirgen. Naturwiss. Unters. des Sarekgebirges in Schwedisch Lappland, Bd. I, Abt. III, Lief. 1, Stockholm 1907. Auch F. Enquist, Der Einfluß des Windes auf die Verteilung der Gletscher. Bull. geol. Inst. of Upsala, XIV, 1916.

Westantarktis und im Viktorialande gibt es aber Flächen und Hänge, auf denen der Wind gar keinen Schnee liegen läßt. Doch wenn die Expeditionen von schneebedeckten Flächen die vielen Winderosionen im Schnee und die zahlreichen Sastrugi dazwischen erwähnen, so beweisen diese allerdings einen starken abtragenden Einfluß der Winde, doch andererseits gerade das Vorhandensein von Nährmaterial und dessen Überschuß über den Schwund, weil die Sastrugi vor allem in jungen Schneedecken gebildet werden.

Im einzelnen ist es schwer, die Niederschlagsmengen und Ablationsgrößen, sei es, daß letztere durch Schmelzung und Verdunstung oder durch die mechanische Wirkung der Winde entstehen, miteinander abzugleichen, weil es an genaueren Messungen fehlt. Die Expeditionen haben sich wohl bemüht, solche zu gewinnen, doch der Winde wegen ohne Erfolg. Sie bringen deshalb Angaben über Niederschläge und Ablation nur mit Vorbehalt oder gar nicht, doch kann man immerhin einiges daraus schließen.

So fanden die beiden Charcot-Expeditionen 376,5 mm Niederschlag im Jahre 1904/5 auf der Wandelinsel (65° 4′ s. Br., 68° 42′ w. L. Gr.)[1]) und 264,8 mm in 317 Tagen 1909 auf der Petermann-Insel, wenige Meilen südlich von jener[2]). Beide Stationen liegen vor der Westküste des Graham-Landes. Für das Meer westlich davon an der Belgica Drift schätzt Arctowski[3]) auf Grund von Messungen 2 m kompakten Schnee im Jahr, was 6—700 mm Niederschlag in Wasserhöhe bedeuten dürfte. Die Scotia-Expedition nimmt für die Süd Orkney-Inseln 1903/4 etwa 400 mm Niederschlag pro Jahr[4]) an und Barkow[5]) für das Weddellmeer zwischen 62° 20′ und 77° 40′

---

[1]) J. J. Rey in Exp. ant. Franc. Hydrogr., Phys. du globe, Paris 1911, S. 535.

[2]) J. Rouch in Deuxième Exp. ant. Franc. Observat. Meteor. Paris 1911, S. 184.

[3]) Peter. Mitt., Erg.-Heft 144, 1903, S. 85.

[4]) Scottish nat. Exp., vol. II, Edinburgh 1907, S. 274.

[5]) Veröffentl. des meteorol. Inst. Berlin, Nr. 265, S. 7.

s. Br., sowie 28° 27′ und 44° 23′ w. L. Gr. nur 97,5 mm im Jahre 1911/12. Shackleton[1]) schätzt für das Roß-Eis 1908/9 188 mm im Jahr und für Kap Royds vor dessen Nordrand 230 mm.

Ich selbst fand 1 m dicke Neueisbildung durch Schnee auf dem ebenen Eisfeld (Wakenfeld) östlich von der Gauß-Station, was etwa 800 mm Wasserhöhe an Überschuß des Niederschlags über die Ablation im Jahre 1902/3 bedeutet, und auf den Schneewehen erheblich mehr. Dabei betrug in 5 Wintermonaten, Mitte Mai bis Mitte Oktober 1902, die Ablation auf dem Inlandeise am Gaußberg 2—6 cm festen Eises, was dort etwa 18—54 mm Wasserhöhe entspricht. O. Nordenskjöld[2]) veranschlagt für Snow Hill einen Überschuß des Niederschlags über die Ablation im Betrage von 230 mm Wasserhöhe im Jahr; auch Priestly und David schätzen für Kap Royds am Roß-Eis ersteren höher als diese[3]).

Aus diesen Werten darf man schließen, daß die Niederschläge den Schwund in der Regel übertreffen. Denn die von mir gemessenen Ablationen waren wegen der örtlichen Windverhältnisse schon besonders hoch und trotzdem erheblich geringer, nicht nur als meine großen Niederschlagswerte im Gaußberg-Gebiete, sondern auch als die der anderen Expeditionen, selbst wenn man sie zur Ermittlung der Jahreswerte etwa mit 3 multipliziert[4]). Auch für das Meereis an der Belgica Drift darf man aus Arctowkis[5]) Beobachtungen entnehmen, daß der Zuwachs durch Schnee den Verlust durch Verdunstung erheblich übertrifft. Nur Barkows Niederschlagsmenge erscheint geringer als der Verlust durch Ablation, was für das Weddellmeer auch zutreffen kann. Sonst darf man für das antarktische Inlandeis meistenteils soviel Nährmaterial an-

[1]) The geogr. Journal 34, 1909, S 494, 499. Priestly und David in XI. Congrès géologique international, 1910, Stockholm 1912, S. 796 f., 798 f.

[2]) Schwed. Südpol.-Exped. I, 1, S. 142.

[3]) XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, S. 798 f.

[4]) Vgl. auch W. Meinardus in Deutsche Südpol.-Exped., Bd. III, S. 154 ff., 237 ff.

[5]) Peter. Mitt., Erg.-Heft 144, 1903, S. 85 und 93.

nehmen, daß es das überwiegt, was durch die Winde verweht werden kann oder durch Schmelzung und Verdunstung vergeht.

Es ist nun mehrfach erörtert worden, wie die Niederschläge bei dem heutigen Klima der Antarktis entstehen und ob sie in alle Teile des Kontinents gelangen können[1]). Wäre die Antarktis niedrig, würde sie ein Antizyklone mit nach außen abströmenden Winden bilden; dann wäre es schwer zu verstehen, wie die Niederschläge in das Innere kommen. Andererseits könnte bei größerer Höhe des Kontinents die von E. Brückner[2]) nach dem Vorgange A. Heims[3]) theoretisch geforderte Möglichkeit eintreten, daß das Land über eine obere Schneegrenze aufragt und daß gerade auf den Höhen kein Schnee mehr fällt. Man könnte denken, daß der erstere Fall den relativen Ernährungsmangel der Westantarktis und der zweite den des Viktorialandes erklärt, und hätte dann begründet, wie diese beiden sonst so verschiedenen Gebiete zu ähnlichen Nährmängeln kommen.

Tatsächlich spielen in der Westantarktis die Winde bei der Verteilung und auch der Verhinderung der Ernährung eine besondere Rolle, wie schon erwähnt ist, wobei es zunächst gleichgültig ist, daß sie nicht durch eine kontinentale Antizyklone, sondern durch ein Minimum im Weddellmeer entstehen[4]). Und was man von den Schneemengen des Viktorialandes weiß, könnte als Bestätigung der Heim-Brücknerschen Annahme gedeutet werden; denn die toten Gletscher Ferrars[5]), sowie die Scotts[6]) und Shackletons[7]) Beobachtungen lassen die

---

[1]) W. H. Hobbs in Zeitschr. f. Gletscherk., Bd. V, 1910, S. 107 ff. E. Philippi in Zeitschr. f. Gletscherk., Bd. II, 1907, S. 15 f. E. Gourdon in Exp. ant. Franc. 1903/5, Geographie physique, Glaciologie, S. 119 f. R. F. Scott, The Voyage of the Discovery, Bd. II, S. 425.

[2]) E. Brückner in Zeitschr. f. Gletscherk., Bd. VII, 1913, S. 276 ff.

[3]) Handbuch der Gletscherkunde, Stuttgart 1885, S. 493 ff.

[4]) W. Meinardus in Deutsch. Geographentag, Danzig 1905, S. 43. L. Mecking in geogr. Zeitschr., Bd. XIV, 1909, S. 490.

[5]) Nat. ant. Exp., Bd. I, S. 73.

[6]) The Voyage of the Discovery, Bd. II, S. 425, 432.

[7]) The geogr. Journ. 34, 1909, S. 494, 499. Priestly and David in XI. Congrès géologique international 1910. Stockholm 1912, S. 799.

Ernährung auf den Hochflächen geringer erscheinen als in den niederen Höhen am Meer. Es wäre also möglich, daß in den beiden größten Ablationsgebieten der Antarktis verschiedene Ursachen die gleichen Wirkungen haben; nur besteht in beiden nicht völliger Mangel, sondern nur eine Verminderung der Ernährung und damit des Eisbestandes.

Wie es mit diesen Niederschlagsverhältnissen aber auch sei, die Tatsachen liegen so, daß in der Antarktis, soweit man sie kennt, Schneedecken und Schneewehen, also positive Ernährungsbedingungen vorliegen, nur nicht überall gleiche. Sie sind zum Teil im Sommer günstiger als im Winter, weil der Schnee in der wärmeren Jahreszeit besser haftet und weniger verweht wird, als in der kalten[1]). Am Gaußberg waren sie im Winter reichlicher. Zu der Ernährung durch Schnee kommt die durch Rauhreif hinzu, von der alle Expeditionen berichten, doch hatte letztere an der Gauß-Station nicht entfernt die Größe der ersteren, und in den anderen Gebieten scheint es nicht umgekehrt gewesen zu sein. W. Meinardus[2]) erklärt die Ernährung der Randzonen durch zyklonale Winde, die vom nahen Meere kommen und dessen Feuchtigkeit bringen, und die des Inneren durch hohe Luftströmungen, in die das Land hineinragt; das Innere würde dann die Feuchtigkeit abfangen, welche in der allgemeinen hemisphärischen Zirkulation aus den Tropen herkommt.

Die Bewegung des Eises, durch welche die Ernährungsüberschüsse abgeführt werden, ist verschieden, doch überall klein. Ich fand am Gaußberg höchstens 11,7 m im Monat, also 0,4 m pro Tag, und das bei einem Punkt am äußeren Rande des Inlandeises nahe dem Meer, wo dieses bereits ganz oder nahezu schwimmt. Eine schnellere Bewegung geben Ferrar[3]) und Shackleton[4]) für Punkte des schwimmenden Roß-

[1]) O. Nordenskjöld in Schwed. Südpol.-Exp., Bd. I, Lief. 1, S. 136 ff. E. Gourdon in Exp. ant. Franc. 1903/5, Geogr. phys. Glaciologie, S. 91.

[2]) Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, 1, S. 323 ff.

[3]) Nat. ant. Exp., vol. I, S. 82.

[4]) The geogr. Journ., 34, 1909, S. 499.

Eises, nämlich 556 m in 13½ Monaten und 457 m in 1 Jahr, also fast 1,5 m bzw. 1,2 m pro Tag. Wo die Eintauchtiefe des Eises abnimmt, also landeinwärts, hat es nach meinen Messungen geringere Geschwindigkeiten gegeben, die mit denen der Alpengletscher[1]) von ähnlicher Dicke vergleichbar sind, und wo es dem Lande aufliegt, ganz geringe (Punkt 1 und 4—8, Tafel 15, in Deutsche Südp.-Exp., Bd. I). Diese sstellen auch Ferrar[2]), Gourdon[3]), Nordenskjöld[4]) für andere Gebiete durch indirekte Beobachtungen fest, ohne Messungen mitzuteilen. Sie sprechen auch von ganz oder nahezu bewegungslosen Bezirken, z. B. dem Eise der Snow Hill Insel. Das kontinentale Inlandeis dürfte aber meistens Bewegung haben, wenigstens in seinen Randzonen, da es Eisberge bildet und das vor ihm liegende Schelfeis preßt, wie es von allen Teilen der Antarktis berichtet wird.

Die Geschwindigkeit des Eises am Gaußberg hängt von der Dicke ab, und außerdem von der Eintauchtiefe im Meer. Je dicker das Eis ist, desto plastischer sind seine unteren Lagen, und je tiefer es eintaucht, deso mehr wird es vom Meere durchwärmt, desto leichter und umfangreicher kann es plastisch werden. Auch wird das Eis mit wachsender Eintauchtiefe immer mehr vom Wasser getragen, bietet also den von rückwärts schiebenden Kräften immer geringeren Widerstand. Das zeigt sich in der Beschleunigung seiner Bewegung. Da nun Eisdicken und Eintauchtiefen zugleich mit der Entfernung vom Berge nach Westen hin wachsen, wirken beide Momente zusammen, um die Bewegung zu steigern, wie es meine Messungen zeigen. Und den beschleunigenden Einfluß der Wärme, den das Meer bringt, ersieht man daraus, daß die Bewegungen auffallend klein sind, wo das Eis auf Land liegt,

---

[1]) H. Heß, Die Gletscher, Braunschweig 1904, S. 118 ff., besonders S. 143 f.

[2]) Nat. ant. Exp., vol. I, S. 82.

[3]) Exp. ant. Franc., S. 96 ff.

[4]) Schwed. Südp.-Exp. I. 1, S. 143 f., auch J. Gunnar Andersson in Bull. Geol. Inst. of Upsala, vol. VII, S. 54.

doch sprunghaft wachsen beim Eintritt ins Meer. Es scheint dann weniger auf die Dicke und auf die Eintauchtiefe anzukommen, als auf diese Berührung mit dem Wasser; das kann man wohl nur durch dessen erwärmenden Einfluß erklären.

Auf dem Lande ist das Eis in dem harten Klima tief durchkältet. Man sieht das an den langsamen und geringen Umwandlungen seiner inneren Struktur. Alle Expeditionen, besonders Ferrar[1]), schildern, wie der Schnee gar nicht oder nur äußerst langsam zu Eis wird. Noch manche Eisberge, also Endprodukte der Eisbewegung, bestehen nicht aus Eis, sondern nur aus verkittetem Schnee[2]). Überall sind die Korngrößen gering. Eisbrüche erhalten sich als Breccien, selbst innerhalb strömender Eismassen, ohne ihre Struktur zu verlieren. Die Umwandlung der Schichtung in Bänderung ist im Vergleich zu diesem Vorgang bei den Alpengletschern in der Antarktis sehr gering. Die äußeren Schmelzprozesse sind von kurzer Dauer, die entstehenden Wassermengen spärlich und von geringer Wirkung; sie dringen von der Oberfläche her wenig ein und noch weniger durch die Spalten zum Boden herab, da sie beim Niedersinken zu Zapfen erstarren. Kurz, alle diese Einzelheiten zeigen, daß das antarktische Inlandeis der sommerlichen Erwärmung ermangelt, die im Haushalt aller anderen Gletschergebiete, auch der grönländischen, wesentlich ist.

Auf diese Weise ist die Langsamkeit der Bewegung verständlich und auch ihre Beschleunigung beim Eintritt ins Meer, durch das die unteren Lagen Wärme und Plastizität erhalten. Und wenn man von allen Seiten der Antarktis Eisbergbildungen und Schelfeispressungen, also die Folgen von Randbewegungen, kennt, so ist es wohl schon der Einfluß des Meeres, der diese vermittelt. Die vom Meere nicht durchdrungenen Massen können teilweise passiv nachrücken, wie mein Punkt 15 (Eisbruch) westlich vom Gaußberg. Sonst wird man

---

[1]) Nat. ant. Exp., S. 85.

[2]) Priestly und David in XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, vol. II, S. 797.

für das Eis auf dem Lande tiefe Durchkältung und damit geringe oder gar keine Bewegung annehmen müssen, es sei denn, daß die Erdwärme zur Erregung der Plastizität in Betracht kommen kann.

Im übrigen wird sich die Bewegung von den dickeren zu den dünneren Teilen hin entwickeln, also von den Gebieten der Aufschüttung zu denen des Schwunds. Da aber die ersteren nicht geschlossen sind, sondern regional mit den letzteren wechseln, hat das antarktische Inlandeis nicht nur ein Entwicklungszentrum, von dem die Bewegung in einen Gletscher ausläuft oder radial nach allen Seiten, sondern viele, überall, wo der Schnee sich häuft, im Innern wie in den Randzonen. Von allen werden Bewegungen ausgehen, wenn die Temperatur darnach ist; sie können mit oder gegen einander gerichtet sein, sich verstärken oder behindern. So werden lebhafter strömende Striche mit toten Wechseln und auch Stauungen entstehen, die zu sekundären Zentren werden.

So gleicht das Inlandeis nicht einem Strom wie der Gletscher, sondern eher dem Meer, in dem sich durch äußere Kräfte Strömungen bilden, im Meer durch die Winde und im Inlandeis durch die Verteilung des Schnees. Außerdem bestimmen die Formen des Untergrundes die Richtung und die Stärke des Strömens, die eisfreien sowohl, wie in der Westantarktis und im Viktorialand, doch auch die eisbedeckten westlich vom Gaußberg. Eine Unabhängigkeit von den Landformen besteht hier trotz der Dicke des Eises von mindestens 200 m nicht, wie überhaupt nirgends, wo solche Verhältnisse bisher erörtert und beobachtet sind[1]).

Bei der geschilderten Art der Ernährung sind die Unterschiede zwischen Nähr- und End-Gebiet, wie sie ein Gletschersystem hat, in der Antarktis naturgemäß verwischt. Gerade die End- und Rand-Gebiete erhalten ja durch die zyklonalen

[1]) O. Nordenskjöld in Schwed. Südp.-Exp., Bd. I, Lief. 1, S. 115. A. de Quervain und A. Stolberg, Durch Grönlands Eiswüste, Straßburg 1911, S. 132. A. de Quervain, Quer durchs Grönlandeis, München 1914, S. 85 ff.

Winde, die vom Meer kommen, viele Ernährung, während die hohen Berge der inneren Teile freier bleiben. Man sieht deshalb die neu gekalbten Eisberge noch frisch und kurz vor ihrem Abbruch geschichtet und die Felsen der Küste von Schneeflächen umhüllt, wie es in Nährgebieten zu sein pflegt, dagegen die hohen Berge des Viktorialandes von Kehlen[1]) umzogen, wie in Endgebieten von Vereisungen. Am Gaußberg hat man beides zugleich, Anschmiegung des Schnees an der Ostseite, also Ernährung, und Kehlen, also die Zeichen des Schwundes, im Westen[2]). Die Bewegung kommt dort aus der Ferne, von Süden, um am Gaußberg zu enden, und wird kurz vor dem Ende durch Ernährung verstärkt. Im Viktorialand kommt sie aus dem nahen Gebirge und wird in diesem selbst durch Ablation geschwächt. So sind die Nähr- und End-Gebiete nicht räumlich getrennt.

In den glazialen Erscheinungen der Antarktis darf man das Bild einer Eiszeit erblicken. Ein hohes Land, auf dem sich der Schnee im Winde hält, also ein Gebirge mit Scharten und Tälern oder ein Plateau mit Hügeln und Mulden erscheint als ihr Ausgang. Von ihm verbreitet sich das Eis, wie die festen Formen es leiten. So kann es in die Tiefländer kommen, die das Hochland umgeben, und sich dort wieder sammeln, dann das Hochland umströmen und Nährwinde abfangen, die demselben vorher zukamen. Damit kann es auch von unten her weiter wachsen, zu den Höhen zurückschwellen oder anderen Erdräumen zuströmen, sei es Land oder Meer. Im Meer muß es enden, wenn es zu schwimmen und sich aufzulösen beginnt, sei es zunächst zu Schelfeis und dann zu Treibeis, oder zu diesem sogleich.

In solcher Erscheinung steht das antarktische Inlandeis heute. Es ist jetzt nicht von einem Zentrum ernährt, sondern von vielen, die ein erstes, das vielleicht im Inneren lag, abgelöst haben, und selbst wieder abgelöst werden, wenn neue ent-

---

[1]) W. H. Hobbs in Zeitschr. f. Gletscherk., V, 1910, S. 104.

[2]) Ähnliches schildert Arctowski aus der Westantarktis in Pet. Mitt., Erg.-Heft 144, 1903, S. 19 f.

stehen. Das hohe Zentrum und die tieferen Gebiete, die es umziehen, gaben die günstigsten Grundlagen für die Entstehung der Eiszeit; ein von Gebirgen umrandetes Tiefland hätte sie nicht geboten, selbst im Polarklima nicht, wie man auch an Sibirien und an Kanada sieht. Würde der Antarktis das Hochland fehlen und auch im Innern Ebene oder Tiefland sein, wären vereiste Ränder und ein freies Zentralgebiet denkbar. Zu der vollen Vereisung gehörten Klima und Orographie.

Die weitere Frage ist nun, ob die klimatischen oder die orographischen Bedingungen bestimmender sind, also die Frage nach den primären Ursachen der Eiszeit. Man kommt ihr näher, wenn man deren Schwankungen betrachtet, und die Antarktis hatte solche von zweierlei Art, einen großen allgemeinen Rückgang, der die dortige Eiszeit abschloß, und kleinere junge Oscillationen.

Über jene sind die Expeditionen einig. Arctowski[1]) war der erste, der auf einen allgemeinen Rückgang des antarktischen Inlandeises seit der Eiszeit und sein beträchtliches Ausmaß hinwies. Alle späteren Expeditionen haben seine Ansicht bestätigt[2]). Wir fanden am Gaußberg, daß der 371 m hohe Gipfel in der Vorzeit vom Eise überströmt war, während der Eisrand heute an der Südseite des Berges bei 130 m Höhe und im Norden im Meeresniveau liegt. Er hat sich also um 240 m gesenkt und mindestens um diesen Betrag, doch wohl erheblich mehr muß die Eisdicke abgenommen haben. Größere Rückgänge werden in der Westantarktis[1]) und von Shackleton[2]) im Viktorialand gefolgert. Ich habe aus der Verteilung der Moränen auf dem Gaußberg geschlossen, daß der Rückzug ohne Pausen erfolgte, da er sonst Moränen zurückgelassen haben müßte und

[1]) Exp. ant. Belge, Geologie, Anvers 1908, S. 59 ff.; C. R. de l'ac. des sciences, Paris, 27. Aug. 1900; Pet. Mitt., Erg.-Heft 144, 1903, S. 10.

[2]) J. Gunnar Andersson in Bull. Geol. Inst. of Upsala, vol. VII, S. 54 f. Ferrar in Nat ant. Exp., vol. I, S. 94, 99. Gourdon in Exp. ant. Franc. Geogr. phys., S. 116 ff. Shackleton in The geogr. Journ. 34, 1909, S. 483. Priestly und David in XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, S. 788 ff.

nicht die lockeren Streuungen von erratischen Blöcken, wie man sie sieht[1]).

Eine Folge des allgemeinen Rückgangs sind auch die Schelfeismassen, die ich besprochen und als Inlandeisrelikte gedeutet habe. Dabei ist es gleichgültig, ob sie wirklich noch alte, eiszeitliche Inlandeisstücke sind, die sich dort bis heute erhielten, oder ob solche mit der Zeit verschwanden und durch nachdrängende Inlandeismassen ersetzt wurden, was wahrscheinlicher ist. Im ersten Fall wären die Relikte dadurch entstanden, daß das Inlandeis an Ort und Stelle durch den Schwund beim Rückgang so viel an Dicke verlor, daß es nicht mehr am Boden aufliegen konnte und zum schwimmen kam, im zweiten durch nachdrängendes Inlandeis, das in Eisberge zerbrach, die durch Bänke und Untiefen am Abzug gehindert wurden. In beiden Fällen darf man von Relikten sprechen, im ersten direkt und im zweiten, weil sie die in der Eiszeit vorhandenen Inlandeismassen ersetzen. Da diese mindestens 240 m dicker war wie jetzt, konnten sie an vielen Stellen des Schelfmeers auf dem Boden liegen, wo es jetzt nicht mehr geht. Ähnlich ist es beim Roß-Eis.

Über die Inlandeis-Oscillationen der Gegenwart sind die Ansichten geteilt. Ich schließe aus den Moränen an der Westseite des Gaußbergs auf einen geringen jungen Rückzug mit Pausen[2]). Für die Westantarktis liegen keine bestimmten Nachrichten vor[3]), dagegen für das Viktorialand die Annahme steten Rückgangs[4]). So wird man für zwei weit voneinander entfernte Gebiete mit einem solchen rechnen dürfen, und sollte er in der Westantarktis nicht vorhanden sein, würde die heutige Oscillation nur ähnlich erscheinen, wie die Schwankungen anderer Gletschergebiete, die auch nicht überall gleich

[1]) Deutsche Südp.-Exp., Bd. II, S. 35 f.

[2]) Deutsche Südp.-Exp., Bd. II, S. 35.

[3]) O. Nordenskjöld in Schwed. Südp.-Exp., I, 1, S. 153, 170.

[4]) Ferrar in Nat. Ant. Exp., I, S. 94. Shackleton in The geogr. Journ. 34, 1909, S. 494.

sind[1]). Bei der großen Ausdehnung der antarktischen Vereisung und der Vielseitigkeit ihrer Ernährung wäre das leicht zu verstehen.

Der große allgemeine Rückgang dürfte der gleiche sein wie in anderen Erdräumen seit der Eiszeit, wenn es auch nicht möglich ist, darüber Sicherheit zu gewinnen. Wenn man aber die Verwitterungserscheinungen auf dem Gaußberg, die nach dem Rückgang des Eises entstanden sind, mit denen in anderen alten Gletschergebieten, besonders in Grönland und in Skandinavien, vergleicht, so scheinen sie nach Größe und Art nicht wesentlich verschieden zu sein, also auch die Zeiten nicht, in denen sie entstanden. Somit würde die Gleichzeitigkeit der Vereisungen und ihrer Rückgänge über die ganze Erde hin folgen, weil sie in den beiden weit entfernten Polargebieten gleichzeitig waren, und damit auch die Gleichheit und allgemeine Geltung ihrer Ursachen. Schon die antarktische Eiszeit ist eine so einheitliche und ausgedehnte Erscheinung gewesen, daß sie weit wirkende Ursachen zur Voraussetzung hat.

Diese braucht man sich aber nicht als Katastrophe zu denken. Denn W. Meinardus[2]) hat berechnet, daß die Eisausfuhr durch Bewegung und Eisbergbildung im ganzen Umfang der Antarktis bei einer jährlichen allgemeinen Niederschlagshöhe von 40 mm Wasser auf dem Kontinent gedeckt werden kann. Dabei ist die Eisbewegung nach meinen Messungen zu 150 m pro Jahr angenommen, also als Mittel für den ganzen Umkreis des Inlandeises erheblich zu groß, so daß der errechnete Betrag von 40 mm entsprechend zu groß ist. Die Fläche, auf welcher die Niederschläge fallen, ist so gewaltig, daß eine erhebliche Ausfuhr zustande kommt, auch wenn die mittleren Niederschlagsmengen nur gering sind. Und noch kleiner, in der nächsten Größenordnung kleiner, können die Niederschlags-Schwankungen sein, die den Eisrand vor-

[1]) H. Heß, Die Gletscher, S. 285 f. A. Woeikof in XI. Congrès géologique international, 1910, Stockholm 1912, I, S. 391 ff.

[2]) Sitzungsbericht d. Med.-naturw. Gesellschaft Münster 29. Juli 1910.

rücken oder zurückgehen lassen. Es wäre denkbar, daß diese sich schon durch die wechselnde Verteilung des Schnees durch die Winde erklären.

Dazu kommt, daß die Niederschläge nicht gleichmäßig über den ganzen Kontinent verteilt sind, sondern regional. Deshalb können die fallenden Schneemengen etwa in den inneren Teilen der Antarktis geringer sein oder auch fehlen, ohne daß die Eisbergbildung abnehmen muß, wenn nur zu gleicher Zeit die Randzonen entsprechend höher ernährt sind, wie es bei ihren zyklonalen Winden möglich erscheint. Der Rand würde dann konstant sein bzw. auf Grund seiner eigenen Ernährungsverhältnisse örtlich vor oder zurück gehen, während das Innere abnimmt. Vielleicht sind die toten Gletscher Ferrars[1]) am Ostrand der Royal Society Kette und das schneearme Hochgebiet Shackletons[2]) ein Zeichen dafür, daß dem so ist, wenn auch eine wirkliche Abnahme der innerantarktischen Vereisung schwer zu beweisen sein wird. Jedenfalls haben die geringen randlichen Schwankungen, wie sie z. B. am Gaußberg auftreten, keinen allgemeinen Vorgang, also keine Klimaänderung, zur notwendigen Voraussetzung.

Der große allgemeine Rückgang seit der Eiszeit bedarf aber der allgemeinen Begründung, wie überall, und diese betrifft die Ursachen der Eiszeit.

Wie die Mehrzahl der Forscher nehme ich an, daß die Eiszeit gleichzeitig die ganze Erde betraf. Der Hauptgrund liegt in der Verbreitung ihrer Spuren durch alle Zonen und in der Gleichartigkeit dieser Spuren nach Art und Gestalt, sowie nach ihren Umwandlungen seit der Eiszeit. Freilich ist die frühere Ausbreitung des Eises in den verschiedenen geographischen Breiten und Längen verschieden gewesen, hat regional auch gefehlt, doch zweifellos war sie sehr groß und fand unter den verschiedensten terrestrischen Bedingungen statt. Deshalb muß sie auch allgemeine Ursachen gehabt haben und

[1]) Nat. ant. Exp., vol. I, S. 73 und Karte.

[2]) The geogr. Journ. 34, 1909, S. 494. Priestly und David, XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, S. 791, 799.

kann durch terrestrische Vorgänge nur im einzelnen beeinflußt und ausgestaltet gewesen sein[1]).

Freilich lernt man den Einfluß der terrestrischen Bedingungen, vor allem der Erdformen auf die Entwicklung der Gletscher um so höher bewerten, je mehr man ihnen nachgeht. Die orographische Schneegrenze Ratzels tritt dann gegen die klimatische immer bedeutsamer hervor, schon weil jene unmittelbar durch Beobachtung festgestellt wird, während diese meist nur gedacht ist und auf mehr oder weniger komplizierten Ableitungen beruht[2]). Sie spielt in der Entwicklung der Gletscher im einzelnen eine kleinere Rolle als die orographische.

Auch die Antarktis zeigt das. Denn die klimatische Schneegrenze liegt dort im Meeresniveau oder tiefer, weil der Schnee sich des Klimas wegen überall so tief zu halten vermag, doch aus anderen Gründen bleibt er in manchen Gebieten schon weit darüber nicht mehr liegen[3]), gerade auf den Höhen nicht. Im kleinen sieht man das an den Eisbergen, deren Oberflächen frei zu bleiben pflegen, während ihre Wände von Schnee umhüllt werden; sie wachsen nach der Seite, nicht nach der Höhe. Die orographische Schneegrenze ist in solchen Fällen über die klimatische hinauf gerückt, nicht unter sie hinab wie in den Scharten und Tälern der Alpen; die Landformen und ihr Verhältnis zu den Winden haben das veranlaßt und damit auch das Auftreten des Eises im einzelnen[4]). Dieser Einfluß der Winde wurde schon vorher betont.

Doch für die Entwicklung im großen können nur allgemeine Ursachen maßgebend sein, vor allem tiefe Temperaturen, bei denen die Niederschläge als Schnee und nicht als Regen

[1]) E. Brückner in XI. Congrès géologique international 1910, Stockholm 1912, vol. I, S. 380 f.

[2]) H. Heß, „Die Gletscher", Braunschweig 1904, S. 50 f., 68 ff.

[3]) H. Arctowski in Exp. ant. Belge, Géologie, Les Glaciers, Anvers 1908, S. 39. Gourdon in Exp. ant. Française, Géographie physique-Glaciologie, S. 74.

[4]) Vgl. hierzu die interessanten Schilderungen A. Wegeners in Meddelelser om Grönland 46, 1, S. 57; sowie F. Enquist in Bull. geolog. Institut of Upsala, vol. XIV, 1916.

fallen, sowie die Häufung von Schnee, also reichliche Niederschläge, damit er sich hält und zu Gletschern und Inlandeis wird. Diese beiden Grundbedingungen sind klimatisch. Sie können durch die Höhenlage oder durch die Erdformen ersetzt oder begünstigt sein, und so zu orographischen werden, doch nicht allgemein, d. h. nicht auf großen und ganz verschieden gestalteten Gebieten der ganzen Erde zugleich. Schon jeder Kontinent hat sowohl Höhen wie Tiefen und damit orographisch nur teilweise die Möglichkeit der Vereisung, wenn er nicht in einem alles vereisenden Klima, also innerhalb der Polarzone liegt. Das Eis kann noch von seinen Höhen zu den Tiefen strömen und hier Gebiete überziehen, die ihm ursprünglich nicht bestimmt waren, soweit es das Klima zuläßt. Doch nur ein polarer Kontinent, wie die Antarktis, vereist von der Tiefe aus, wie von der Höhe, und nur deshalb so allgemein. Es hängt also vom Klima ab, wie groß und allgemein die Vereisungen werden. Die Orographie wirkt mit, doch das Klima ist das primäre.

Das gleiche gilt für die großen Veränderungen in der Ausdehnung des Eises, wie es die Eiszeit und ihr Rückgang gewesen sind; denn auch diese fanden nicht nur in allen geographischen Breiten, sondern auch auf allen Erdformen statt, auf Höhen und Tiefen, Plateaus und Niederungen, Kämmen und Tälern, Kuppen und Becken. Auch in der Antarktis sind die Landformen so verschieden wie möglich, auf denen sich das größere Eis entwickelte und mit der Eiszeit wieder zurückging. Allen war und ist nur das Klima gemein, wie es die circumpolare Lage des großen Landes bestimmt, und seine Beziehungen zu den Meeren, die es umgeben. So muß man die Gründe für das Ende der Eiszeit auch in der Antarktis in klimatischen Vorgängen suchen.

E. Brückner sieht in Schwankungen der Temperatur die Ursache der heutigen Oscillationen, wie auch des Entstehens und Vergehens der Eiszeit[1]), weil die Temperatur nur

[1]) A. a. O. (siehe Anm. 1, S. 30), S. 388, 402. Auch „Die Alpen im Eiszeitalter“, S. 1145 f.

wenig (in den Alpen 5°) tiefer zu werden braucht, um das Maximum der Eiszeit entstehen zu lassen, und umgekehrt. Eine solche allgemeine Abnahme der Temperatur wäre denkbar, während — seiner Ansicht nach — ganz unwahrscheinliche Steigerungen der Niederschlagsmengen notwendig wären, um ohne Senkung der Temperatur die Eiszeit zu erklären.

In der Antarktis liegen diese Verhältnisse anders. Da die Temperatur dort an sich so tief ist, daß die Niederschläge fast alle als Schnee fallen, können weitere Abkühlungen für eine Vermehrung des Eises nur wenig oder gar nichts bedeuten. O. Nordenskjöld[1]) berichtet sogar, daß das Eis auf der Snow Hill-Insel in der wärmeren Jahreszeit mehr wächst als im Winter, und Scott[2]), Philippi[3]), Gourdon[4]), sowie Priestly und David[5]) sprechen davon, daß die antarktische Eiszeit eine Hebung, nicht eine Senkung der Temperatur zur Voraussetzung hätte. Ob dieses richtig ist, sei zunächst dahingestellt. E. Philippis Annahme, der auch E. Brückner[6]) folgt, daß die maximale Eisentwicklung nicht auf dem antarktischen Kontinent, sondern nördlich von ihm zu suchen sei, ist nicht genügend belegt und erscheint auch nicht richtig, da durch die Polfahrten von Shackleton, Scott und Amundsen die fast völlige Vereisung des Inneren gezeigt ist und von den Randgebieten schon vorher bekannt war, daß sie nicht minder vereist sind wie die Inseln nördlich davon. Für Nordenskjölds Ergebnis sprechen aber auch andere Beobachtungen, und meinem Satz (Zeile 8 ff. dieser Seite) dürfte nicht zu widersprechen sein.

Dadurch rückt die Bedeutung der Niederschläge für die Entwicklung der Eiszeit in den Vordergrund, zunächst für die Antarktis. Nach W. Meinardus[7]) bedarf es bei der Größe des Landes nur 40 mm Niederschlag in Wasserhöhe an

---

[1]) Schwed. Südp.-Exp., Bd. I, Lief. 1, S. 139.
[2]) The Voyage of the Discovery, vol. II, S. 425.
[3]) Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. II, 1907, S. 18.
[4]) Expédition antarctique Française, Géogr. phys.-Glaciologie, S. 71.
[5]) XI. Congrès géolog. international 1910, Stockholm 1912, S. 799 f.
[6]) A. a. O. (siehe Anm. 1, S. 30), S. 384. [7]) S. Anm. 2, S. 28.

Schnee pro Jahr, um den Verlust des Inlandeises durch Bewegung und Eisbergbildung zu decken. Wenn man nun annimmt, daß die frühere Vereisung etwa doppelt so dick war als die heutige, wie es am Gaußberg der Fall gewesen sein kann, würden 80 mm Niederschlag zur Eisbilanz genügt haben, wahrscheinlich weniger, weil der Betrag von 40 mm zu groß ist, und weil die Bewegung und das Abstoßen von Bergen jedenfalls langsamer wächst, als die Dicke des Eises; zur Ernährung der doppelten Dicke würde deshalb weniger als die doppelte Niederschlagsmenge genügen.

Dabei hätte man den Ersatz für die frühere Ablation der niedrigen Temperaturen wegen nicht größer zu denken als heute, zumal die Flächenausdehnung des Inlandeises damals nur wenig größer war; es konnte ja kaum über die Grenzen des jetzigen Schelfeises hinaus, weil jenseits derselben das tiefe Meer beginnt, in welchem die Auflösung der Vereisung in Berge erfolgt. Die frühere Ablation dürfte sogar geringer gewesen sein, als jetzt, da es damals mehr schneeige Niederschläge gab, die sie beschränkten. Also würde sich der Gesamtbedarf an Schnee für die Bilanz des Inlandeises zur Eiszeit auf ein plus von höchstens 40 mm Wasserhöhe im Jahr gegen heute belaufen.

Zu diesem Betrag würden die Niederschläge langsam und allmählich anwachsen können, um die Eiszeit entstehen zu lassen, etwa durch die Bildung neuer und stärkerer Windwehen hier und dort, wo sie Halt finden und dann ihrerseits Halt für neue Windwehen bieten. Man wird sich den Vorgang als eine Steigerung der jetzigen Umlagerungen durch die Winde vorstellen dürfen, von vielen Zentren her, also als ein allmähliches Wachsen des Eises aus sich selbst heraus. Einer Temperatur-Erniedrigung bedarf es dazu nicht, sondern nur der nicht viel gesteigerten Niederschläge an Schnee. Dieses Ergebnis ist anders, als das von E. Brückner zur Erklärung der Eiszeit der Alpen.

Ich glaube freilich auch nicht, daß diese letztere zutrifft. Ihr Gedankengang ist der folgende[1]):

---

[1]) Penck und Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter, S. 1142 ff.

Die heutigen Firnfelder der Alpen waren in der Eiszeit nicht voller wie jetzt; also entstand dieselbe aus einem Anschwellen der Gletscherzungen, dieses, weil die Abschmelzung damals geringer war als jetzt, und das, weil die Temperatur niedriger war. Damit wird eine Erniedrigung der Temperatur als die Ursache der Eiszeit gefordert; eine Steigerung der Niederschläge ohne Temperatursenkung wird als Ursache abgelehnt, weil die Firnfelder über der heutigen Schneegrenze nicht voller gewesen wären, und weil unterhalb derselben die Vermehrung des schneeigen Niederschlags auf Kosten des flüssigen bis zu 11—14 m Wasserhöhe betragen haben müßte, um die Ablation auszugleichen. Dieses scheine unmöglich hoch und auch mit dem Verhältnis der eiszeitlichen Schneegrenze zur heutigen nicht in Einklang zu stehen.

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß die Firnfelder doch voller gewesen sein können als jetzt, auch wenn man über den heutigen Grenzen des Firnstandes keine früheren höheren findet. Denn die Häufung des Schnees findet nicht an den steilen Wänden der Firnmulden statt, sondern an ihren flachen Böden; auch können die höheren Grenzen verschwunden sein, weil sie leicht zerstörbar sind. Ferner ist zur Steigerung des Firnstandes unter der heutigen Schneegrenze bei gleichen Temperaturen wie jetzt keineswegs eine Vermehrung der schneeigen Niederschläge bis auf 11—14 m zu fordern; denn dieses ist ein Maximalwert, dessen es — seine Richtigkeit vorausgesetzt — erst unten an der eiszeitlichen Schneegrenze im Tale bedurft hätte, um die Gletscher zur Eiszeit anschwellen zu lassen, also an der tiefsten Stelle, wo der Schnee sich halten mußte. Auf den Höhen nebenan und im Tale aufwärts würden kleinere Vermehrungen genügt haben, nämlich ein gegen die heutige Schneegrenze abnehmender Zuschlag zu den jetzigen Beträgen und ein geringer an dieser selbst.

Schon wenn dieser geringe Zuschlag erfolgte, würden sich die Schneegrenzen allmählich senken und die Gletscher schwellen müssen, und die Folge davon würden weitere Senkungen und Schwellungen sein. So würde sich die Eiszeit allseitig vortragen,

von vielen Stellen her, wie es die antarktische tat und noch heute durch die Windwehen tun kann. Es bedarf dann auch in den Alpen keiner primären Temperatursenkung, sondern nur der langsamen Steigerung des Niederschlags, wie es für die Antarktis zu fordern ist, wo die Abkühlung der an sich niedrigen Temperaturen eher das Gegenteil zur Folge haben würde, als die Entwicklung zur Eiszeit.

Die Vermehrung der Niederschläge muß aber auf der Erde allgemein gewesen sein, weil die Eiszeit es war, also ein großer klimatischer Vorgang. Orographische oder geotektonische Ereignisse von derselben Wirkung wird man sich schwerlich vorstellen können, schon allein für den antarktischen Kontinent nicht mit seinen verschiedenen Formen und Höhen. Leichter ist es zu denken, daß die Nährquellen des antarktischen Eises, also die Niederschläge der zyklonalen Winde am Rand und der hohen Luftströmungen im Inneren, langsam wuchsen und das Inlandeis schwellten, als die Folgen oder als Teile einer Klimaschwankung, welche die ganze Erde betraf.

Wie diese kam und im einzelnen aussah, sei hier nicht erörtert. Es ist anzunehmen, daß es sich um gleichzeitige Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks und der Niederschläge gehandelt hat, da diese voneinander abhängen; hierin kann man E. Brückner[1]) zustimmen. Nur daß die Schwankungen der Temperatur das primäre gewesen sein sollen, halte ich nicht für richtig; für die Antarktis wenigstens kam es nicht darauf an, sondern auf Vermehrung der Niederschläge[2]), und für das gleiche und gleichzeitige Phänomen in anderen Erdräumen wird man dann nicht andere Ursachen

---

[1]) E. Brückner, a. a. O. (siehe Anm. 1, S. 30), S. 388.

[2]) Priestly und David heben dieses auch hervor, kommen aber zu dem Schluß, daß die Eiszeit in den verschiedenen Erdräumen nicht gleichzeitig war, weil sie nicht zu gleicher Zeit verschiedene Ursachen gehabt haben wird. Ich kann diesem Schluß nicht zustimmen, sondern meine, daß die Eiszeit überall eine Vermehrung der Niederschläge zur Voraussetzung hatte und daß es auch für die Alpen keiner primären Abkühlung bedurfte.

annehmen dürfen, zumal die der Antarktis auch für nichtpolare Breiten genügen.

Die von Scott[1]), Philippi[2]) und Hobbs[3]) erörterte Schwierigkeit, wie die Niederschläge in den Kontinent hinein gelangten, was schon bei den heutigen Verhältnissen schwierig sei, geschweige denn bei einer eiszeitlichen Temperatursenkung, beruht auf der Vorstellung der antarktischen Antizyklone mit radial ausströmenden Winden. Seit man aber von den großen Höhen der Antarktis weiß[4]), welche die Bildung einer Antizyklone über dem Inneren ebenso ausschließen wie über Hochasien, fällt diese Schwierigkeit fort, da die zyklonalen Winde der Randzonen und die hemisphärischen der höheren Luftschichten die vermehrten Niederschläge in der Eiszeit ebenso zuführen konnten wie jetzt die heutigen[5]).

Die Eiszeit wird in der Antarktis kein wesentlich anderes Aussehen gehabt haben wie ihr heutiges Inlandeis. Manche freien Landformen waren noch überdeckt, doch nicht alle, wie sowohl aus der Westantarktis wie vom Viktorialande berichtet wird. Der Gaußberg war überströmt und bildete einen Spaltenhügel, wie man sie jetzt in den Eisflächen westlich von ihm sieht. Ein Unterschied gegen heute lag in der horizontalen Verbreitung und in der Einbeziehung des Schelfeises ins Inlandeis, von dem es jetzt getrennt ist. Auch die großen Buchten des Roß- und des Weddell-Meeres waren weiter als jetzt vom Eis erfüllt, doch über die Grenzen des Schelfs konnte es nicht hinaus gehen, da es dort schnell zu tief wird.

Die frühere Vereisung war also auch von den Landformen abhängig, wie es die heutige ist, die man darnach gegliedert

1) The Voyage of the Discovery, vol. II, S. 425.

2) Zeitschrift für Gletscherkunde, II, 1907, S. 17 f.

3) " " " , V, 1910, S. 110 ff.

4) W. Meinardus in Pet. Mitt. 1909, XI, S. 304 ff., 355 ff., sowie in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, 1, S. 329 ff.

5) W. Meinardus in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, S. 334 ff. W. H. Hobbs in Zeitschrift für Gletscherkunde, V, 1910, S. 116 ff.

hat. Durch O. Nordenskjöld[1]), Gourdon[2]) und Ferrar[3]) sind antarktische Eistypen aufgestellt worden, die in Einzelheiten voneinander abweichen, doch alle auf den Landformen beruhen, die das Eis überlagert. Erschöpfende Klassifikationen sind es nicht, da im Grunde jede Landform eine eigene Eisform bedingt, wenn das Eis so dünn ist, daß sie sich darin markiert. Je mächtiger es ist, desto mehr werden verschiedene Landformen in einem Eistyp zusammengefaßt. Die Unterscheidungen werden also mit der zu und abnehmenden Dicke des Eises gemindert oder vermehrt.

Bei dieser Sachlage komme ich auf jene grundlegende Gliederung der Gletscherformen zurück, die von A. Heim[4]) aufgestellt wurde und der im wesentlichen auch E. Werth[5]) gefolgt ist. Sie gründet sich auf die allgemeinen Beziehungen der Nähr- und der Abfluß-Gebiete des Eises zu den Landformen, nicht auf deren Einzelzüge, und wurde von mir schon früher[6]) in folgender Weise gegeben:

1. Eisbildungen mit aufgelöstem Nähr- und aufgelöstem Abfluß-Gebiet, A. Heims alpiner Typus, Firnmulden und Gletscherzungen.
2. Eisbildungen mit gemeinsamem Nähr- und aufgelöstem Abfluß-Gebiet, A. Heims norwegischer Typus, Hochlandeis und Gletscherzungen.
3. Eisbildungen mit aufgelöstem Nähr- und gemeinsamem Abfluß-Gebiet, Firnmulden und Vorlandeis.
4. Eisbildungen mit gemeinsamem Nähr- und Abfluß-Gebiet, A. Heims grönländischer Typus, Inlandeis.

Der vierte Typus beherrscht die Antarktis. Denn wenn dort auch teils durch übereiste Landformen, wie westlich

---

[1]) Schwed. Südp.-Exp., I, 1, S. 178 ff.

[2]) Exp ant Franc. Geogr. phys.-Glaciologie, Paris 1908, S. 100 ff.

[3]) Nat. ant. Exp., vol. I, S. 63 ff.

[4]) Handbuch der Gletscherkunde, Stuttgart 1885, S. 55 ff.

[5]) E. Werth in Bd. II dieses Werkes, S. 123.

[6]) E. v. Drygalski in Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., Math-phys. Klasse, XXV, 7, 1911, S. 25.

vom Gaußberg, teils durch eisfreie Berge und Täler oder Meeresbuchten und Sunde sowohl in den Nähr- wie in den Abfluß-Gebieten Gliederungen und Auflösungen, und damit Entwicklungen der anderen drei Typen erfolgen[1]), so besteht doch kein Zweifel, daß im Grunde alles zusammengehört, alles zu dem einen großen Inlandeis des Kontinents, das in dem antarktischen Klima überall entsteht und ernährt wird, sich auch überall weiter entwickeln, sich auflösen und wieder vereinigen kann.

Denn die Winde, welche die Entwicklung im wesentlichen bedingen, und die Schneewehenbildung, in der sie sich vollzieht, folgen freilich im großen bestimmten Richtungen, in denen das Inlandeis wächst, doch im einzelnen allen. Jedes äußere Hindernis kann die Richtung der Wehen verändern, so ein Eisberg im Meereis, ein Fels oder eine Scharte auf dem Lande oder ein zufälliger Riß in den Wehen selbst. Sie können dann Höhen überwachsen[2]) oder Täler erfüllen oder Vorländer übereisen; sie können Eisberge verbinden und Sunde überbrücken und Inseln an das Land schließen. Was jetzt getrennt liegt und deshalb als besondere Eisform erscheint, kann bald zum großen ganzen gehören, und was vereint ist, kann abgetrennt werden. Es ist alles von gleicher Art und in gleicher Weise entstanden durch Schneefall und Wind, und alles wird Inlandeis, ob verbunden oder getrennt, ob strömend oder bewegungslos, ob wachsend oder schwindend, ob auf Höhen oder im Vorland; alle Formen und Arten des Eises sind Teile des ganzen, Glieder des einen großen Körpers, mit dem sie bestehen und vergehen, immer aber auch nach den Landformen gestaltet, je nach ihrer Dicke in verschiedenem Grad.

Erst das Meer gibt die Grenzen, wo sein Boden zu Tiefen absinkt, in denen das Eis nicht mehr aufliegen kann, sondern schwimmen muß; das ist an der Böschung zwischen

---

[1]) O. Nordenskjöld in Schwed. Südp.-Exp. I, 1, S. 115.

[2]) Gourdon in Exp ant. Française, Géographie phys.-Glaciol., S. 100.

Tiefsee und Schelf. Bis dahin gibt es flachere Stellen, wo das Eis aufliegen kann, und es hängt nur von seiner Mächtigkeit ab, wie weit das geschieht, während auf der Böschung jede Dicke dafür versagt. In der Eiszeit war diese größer als jetzt, also war auch die Verbreitung im Schelfmeer größer; dann schwand mit der Eiszeit die Dicke dahin und die den Tiefen nicht mehr gewachsenen Massen sind zum schwimmen gekommen.

Das ist das Schelfeis, ein Relikt aus der Eiszeit, nicht weil die heutigen Massen noch aus der Eiszeit stammen, sondern nur in dem Sinne Relikt, weil sie vielfach liegen, wo beim Rückgang der Eiszeit die äußeren durch Schwund verdünnten Teile zum schwimmen kamen. Die eiszeitlichen Massen selbst dürften im Laufe der Zeiten vergangen sein oder in tieferes Meer gedrängt, zu Bergen aufgelöst und davon getrieben; doch durch die vom Inlandeis nachgeschobenen Massen sind sie ersetzt. Es ist früher erörtert, warum sie zusammenhalten. Es liegt an den Bänken und Untiefen des Schelfmeeres, auf denen die Eisberge stranden; in anderen Erdräumen liegt es auch an übermeerischen Landformen, wofür das schwimmende Inlandeis A. Wegeners ein schönes Beispiel gibt[1]).

An der äußeren Grenze des Schelfeises beginnt das Treibeis, jenes wechselnde Gemenge von Schollen und Bergen, das zunächst nur von Waken und Rinnen durchteilt wird, weiter nördlich ausgefasert und schließlich aufgelöst ist und sich um die ganze Antarktis legt. Es hat sehr verschiedene Breiten, die innen im Süden, wenn das Schelfeis fehlt, wie östlich vom Gaußberg, am Rande des Inlandeises beginnt, sonst am Rande des Schelfeises. Die Ausdehnung nach Norden hängt für die Schollen wesentlich von den Winden ab, welche die Kanten ausfasern, und für die Berge von den Meeresströmungen, welche sie einzeln bis in die niederen Breiten des Kaps der guten Hoffnung und der subantarktischen Inseln entführen[2]), bis-

[1]) J. P. Koch und A. Wegener in Meddelelser om Grönland, 46, 1. Kap., I und Taf. V.

[2]) K. Fricker, Antarktis, S. 205, 208 und Karte. O. Krümmel, Ozeanographie, Bd. I, 1907, S. 518, 525.

weilen auch in Schwärmen und in solche Gebiete, die für gewöhnlich davon frei sind, z. B. Kerguelen[1]).

Der äußere Rand des geschlossenen Treibeisgürtels, der um den 65° s. Br. liegt, hängt von der Grenze der festen Eisbildungen bzw. von der Lage der Küste ab, wie ich ausgeführt habe, desgleichen die Waken und Straßen, die durch ihn hindurchführen. Die herrschenden Winde, die von den Küsten abstehen, halten diese frei und umbauen die anderen, gegen die sie gerichtet sind. Die freie Ost- und die blockierte West-Küste des Weddell-Meers[2]), sowie die freie Ostseite der Posadowsky-Bai sind Beispiele dafür. Dabei können die von den Rändern des festen Eises abstehenden Winde die dort abgelösten Berge und immer wieder neu gebildeten Schollen dauernd entnehmen und in ihrer Richtung verteilen. So entstehen die Ausbiegungen der Kanten des geschlossenen Gürtels, wie ich sie schilderte, und zwischen ihnen Buchten, wo diese Zufuhr fehlt. Man kann aus dem allgemeinen Verlauf der äußeren Grenzen auf die Umrisse des festen schließen, die dahinter liegen. Nur die Einzelzüge der Treibeiskanten und ihre Ausfaserungen ins freie Meer dürften zufällig sein, nämlich durch die wechselnden Winde und Driften bedingt.

Wie weit die Lage der Kanten des geschlossenen Gürtels von der Jahreszeit abhängt, ist noch nicht zu entscheiden. Da die Winde und die Strömungen im Sommer wie im Winter gewaltige Massen von Bergen und Schollen zur Verteilung finden, dürfte die Abhängigkeit beschränkt sein. Andererseits ist aber der Treibeisgürtel im Sommer so erheblich gelockert, schon nach den Bewegungen des Meeres zu schließen, die dann weit kräftiger bis zum Inlandeis dringen wie im Winter, daß man auch eine stärkere Auflösung der äußeren Kante annehmen darf[3]).

Über die Dichte und Beschaffenheit des Treibeises habe ich früher berichtet. Jene wechselt mit den Winden, die das

[1]) L. E. Dinklage in Ann. d. Hydrographie, Mai 1897.
[2]) L. Mecking in Deutsche Südp.-Exp., Bd. III, 2, Berlin 1911, S. 119.
[3]) H. Arctowski in Expéd. ant. Belge, Océanogr., Anvers 1908, S. 44.

Eis zusammenschieben, während es bei Stille zerfällt. Dabei kommt es zu Packungen weniger als im nördlichen Eismeer, weil es im Süden an festem Land und damit an Widerlagern fehlt, gegen die das Eis gestaut und gepreßt wird; es strahlt von seinen südlichen Ursprungsstätten am Inlandeis und am Schelfeis radial ins freie Weltmeer hinaus. Deshalb sieht man im Süden mehr die mit Trümmern umwulsteten Fladen, als die aufeinander getürmten und aufgerichteten Schollen.

Die Beschaffenheit des Treibeises wechselt. Überall trifft man Berge und Schollen, außen wie innen, nur nimmt die Zahl der ersteren relativ nach außen hin ab, wo nicht gerade Schwärme von Eisbergen erscheinen. Überall trifft man dickere und dünnere Schollen, beide meist in Gruppen gesammelt, und überall auch Eisbrei oder Gasch, wie er durch das Reiben und Drängen der Schollen aneinander entsteht. Man kann nicht sagen, daß die Dicke der Schollen nach außen durchschnittlich abnimmt, da Gruppen der schwersten Schollen bis zur Kante erscheinen. Eher könnte es sein, daß wesentlich immer zwei Schollenstärken zu sehen sind, die ganz schweren, welche innen in fester Lage entstanden und sich nach dem Aufbruch ihrer Felder lange und wenig verändert erhalten, und die dünnen leichten, die im Treibeis selbst zwischen den dicken Schollen entstehen und frühe vergehen. Es ist aber nicht möglich, über die Mengen dieser beiden Schollenarten und etwaige Zwischenstadien nähere Angaben zu machen.

Will man nun das gesamte Eis des Südens nach seinen verschiedenen Eigenschaften zur Übersicht ordnen, so kommt man zu umstehendem Bilde.

Man kann die Reihen desselben gewiß noch vermehren, doch dürften sie schon jetzt die Zusammenhänge aller Eisbildungen des Südens zeigen, und im besonderen das Schelfeis als Übergangsform.

Die Eigenschaften dieses Schelfeises gliedern es teils an das Inlandeis und teils an das Treibeis an, ohne daß es ganz zu dem einen oder dem andern gehört. Es hat den gleichen Zwischencharakter, der dem Schelf und dem Schelfmeer selbst

zwischen dem Kontinent und der Tiefsee zukommt, also zwischen dem Herrschaftsgebiet des Landes und des Meeres, zwischen diesen beiden größten Kontrasten der Erde. Wie das Schelfmeer und der Schelf gehört auch das Schelfeis nach seiner Entstehung zum Lande und nach seiner Erscheinung zum Meere, und es stellt, weil es Eis ist, den Übergang des festen zum flüssigen auch seiner Masse nach dar.

Die Eismassen des Südens.

Antarktis	Antarktis	Subantarktis
Kontinent	Schelfmeer	Tiefsee
Inlandeis	Schelfeis	Treibeis
aufliegend	gestützt	schwimmend
strömend	geschoben	getragen
Innenschwund	Außenschwund	Außenschwund
geschichtet	geschichtet	geschichtet
Ernährung	Stillstand	Abnahme
Spaltbildung	Zerfall	Zerfall
Schnee-Eis	Schnee-Eis	Schnee-Eis
salzfrei	salzfrei	salzarm
geschlossen	gesammelt	aufgelöst
Vereisung	Verkittung	Verfließung
Brucheis	Brucheis	Breieis
Gletscher	Blaueis	Stückeis

Konstruktionen der Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Films bei der ruckweisen Bewegung vermittels des Malteserkreuzrades im Kinematographen.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit einer lithographischen Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 11. Januar 1919.

Zuvörderst ist die Erklärung des in Fig. 1 der Tafel gezeichneten, international gewordenen Malteserkreuzrades mit dem eingreifenden Einzahnrad nötig. Das Malteserkreuzrad, dessen Achse A ist, enthält vier zu einander senkrechte radiale Schlitze. Das Einzahnrad besteht aus einer sich um die Achse Φ drehenden Scheibe, die als Zahn einen zylindrischen Zapfen trägt; und auf ihn ist eine drehbare Rolle gesetzt, um die Reibung sowie die Abnutzung in den Schlitzen zu vermindern. Auf der Scheibe befindet sich ein konzentrischer Ansatz z mit einem Ausschnitt s, in dem die Enden der Schlitze sich frei hindurch bewegen können. Zwischen den Schlitzen hat das Malteserkreuzrad vier konkave zylindrische Randteile, deren Radien gleich dem Radius des Ansatzes sind. Der Abstand der Mittelpunkte dieser Randteile von A ist gleich dem Achsenabstand ΦA. Der Kreis φ, auf dem sich der Mittelpunkt F des Zapfens bewegt, und der um die äußeren Enden der Schlitze beschriebene Kreis λ sind gleiche sich in den Punkten o, p rechtwinkelig schneidende Kreise; so daß im Beginn des Zahneingriffes die Bewegung des Zahnes nach der Achse A gerichtet ist und ohne Stoß erfolgt. Während $^3/_4$ Umdrehung des antreibenden Ein-

zahnrades gleitet dessen zylindrischer Ansatz z an einem entsprechenden zylindrischen Randteil des Malteserkreuzrades, das solange in fester Stellung bleibt; und während $^1/_4$ Umdrehung des Einzahnrades wird $^1/_4$ Umdrehung des Malteserkreuzrades bewirkt.

Auf Achse A ist eine Zackentrommel befestigt, deren Ränder in Wirklichkeit einen Durchmesser von 24 mm haben. Auf den Rändern befinden sich radiale Zacken, welche in die Randlöcher des bandförmigen internationalen Films eingreifen, der ruckweise eine Strecke gleich der Höhe 19 mm seiner Bilder bewegt wird; und diese Höhe ist gleich einem Viertel des Umfanges der Ränder. Bei einer Umdrehung des Einzahnrades, die gewöhnlich $^1/_{15}$ Sekunde dauert, ist demnach ein Bild $^1/_{20}$ Sekunde vor dem sogenannten Bildfenster des Kinematographen im Stillstand behufs der Projektion auf einen Schirm, und wird dann während $^1/_{60}$ Sekunde ruckweise fortbewegt. Die Größe des aus dem Malteserkreuzrad und dem Einzahnrad bestehenden Getriebe ist durch den Achsenabstand ΦA bestimmt, und unabhängig von der ruckweisen Bewegung des Films[1]).

Der Einfachheit halber, und auch eine zweckentsprechende Größe der Diagramme auf der Tafel zu erhalten, nehmen wir den Kreis λ als einen Randkreis der Zackentrommel an, die in den Film f von seinem Berührungspunkt L_6 bis an den Berührpunkt einer Druckrolle R eingreift und ihn in einer Führung $o' p'$ vor dem Bildfenster herabzieht, wobei die Höhe $o' p'$ des Bildfensters gleich der Länge des Viertelkreises $o \lambda p$ ist. Der von einer Spule kommende Film f wird von einer Zacken-

[1]) In R. Willis, Principles of Mechanism. 1841, p. 166; sec. ed. 1870, p. 165 ist das Malteserkreuzrad mit dem eingreifenden Einzahnrad beschrieben und „Geneva stop" benannt, weil es in den Mechanismen der Genfer Uhren damals schon verwendet wurde. Siehe auch L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 385, Fig. 437, Taf. XXX. Auf die Anwendung im Kinematographen ist hingewiesen von F. Paul Liesegang, „Die Erfindung der ruckweisen Bewegung beim Kinematograph" in Zentral-Zeitung für Optik und Mechanik, 1918, Jahrg. 39, Heft 6.

trommel ebenso wie von der auf der Achse A sitzende bewegt und hat über der Führung bei o' einen Bausch; was aber wegen Platzmangels nicht eingezeichnet ist. Bei jeder ruckweisen Bewegung verkleinert sich der Bausch und entsteht immer wieder. Demnach wird nur das jeweilige von dem Bausch bis an den Berührpunkt L_6 gehende Filmstück bewegt, und dadurch die ruckweise Bewegung erleichtert.

Die Geschwindigkeit eines auf dem Randkreis λ liegenden Punktes, den wir auch als einen Punkt des Malteserkreuzrades betrachten, ist gleich der Geschwindigkeit des Films. Ferner ist die Tangentialbeschleunigung dieses Punktes gleich der Beschleunigung des Films, und die Normalbeschleunigung gleich der des Filmstückes, das auf dem Randkreis λ liegt.

Zu den Konstruktionen der Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Films benutzen wir das kinematisch benannte zentrische Schleifkurbelgetriebe[1]) in Fig. 3. Die um die Achse Φ rotierende Kurbel ΦF ist drehbar mit einem Schlitten verbunden, der in dem um die Achse A schwingenden Schlitzgliede Ag gleitet. Wenn insonderheit die mit den gleichen Radien ΦF, AL beziehlich um Φ und A beschriebenen Kreise φ, λ sich rechtwinkelig in den Punkten o, p schneiden und das Schlitzglied nur bis an den Kreis λ reicht, so ist die Bewegung des Schlitzgliedes dieselbe wie die des Malteserkreuzrades. Deshalb können wir die Konstruktionen der Diagramme zunächst an dem Schlitzglied ausführen, welches das Malteserkreuzrad vertritt. Hierzu ist die Coriolissche Zusammensetzung der Beschleunigung[2]) erforderlich, die wir voraussetzen und erörtern wollen.

Bewegt sich in Fig. 2 ein Punkt F mit der Geschwindigkeit $FF_v^g = v_g$ und der Beschleunigung $FF_j^g = j_g$ auf einer bewegten Kurve g und deren mit F momentan vereint liegender Punkt E auf einer Bahnkurve ε

---

[1]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 832, Fig. 799 und S. 834, Fig. 800, Taf. LIV.

[2]) Daselbst, S. 779, Fig. 750, Taf. XLIX.

mit der Beschleunigung $EE_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon} = \mathfrak{j}_{\varepsilon}$, so wird dadurch das Parallelogramm $FF_{\mathfrak{j}}^{g} H' E_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon}$ bestimmt. Ist ω die momentane Drehgeschwindigkeit der Kurve g um ihren Punkt E, so ist die resultierende Beschleunigung $FF_{\mathfrak{j}}^{\varphi} = \mathfrak{j}_{\varphi}$ des Punktes F auf der durch die beiden gleichzeitigen Bewegungen entstehenden Bahnkurve φ gleich der geometrischen Summe von $EE_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon}$, $FF_{\mathfrak{j}}^{g}$ und der durch das Produkt $2v_g \cdot \omega$ bestimmten Strecke $H' F_{\mathfrak{j}}^{\varphi}$, die senkrecht zu v_g im Sinne der Drehgeschwindigkeit ω gerichtet ist. Sonach folgt:

$$FF_{\mathfrak{j}}^{\varphi} = EE_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon} + E_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon} H' + H' F_{\mathfrak{j}}^{\varphi} \text{ oder } \mathfrak{j}_{\varphi} = \mathfrak{j}_{\varepsilon} + \mathfrak{j}_g + 2v_g \cdot \omega.$$

Bei einer Parallelbewegung der Kurve g ist die Drehgeschwindigkeit $\omega = 0$, mithin auch das Produkt $2v_g \cdot \omega = 0$, und dann ist die Diagonale FH' jenes Parallelogramms die resultierende Beschleunigung des Punktes F.

Um in Fig. 3, wo die Mittelgerade g des Schlitzes jene bewegte Kurve g vertritt, die Beschleunigung $EE_{\mathfrak{j}}^{\varepsilon} = \mathfrak{j}_{\varepsilon}$ des Punktes E des Schlitzgliedes zu bestimmen, der sich auf dem um A beschriebenen Kreis ε bewegt und momentan mit dem Punkt F vereint liegt, nehmen wir an, daß die Geschwindigkeit FF_v^{φ} des auf dem Kreis φ bewegten Punktes F gleich dem Radius $F\Phi$ ist; dann fällt mit ihm die Beschleunigung $FF_{\mathfrak{j}}^{\varphi} = \mathfrak{j}_{\varphi}$ zusammen. Von den rechtwinkeligen Komponenten FF_v^g, EE_v^{ε} der Geschwindigkeit FF_v^{φ} ist $FF_v^g = v_g$ die Geschwindigkeit des Punktes F auf der um A rotierenden Geraden g und EE_v^{ε} die Geschwindigkeit des Punktes E auf dem Kreis ε.

Behufs der Konstruktion der Beschleunigung des Punktes E fällen wir auf die Gerade g die Senkrechte $\Phi V'$; dann sind die rechtwinkeligen Dreiecke $FV'\Phi$, $FE_v^{\varepsilon} F_v^{\varphi}$ kongruent, mithin ist $FV' = EE_v^{\varepsilon}$ und $V'\Phi = E_v^{\varepsilon} F_v^{\varphi} = FF_v^g = v_g$; ferner ziehen wir zu ΦA die Parallele $V'U'$ bis an die Verlängerung von ΦF und fällen auf g die Senkrechte $U'T'$. Sonach sind

$T'U'V'F$ und $V'\Phi\Lambda F$ ähnliche Gebilde; demzufolge ist das Verhältnis

$$\frac{T'U'}{V'\Phi} = \frac{FV'}{F\Lambda} \text{ und } T'U' = \frac{V'\Phi \cdot FV'}{F\Lambda}.$$

Da $FV' : F\Lambda = EE_v^\varepsilon : F\Lambda = \omega$ die Drehgeschwindigkeit des Schlitzgliedes und $V'\Phi = v_g$ ist, so ergibt sich die Strecke

$$T'U' = v_g \cdot \omega,$$

die im Sinne der Drehgeschwindigkeit ω um den Punkt E gerichtet ist.

Ferner ist das Verhältnis

$$\frac{FT'}{FV'} = \frac{FV'}{F\Lambda}; \text{ mithin } FT' = \frac{\overline{FV'}^2}{F\Lambda} = \frac{\overline{EE_v^\varepsilon}^2}{E\Lambda}$$

und die Strecke FT' die Normalbeschleunigung des Punktes E des Schlitzgliedes. Demnach liegt der Punkt E_j^ε der Beschleunigung $EE_j^\varepsilon = j_\varepsilon$ in der zu g senkrechten Geraden $U'T'$. Indem wir auf der Verlängerung von $V'\Phi$ die Strecke $H'F_j^\varphi = 2\overline{T'U'} = 2v_g \cdot \omega$ machen, und beachten, daß die Beschleunigung, mit der sich der Punkt F auf der Geraden g bewegt, in dieser Geraden liegt, so ergibt sich durch die zu g Parallele $H'E_j^\varepsilon$ der Punkt E_j^ε auf der Geraden $U'T'$; sonach ist die Strecke $T'V' = E_j^\varepsilon H'$ die Beschleunigung j_g des Punktes F auf g. Demzufolge ist wie in Fig. 2

$$FF_j^\varphi = EE_j^\varepsilon + E_j^\varepsilon H' + H'F_j^\varphi \text{ oder } j_\varphi = j_\varepsilon + j_g + 2v_g \cdot \omega.$$

Zu diesen für den Punkt E abgeleiteten Beziehungen sind die entsprechenden Beziehungen für den Punkt L des Schlitzgliedes ähnlich und ähnlich liegend in bezug auf Λ als Ähnlichkeitspunkt. Demnach ergibt sich die folgende Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes L.

Wir ziehen durch den Punkt L die zu ΦF Parallele $L\Psi$ bis an $\Phi\Lambda$, fällen auf die Gerade g die Senkrechte ΨV, ziehen die zu $\Phi\Lambda$ Paralle VU bis an ΨL und fällen auf g die Senkrechte UT; ferner machen

wir auf der Verlängerung von $V\Psi$ die Strecke $H\Psi = 2\overline{TU}$, ziehen die zu g Parallele HL_j^λ, welche die verlängerte Gerade UT im Punkt L_j^λ trifft und die in L auf g senkrechte Gerade im Punkt L_t schneidet.

Hiernach ist LV gleich der Geschwindigkeit, LL_j^λ die Beschleunigung, LL_t die Tangentialbeschleunigung und LT die Normalbeschleunigung des Punktes L des Schlitzgliedes und des Malteserkreuzrades. Somit ist die Strecke LV gleich der Geschwindigkeit und $LL_t = VH$ die Beschleunigung des Films; ferner ist LT die Normalbeschleunigung des auf den Randkreis λ in Fig. 1 liegenden Filmstückes.

Um zuerst in Fig. 4 die polaren zeitlichen Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Filmes zu konstruieren, nehmen wir an, daß der Punkt F sich auf dem Kreis φ mit der konstanten Geschwindigkeit gleich dem Radius ΦF bewegt, also das Einzahnrad gleichförmig bewegt wird. Die Hälfte oF_6 des Viertelkreises $o\varphi p$ teilen wir in eine Anzahl, beispielsweise in 6 gleiche Teile, wobei von dem Punkt o aus gezählt der Punkt F in dem dritten Teilpunkt liegt. Den Punkt F betrachten wir als einen Zeitpunkt auf dem Viertelkreis $o\varphi p$ und den Punkt L als den entsprechenden Wegpunkt auf dem Viertelkreis $o\lambda p$. Da der Bewegungsvorgang beiderseits der Geraden ΦA symmetrisch ist, so ist ΦA eine Symmetriegerade der beiden Diagramme, und deshalb brauchen wir nur die Konstruktion der einen Hälfte dieser Diagramme auszuführen.

Wir ziehen nach der vorhin angegebenen Konstruktion durch den Punkt L die zu ΦF Parallele $L\Psi$ bis an ΦA, fällen auf AL die Senkrechte ΨV, ziehen zu ΦA die Parallele VU bis an ΨL, fällen auf AL die Senkrechte UT, machen auf der Verlängerung von $V\Psi$ die Strecke $H\Psi = 2\overline{TU}$ und übertragen die Strecke HV auf die Gerade AL nach LJ. Dann ist V ein Punkt des polaren zeitlichen Diagramms $\mathfrak{V}_\mathfrak{p}^\lambda$ der Geschwindigkeit und J ein Punkt des polaren zeitlichen Diagramms $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}^\lambda$ der Beschleunigung. Der Punkt J ergibt sich auch, indem wir auf der Verlängerung von AL

die Strecke $LJ = \Psi V + 2\overline{TU}$ abtragen, dann ist es nicht nötig, die Strecke $V\Psi$ um $\Psi H = 2TU$ zu verlängern.

Hiernach erfordert die Bestimmung der beiden Punkte V, J nur die vier gestrichelt-punktiert gekennzeichneten Geraden[1]). Dem Zeitpunkt F entsprechend ergibt sich auf dem Fahrstrahl AF die Geschwindigkeit gleich LV und die Beschleunigung gleich LJ des Films. In gleicher Weise erhalten wir für die anderen Zeitpunkte und die nötigen Zwischenlagen, wie es nur angedeutet ist, die Punkte der Diagramme $\mathfrak{V}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{z}}$. Im Beginn ist die Beschleunigung gleich oJ_0 im Punkt L_6 gleich Null. Die größte Geschwindigkeit $L_6 V_6$ wird durch die Proportion $L_6 V_6 : \Phi F_6 = A L_6 : A F_6$ bestimmt.

Um für das Maximum der Beschleunigung den Fahrstrahl zu erhalten, beschreibt man um den Punkt A den Kreisbogen, der das Diagramm $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{z}}$ berührt, und etwa drei benachbarte von $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{z}}$ begrenzte konzentrische Kreiskreisbögen; dann bestimmt die durch deren Mitten gehende Kurve den Berührpunkt J_m und dadurch den Fahrstrahl AJ_m, der die Kreisbögen $o\lambda p$, $o\varphi p$ beziehlich in dem zugehörigen Wegpunkt und Zeitpunkt schneidet.

Um in Fig. 5 die orthogonalen zeitlichen Diagramme der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Films zu konstruieren, teilen wir die Strecke op, die gleich der Länge des Viertelkreises $o\varphi p$ ist, als Zeitachse in 12 gleiche Teile. Für den Zeitpunkt 3 der Abszisse 03 übertragen wir aus Fig. 4 die Strecken LV, LJ als Ordinaten beziehlich nach $3V_3$ und $3J_3$; dann ist V_3 ein Punkt des orthogonalen zeitlichen Diagramms $\mathfrak{V}_{0}^{\mathfrak{z}}$ der Geschwindigkeit und J_3 ein Punkt des orthogonalen zeitlichen Diagramms $\mathfrak{J}_{0}^{\mathfrak{z}}$ der Beschleunigung des Films. In gleicher Weise ergeben sich die anderen Punkte der Diagramme. Das

[1]) Umständlicher ist es, nach abgeleiteten Funktionen die Werte der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu berechnen und in Tabellen zu setzen, die eine Anschaulichkeit wie die Diagramme nicht ergeben. Siehe Dr. Carl Forch, „Der Kinematograph", 1913, S. 15.

Diagramm $\mathfrak{V}_0^s$ ist symmetrisch in bezug auf die größte Ordinate $6\,V_6$. Das Diagramm $\mathfrak{J}_0^s$ wird von dem Zeitpunkt 6 in zwei kongruente Teile geteilt. Den bezüglich der Zeitachse op rechtsseitigen Teil können wir als positiv und den linksseitigen als negativ betrachten. Die Beschleunigung beginnt und endet mit den gleichen Größen $o\,J_o$, $p\,J_p$, erreicht beiderseits im Punkt J_m gleiche Maxima und ist im Zeitpunkt 6 gleich Null.

Ferner ist aus Fig. 4 die Normalbeschleunigung $L\,T$ linksseitig als Ordinate nach $3\,N_3$ übertragen und N_3 ein Punkt des orthogonalen zeitlichen Diagramms $\mathfrak{N}_0^s$ der Normalbeschleunigung des Films während seines Eingriffes in die Zackentrommel. Dieses gestrichelt-punktiert gekennzeichnete, in bezug auf die größte Ordinate $6\,N_6$ symmetrische Diagramm ist nur wegen der vollständigen Veranschaulichung aller am Film vorkommenden Beschleunigungen konstruiert; denn durch die Druckrolle R in Fig. 1 wird das Abspringen des Films von der Zackentrommel verhindert, das anderen Falles infolge der großen maximalen Normalbeschleunigung $6\,N_6$ eintreten könnte.

Zur Konstruktion des Wegdiagramms $\mathfrak{W}$, welches die Änderungen der von dem Film während einer ruckweisen Bewegung durchlaufenen Weglängen veranschaulicht, entnehmen wir aus Fig. 4 z. B. die Bogenlänge $o\,L$ und tragen sie als Ordinate nach $3\,W_3$; dann ist W_3 ein Punkt des Wegdiagramms, das im Punkt o beginnt und im Punkt W_p endet, wo die Ordinate $p\,W_p = op$ ist.

Um in Fig. 6 die orthogonalen beweglichen Diagramme $\mathfrak{V}_0^w$, $\mathfrak{J}_0^w$ und $\mathfrak{N}_0^w$ der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Normalbeschleunigung des Films zu konstruieren, entnehmen wir aus Fig. 5 die Ordinaten des Wegdiagramms $\mathfrak{W}$ und tragen sie als Abszissen auf op ab; ferner entnehmen wir vermittels Parallelen zu op die Ordinaten, wie aus der übereinstimmenden Bezeichnung ersichtlich ist.

Die Diagramme veranschaulichen, wie bei der ruckweisen Bewegung des Films die Geschwindigkeit schnell und die Be-

schleunigung sehr schnell zu- und abnimmt. Bei dieser Bewegung ist die Reibung des Films in der Führung vor dem Bildfenster und der Trägheitswiderstand der zwar geringen Masse des bewegten Filmstückes zu überwinden durch die Kraft, mit welcher der Zahn des Einzahnrades in dem jeweiligen Schlitz des Malteserkreuzrades wirkt. Hinsichtlich der Abnutzung kommt die hierbei entstehende Reibung und ferner die Reibung des Einzahnrades an dem Malteserkreuzrad während seines Stillstandes in Betracht. Um diese Abnutzung möglichst zu vermindern, muß das Getriebe aus dem besten Stahl hergestellt werden; und bei den besseren Kinematographen befindet es sich in einer mit Öl gefüllten Kapsel.

Um noch auf die ruckweise Bewegung des Films vermittels eines auf ihn schlagenden Schlägers hinzuweisen, ist in Fig. 7 eine schematische Anordnung gezeichnet. Zwei ineinander greifende Zahnräder a, b drehen sich beziehlich um die Achsen A und B. Auf der Achse A ist die Zackentrommel α und auf der Achse B eine Scheibe s befestigt, die einen zylindrischen Zapfen S trägt. Der Schläger besteht aus der Scheibe und dem Zapfen; und wird in den Kinematographen, die als Spielzeug dienen, meistens aus einem starken Draht mit angebogenem Zapfen hergestellt. Der Film f mit einem Bausch über dem Bildfenster geht durch eine Führung an dem Bildfenster und mit einem Bausch nach der Zackentrommel α. Der Schläger schlägt in diesen Bausch hinein auf den Film und bewirkt dessen ruckweise Bewegung.

Bei den besseren Kinematographen mit einem Schläger wird der Film von S nach α noch über eine verstellbare Rolle geführt, durch die der Bewegungsvorgang geregelt werden kann. Nach der Beendigung des Schlages ist das Filmbild vor dem Bildfenster so lange im Stillstand, bis der Schlag wieder erfolgt. Diese ruckweise Bewegung ist aber trotz der Regelung nicht so sicher wie bei dem zwangläufig bewegten Malteserkreuzrad, und kann sich auch mit der Stärke des Schlages verändern.

Bei der Annahme, daß der Film während des Schlages

straff und mit dem Zapfen in Berührung bleibt, kann man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Films kinematisch bestimmen. Aber wir wissen nicht, wie sich der Film bei dem Aufschlagen verhält, ob er von dem Zapfen weggeschleudert oder eine Zeit lang von ihm berührt wird. Zu der Kenntnis der einzelnen Phasen dieser schnellen ruckweisen Bewegung könnte man gelangen durch stroboskopische Beleuchtung und anschaulicher vermittels schneller Aufnahmen auf einem Film, bei dessen kinematographischer Vorführung die schnelle Bewegung verlangsamt erscheint.

Mit dem H. Lehmannschen Aufnahmeapparat[1]), der „Zeitlupe“, auch „Zeitmikroskop“ genannt wird, und an dem die H. Ernemann, A. G. in Dresden, noch Verbesserungen ausgeführt hat, sind in einer Sekunde bis 500 Aufnahmen schneller Bewegungen möglich, die bei der kinematographischen Vorführung verlangsamt in den einzelnen Phasen anschaulich erkennbar werden. Durch das Zeitmikroskop wird der Kinematographie ein ergiebiges Gebiet für die Erforschung schneller Bewegungen eröffnet und der Gesichtssinn erweitert.

---

[1]) „Photographische Korrespondenz“, Juli 1916, Nr. 670 der ganzen Folge.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München

Sitzungsb. d. math. phys. Kl. Jahrg. 1919.



Über die Möglichkeit neuer Versuche an Glühelektroden.

Von **M. v. Laue.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 11. Januar 1919.

In früheren Veröffentlichungen[1]) haben wir das thermodynamische Gleichgewicht zwischen einer Glühelektrode und der sie umgebenden Elektronenwolke untersucht, namentlich die räumliche Verteilung der Elektronen und die Grenzdichte ϱ_g, die unmittelbar an der Elektrodenfläche herrschen muß. Um die Formeln für die Verteilung zu prüfen, käme es darauf an, auf mehrere unabhängige Weisen, von denen mindestens eine diese Verteilungsfunktionen bei der Berechnung benutzt, die Grenzdichte zu messen. Wir wollen hier die Pläne zu solchen Versuchen entwickeln.

Die bisherigen Versuche über Glühelektroden, soweit sie sich nicht nur mit dem Einfluß von allerhand störenden Umständen beschäftigen, lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Messungen des Sättigungsstromes. Die beschleunigende Spannung V zwischen Glühkathode und Anode ist so hoch, daß sie jedes austretende Elektron praktisch sofort zur Anode zieht, ohne daß sich erhebliche Raumladungen ausbilden könnten. Diese Versuche bestätigen bisher alle die Richardsonsche Formel für den Strom pro Flächeneinheit.

---

[1]) M. v. Laue, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 15, 205, 257 und 301, 1918.

$$i = A\,T^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{T}} \tag{3}$$

sind aber nicht genau genug, um den Exponenten $\frac{1}{2}$ von T sicher zu stellen; auch schwanken die Zahlenangaben über die Konstanten A und β noch stark von Messung zu Messung[1]).

2. Messungen bei niedrigeren beschleunigenden Spannungen, als bei den Versuchen der ersten Gruppe, und bei so hohen Raumladungen, daß der Hauptsache nach diese die Vorgänge bestimmen, während weder die Wärmebewegung der Elektronen noch die Eigenschaften der Glühelektrode demgegenüber einen merklichen Einfluß ausüben. Für sie gilt, sofern die Elektroden parallele Ebenen im Abstande d sind, die Gleichung

$$i = \frac{4}{9}\left(\frac{2\,\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{d^2}, \tag{4}$$

in der ε die Ladung, m die Masse eines Elektrons bedeutet, während die Temperatur und irgend welche auf die Elektrode bezüglichen Größen nicht auftreten. Für kreiszylindrische, konzentrische Elektroden ist eine ähnliche Beziehung bekannt[2]).

3. Versuche mit sehr geringen Raumdichten, bei denen sich jedes Elektron unbeeinflußt von anderen gegen eine verzögernde Spannung von 0 bis 1 Volt bewegt. Dahin gehören die Versuche von Richardson und Brown[3]) über die Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen, sowie auch noch Versuche von Schottky[4]), obwohl sich bei manchen seiner Messungen schon Raumladungen bemerkbar machen.

---

[1]) Vgl. hierzu Marx, Handbuch der Radiologie, Band IV, Leipzig 1917, Artikel „Glühelektroden" von O. W. Richardson; ferner z. B. W. Hüttemann, Ann. d. Phys., 52, 816, 1917; J. Langmuir, Phys. Rev., 2, 450, 1913, Phys. Zeitschr., 15, 516, 1914.

[2]) C. Child, Phys. Rev., 32, 492, 1911; J. Langmuir, siehe die vorhergehende Anm. W. Schottky, Phys. Zeitschr., 15, 526, 1914.

[3]) O. W. Richardson und F. C. Brown, Phil. Mag., 16, 353, 1908; O. W. Richardson, Phil. Mag., 16, 890, 1908; 18, 681, 1909. Bei einem der Versuche von Richardson und Brown lagen durchschnittlich 5 Elektronen gleichzeitig zwischen den Elektroden.

[4]) W. Schottky, Ann. d. Phys., 44, 1011, 1914.

Die Versuche unter 2. lassen überhaupt keinen Schluß auf die Verhältnisse an der Glühelektrode zu, kommen für unsere Zwecke daher nicht in Betracht. Die der Gruppe 3 könnten zwar zur Ermittlung der Gesamtzahl der austretenden Elektronen benutzt werden und erlaubten dann einen Schluß auf diese Verhältnisse. Doch ist das unseres Wissens nie geschehen. Sie lieferten dann aber auch nichts neues gegenüber den Versuchen der Gruppe 1, da sich auch diese auf die Ergiebigkeit der Elektrode an Elektronen beziehen.

Die Messungen des Sättigungsstromes werden meist so gedeutet, daß der Strom pro Flächeneinheit der Glühelektrode

$$i = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,\varrho_g \qquad 5)$$

ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß jedes Elektron, welches von außen her auf die Elektrode trifft, auch von ihr aufgenommen wird[1]). Nun haben aber metallische Leiter bei Zimmertemperatur ein recht erhebliches Spiegelungsvermögen für Elektronen, selbst bei den geringen Auftreffgeschwindigkeiten, welche die Wärmebewegung diesen verleiht[2]). Daß dies bei Glühtemperaturen auch noch da sein dürfte und dann die Anwendbarkeit der Gleichung 5) stark beeinträchtigt, spricht schon Richardson aus[3]), und wir haben im Anschluß an ihn a. a. O. S. 247 darauf hingewiesen. Nennen wir das durchschnittliche Spiegelungsvermögen der Elektrode für Elektronen mit der der Elektrodentemperatur entsprechenden Wärmebewegung S, so ist Gleichung 5) zu ersetzen durch die Beziehung

---

[1]) Vgl. die Ableitung der Formel 3), welche O. W. Richardson, Phil. Transactions (A) 201, 497, 1903 auf Seite 502 und in Band 4 des Marxschen Handbuches der Radiologie Seite 463 nach einem Gedanken von J. J. Thomson angibt.

[2]) O. v. Baeyer, Verh. d. D. Phys. Ges., 10, 96 und 953, 1908; O. W. Richardson, Phil. Mag., 18, 694, 1909; Phys. Rev., 29, 557, 1909; A. Gehrts, Ann. d. Phys., 36, 995, 1911.

[3]) O. W. Richardson in Band 4 des Marxschen Handbuches der Radiologie, S. 529.

$$i = (1 - S)\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\,\varrho_g.$$

(Vgl. weiter unten die Ableitung von Gleichung 31.) Man kann somit aus allen bisherigen Versuchen nur $(1 - S)\varrho_g$, nicht ϱ_g selbst, bestimmen.

Wir möchten demgegenüber hier auf zwei neue Arten von Versuchen über Glühelektronen zunächst ohne Rücksicht auf die (vermutlich nicht geringen) experimentellen Schwierigkeiten hinweisen. Immerhin werden wir zeigen, daß die auszuführenden elektrischen Messungen in zugänglichen Größenordnungen liegen. Die erste Art ist rein statisch: man hat mit einem elektrostatischen Meßinstrument den Potentialunterschied zwischen zwei Kondensatorplatten zu messen, einmal, wenn beide Platten kalt sind, sodann, wenn die positive Platte glüht; dabei muß die elektrische Ladung der negativen Platte in beiden Fällen die gleiche sein. Bei der Messung an der glühenden Platte muß ferner der Potentialunterschied so groß sein, daß kein Elektron ihn überwinden kann. Diese Versuche liefern unmittelbar die Grenzdichte ϱ_g. Die andere Art der vorzuschlagenden Versuche gestattet zwar nicht ϱg selbst, wohl aber die Größe

$$\frac{1 - S}{1 + S}\,\varrho_g$$

zu messen. Durch ihre Vereinigung mit Sättigungsversuchen ließe sich also S und ϱ_g einzeln bestimmen. Es handelt sich bei ihnen darum, zwischen zwei Elektroden von gleicher, hoher Temperatur und wohl am besten auch von gleichem Material einen möglichst schwachen, die statische Verteilung der Elektronen möglichst wenig störenden Strom übergehen zu lassen. Da es dabei nur auf die Strom*dichte* ankommt, die bisherigen Glühelektroden aber meist ganz dünne Drähte waren, ließe sich diese Bedingung wohl durch Vergrößerung der Oberflächen erfüllen, ohne daß man zu unmeßbar kleinen Strom*stärken* hinabsteigt. Die Formel für den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung wollen wir im folgenden ableiten.

Eine wesentliche Bedingung bei beiden Arten von Versuchen ist der Verzicht auf eine unmittelbare elektrische Heizung der Glühelektroden während der Messung, weil diese Oberflächen notwendig Potentialflächen sein müssen.

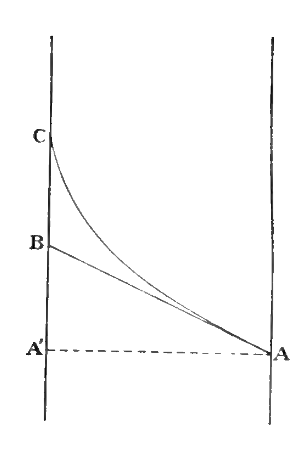
Hat man die Grenzdichte ϱ_g auf eine dieser Arten bestimmt, so kann man nach der Gleichung

$$\varrho_g = \frac{(N\varepsilon)^3}{2R} C^2 T^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu}{RT}} \tag{5a}$$

(siehe die erste der Formeln 48) auf S. 241 a. a. O.) daraus die Elektronenaffinität μ der Glühelektrode bestimmen, wenn man dazu den quantentheoretischen Wert von C benutzt, den wir auf S. 268 und 269 (bes. Gl. 38)) a. a. O. gegeben haben. Eine Prüfung dieses Wertes selbst aber ermöglichen Versuche, bei denen Elektronen im vollkommenen Vakuum liegen, wohl überhaupt nicht. Erst wenn man ihr Gleichgewicht mit einem Gase untersuchte, dessen Molekeln Elektronen anlagern können, ließe sich darüber ein Anhaltspunkt gewinnen. Versuche darüber erscheinen uns aber deswegen so schwierig, weil man bei ihnen eine Sicherheit haben müßte, daß das Gas nicht unmittelbar auf die Glühelektrode einwirkt.

§ I. Die statischen Versuche.

Zwischen zwei ebenen, parallelen Kondensatorplatten herrscht, wenn die Temperatur beider Platten so gering ist, daß keine Elektronen zwischen ihnen auftreten, ein homogenes Feld, dessen Potentialanstieg in Fig. 1 durch die gerade Linie AB angedeutet sein mag. Erwärmen wir jetzt die positive Platte, bis sie von einer dichten Elektronenwolke umgeben ist, so muß die Potentialkurve in ihrer Nähe der Raumladungen wegen jedenfalls so gekrümmt sein, wie dies die Kurve AC angibt; daß diese schon in einigem Abstande von der negativen Platte in die Gerade AB übergeht, deutet auf die schon erwähnte Forderung hin, daß an der negativen Platte die Raumdichte Null sein und daß die Ladung der negativen Platte erhalten



bleiben soll. Zu messen sind die beiden Potentialunterschiede, welche in der Figur durch die Strecken $A'B$ und $A'C$ angedeutet sind.

Um diesen Gedanken mathematisch zu fassen, geben wir den Platten den Flächeninhalt O und den Abstand d. Ihre Abmessungen sollen so sein, daß wir Randwirkungen nicht in Betracht zu ziehen brauchen. Nach den Formeln 8) auf Seite 213 a. a. O. ist der Potentialverlauf in der Nähe einer Glühelektrode, wenn ein äußeres Feld die Elektronen gegen sie drückt, gegeben durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{RT}{F}\left\{\log \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{FK}{2RT}x\right) - \log\left(\frac{FK^2}{2RT\varrho_0}\right)\right\}. \qquad 6)$$

Dabei bedeutet R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, F die Ladung eines Mols einwertiger negativer Jonen[1]), ϱ_0 eine konstante von den Dimensionen der elektrischen Raumdichte, die ohne physikalische Bedeutung ist und sich aus den Gleichungen für Potentialunterschiede, Dichten und andere meßbare Größen stets forthebt; ihre Unbestimmtheit entspricht der Willkürlichkeit des Nullpunktes von φ. $K(>0)$ ist eine Integrationskonstante.

Die Oberfläche der Glühelektrode hat die Koordinate x_+, sie liegt nahe bei Null, und zwar um so näher, je höher die

[1]) Die negative Größe α, welche in unseren früheren Veröffentlichungen auftritt, ist gleich $\frac{\varepsilon}{k\,T}$, wo ε die Ladung eines Elektrons, k die Boltzmannsche Konstante bedeutet. Erweitert man Zähler und Nenner dieses Bruches mit der Zahl N der Atome im Grammatom, so findet man für α den hier im Text benutzten Wert $\frac{F}{R\,T}$, da $Nk = R$, $N\varepsilon = F$ ist.

Temperatur ist. Wir wollen den Plattenabstand d als so groß ansehen, daß man für die Koordinate x der negativen Platte statt $x_+ + d$ einfach d setzen kann. Da in ihrer Nähe keine Elektronen mehr liegen sollen, gilt dort die aus 6) für große Werte von x folgende Näherung

$$\varphi = -Kx - \frac{RT}{F} \log\left(\frac{2FK^2}{RT\varrho_0}\right), \tag{7}$$

welche zeigt, daß K die Feldstärke an der negativen Elektrode ist und daher deren Landung

$$E = -KO \tag{8}$$

beträgt. Ihr Potential ist nach 7)

$$\begin{aligned} \varphi_- &= -Kd - \frac{RT}{F} \log\left(\frac{2FK^2}{RT\varrho_0}\right) \\ &= -\frac{|E|d}{O} - \frac{RT}{F} \log\left(\frac{2FE^2}{RT\varrho_0 O^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Das Potential der Glühelektrode berechnen wir aus dem Boltzmannschen Verteilungssatz für die elektrische Dichte

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{F\varphi}{RT}} \tag{9a}$$

(vgl. Formel 2), S. 206, a. a. O.), indem wir für ϱ die Grenzdichte einsetzen. So folgt

$$\varphi_+ = -\frac{RT}{F} \log \frac{\varrho_g}{\varrho_0}. \tag{10}$$

Durch Subtraktion von 9) und 10) findet man sodann, da ϱ_0 in 9) und 10) dieselbe Konstante ist

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{|F|} \log\left(\frac{1}{2} \frac{RT}{|F|} \cdot \frac{O^2}{E^2} |\varrho_g|\right) + \frac{|E|d}{O}. \tag{11}$$

Fehlten die Elektronen, so wäre die Potentialdifferenz

$$V = \frac{|E|d}{O}. \tag{12}$$

Setzt man 12) in 11) ein, so folgt:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{F} \log \left(\frac{1}{2} \frac{RT}{F} \frac{d^2}{V^2} |\varrho_g| \right) + V. \tag{13)}$$

Hier sind alle vorkommenden Größen meßbar oder bekannte Konstanten, bis auf ϱ_g. Man kann also ϱ_g nach ihr bestimmen.

Damit aber die Näherung 7) berechtigt ist, muß, wie aus der strengen Gleichung 6), sowie aus 8) und 12) hervorgeht

$$e^{-\frac{F}{RT} K d} = e^{-\frac{F V}{RT}} << 1 \tag{14)}$$

sein. Die strenge Gleichung für die elektrische Dichte ϱ ((siehe Gl. 8), S. 203, a. a. O.),

$$\varrho = \frac{F}{2RT} \frac{K^2}{\mathfrak{Sin}^2 \left(\frac{F}{2RT} K x \right)},$$

geht dann für $x = d$ über in

$$\varrho_- = \frac{F}{2RT} \frac{V^2}{d^2} e^{-\frac{F V}{RT}}. \tag{15)}$$

Nach dieser Formel muß man abschätzen, ob die von der Glühelektrode entsandten Elektronen die Ladung der negativen Platte noch verändern können; man muß den Potentialunterschied V eben so groß wählen, daß dies nicht mehr zu befürchten ist. Andererseits wird man V auch nicht zu groß wählen dürfen, weil sonst der erste Summand in 13) gegen den zweiten zu klein wird. Man hätte ihn dann als Differenz der nahezu gleichen Potentialunterschiede $\varphi_+ - \varphi_-$ und V zu bestimmen, was die Genauigkeit beeinträchtigt

Im elektrostatischen Maßsystem (bisher haben wir das Lorentzsche benutzt) sind die Gleichungen 13) und 15) zu ersetzen durch die Formeln:

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = \frac{RT}{F} \times 2{,}303 \cdot {}^{10}\log \left(2\pi \frac{RT}{F} \frac{d^2}{V^2} \varrho_g \right) \tag{16)}$$

$$\varrho_- = \frac{1}{8\pi} \frac{F}{RT} \frac{V^2}{d^2} e^{-\frac{F V}{RT}}. \tag{17)}$$

Die Bedingung 14) bleibt hingegen unverändert.

Auf Seite 250 a. a. O. haben wir ϱ_g für Wolfram und für 2400° abs. zu $1,4.10^2$ elektrostatische Einheiten geschätzt. Wir können, da dies in der Größenordnung richtig sein dürfte, daraus weiter auf die ungefähre Größe der Potentialdifferenz $\varphi_+ - \varphi_-$ schließen, um ein Urteil über die Ausführbarkeit des in Rede stehenden Versuches zu gewinnen. Wir nehmen dabei d zu 2 cm an. Da im elektrostatischen Maßsystem $|F|/RT = 2,9 \cdot 10^{14} : (8,3 \cdot 10^7 \cdot 2,4 \cdot 10^3) = 1,45 \cdot 10^3 \text{ g}^{-\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-\frac{1}{2}}$ sec beträgt, ist Bedingung 14) mit $V = 1,33 \cdot 10^{-2}$ elektrostatische Einheiten (gleich 4 Volt) gewiß erfüllt, da dann $|F| V/RT = 19,3$, also $e^{-\frac{|F| V}{RT}} = 10^{-8,38}$ ist. Nach 17) ist unter diesen Umständen $|\varrho_-| = 6 \cdot 10^{-12}$ elektrostatische Einheiten; es gelangt also nur ganz selten einmal ein Elektron bis zur negativen Kondensatorplatte. Aus 16) aber finden wir

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = 6,58 \cdot 10^{-3} \text{ elektrostat. Einheiten} = 2 \text{ Volt}).$$

Dieser Betrag läßt sich neben den 4 Volt, die V beträgt, gewiß mit großer Genauigkeit messen. Man könnte wohl V noch etwas niedriger wählen, so daß nach 16) $(\varphi_+ - \varphi_-) - V$ noch etwas größer würde.

Schließlich können wir an dem hier benutzten Wert von ϱ_g auch unsere Voraussetzung auf ihre Berechtigung hin prüfen, daß man die Koordinate x_+ der Glühelektrode gegen den Plattenabstand d vernachlässigen kann. In der Nähe der Glühelektrode ist nämlich, wie wir auf Seite 217 und 218 a. a. O. gezeigt haben, die Dichteverteilung auf alle Fälle in guter Näherung (im elektrostatischen Maßsystem) durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{RT}{2\pi F x^2}$$

gegeben. Daraus folgt, da doch für den Wert $x_+ \, \varrho = \varrho_g$ werden soll:

$$x_+ = \sqrt{\frac{RT}{2\pi |F| \varrho_g}} .$$

In Zahlen ist das hier:

$$x_+ = \sqrt{\frac{8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 2{,}4 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 2{,}9 \cdot 10^{14} \cdot 1{,}4 \cdot 10^2}} = \sqrt{8 \cdot 10^{-7}} = 9 \cdot 10^{-4}\ \text{cm}.$$

Da wir $d = 2$ cm angenommen haben, ist auch diese Voraussetzung berechtigt.

Zweckmäßiger als zwei ebene Kondensatorplatten wären wohl zwei kreiszylindrisch-konzentrische, und zwar wählte man vermutlich am besten die innere als Glühelektrode. Wir geben beiden die Höhe a, der inneren den Halbmesser r_+, der äußeren den Halbmesser r_-. So weit wir von Randwirkungen absehen können, stellt die Formel 31) auf S. 227 a. a. O. den Potentialverlauf dar:

$$\varphi = \frac{RT}{F}\left\{\log\left[\mathfrak{Sin}^2\left(K \log \frac{r}{r_0}\right)\right] + \log\left(\frac{F\varrho_0 r^2}{2RTK^2}\right)\right\}. \qquad 18)$$

In ihr bedeutet r den Abstand von der gemeinsamen Achse beider Zylinder, ϱ_0 die schon erwähnte Konstante von der Dimension einer elektrischen Dichte, und K und r_0 positive Integrationskonstanten. Ist die Temperatur der positiven Kondensatorplatte hinreichend hoch, so ist r_0 nur wenig kleiner als r_+, und wir nehmen das Verhältnis beider als von 1 so wenig verschieden an, daß wir $\log r_0$ mit $\log r_+$ vertauschen können. Unter der Annahme, daß die Elektronenwolke durch das negative Potential der äußeren Platte vollständig von dieser fern gehalten wird, können wir in ihrer Nähe Gleichung 18) durch die Näherung

$$\varphi = \frac{RT}{F}\left\{2(1+K)\log\frac{r}{r_+} + \log\frac{F\varrho_0 r_+^2}{8RTK^2}\right\} \qquad 19)$$

ersetzen. Die Feldstärke am äußeren Zylinder beträgt infolgedessen

$$\frac{2(1+K)}{r_-} \cdot \frac{RT}{F}$$

und dieser trägt die elektrische Ladung

$$E = \frac{RT}{F} \times 4\pi(1+K)a. \qquad 20)$$

Sein Potential beträgt nach 19) und 20)

$$\varphi_- = \frac{E}{2\pi a}\log\frac{r_-}{r_+}$$
$$+\frac{RT}{F}\left[\log\left(\frac{F\varrho_0 r_+^2}{8RT}\right) - 2\log\left(\frac{EF}{4\pi a RT} - 1\right)\right]. \qquad 21)$$

Andererseits berechnet sich das Potential der Glühelektrode unverändert nach Gleichung 10); bildet man aus ihr und 21) die Differenz, so folgt:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{RT}{F}\left[\log\left(\frac{F\varrho_g r_+^2}{8RT}\right) - 2\log\left(\frac{E\cdot F}{4\pi a RT} - 1\right)\right]$$
$$+\frac{E}{2\pi a}\log\frac{r_-}{r_+}. \qquad 22)$$

Bei zwei kalten Elektroden wäre der Potentialunterschied

$$V = \frac{E}{2\pi a}\log\frac{r_-}{r_+}. \qquad 23)$$

Man kann also wie beim ebenen Kondensator aus der Beobachtung von $\varphi_+ - \varphi_-$ und von V, und durch Messung der Halbmesser r_+ und r_- die Grenzschichte ϱ_g bestimmen.

Damit der Übergang von der strengen Gleichung 18) zu der angenäherten Formel 19) berechtigt ist, muß

$$e^{-2K\log\frac{r}{r_+}} = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 e^{-\frac{FV}{RT}} << \qquad 24)$$

(vgl. auch 20) und 23)) sein; aus der streng gültigen Gleichung

$$\varrho = \frac{2RT}{F}\cdot\frac{K^2}{r^2\,\mathfrak{Sin}^2\left(K\log\frac{r}{r_+}\right)}$$

(siehe S. 227 a. a. O., Formel 31)) folgt dann

$$\varrho_- = \frac{2RT}{F\,r_+^2}\left(\frac{FV}{2RT\log\frac{r_-}{r_+}} - 1\right)^2 e^{-\frac{FV}{RT}}. \qquad 25)$$

So lange r_+ und r_- nicht von verschiedener Größenordnung sind, ist der Inhalt von 24) und 25) wesentlich derselbe wie der von 14) und 15).

Im elektrostatischen Maßsystem lauten die Gleichungen 22) und 23):

$$(\varphi_+ - \varphi_-) - V = \tag{25 a}$$

$$\frac{RT}{F} \times 2{,}303 \left[{}^{10}\log \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{F \cdot \varrho_g \, r_+^2}{RT} \right) - 2 \cdot {}^{10}\log \left(\frac{E\,F}{a\,R\,T} - 1 \right) \right]$$

$$V = 4{,}606 \, \frac{E}{a} \, {}^{10}\log \frac{r_-}{r_+}. \tag{25 b}$$

§ 2. Strömungen in einer Elektronenschar.

Wir betrachten wie auch früher solche Fälle, in denen die Elektronen hinreichend dicht verteilt sind, daß man ihre Gesamtheit als ein Continuum betrachten kann. Wann diese Bedingung erfüllt ist, dafür haben wir bisher noch kein ausreichendes Kennzeichen. Bei einem gewöhnlichen Gase verlangen wir dafür, daß die freie Weglänge gegen die sonst in Betracht kommenden Strecken klein ist. Den Begriff der freien Weglänge können wir wohl kaum auf die Elektronen übertragen, soweit sie einigermaßen dicht liegen. Aber wir können doch wohl sagen, daß die Strecke, welche in dieser Bedingung an die Stelle der freien Weglänge zu treten hat, sehr viel kleiner ist als bei Gasmolekeln von gleicher Raumdichte. Denn Gasmolekeln wirken erst aufeinander, wenn sich ihre Mittelpunkte auf Entfernungen von 10^{-7} bis 10^{-8} cm nähern. Zwei Elektronen hingegen verteilen sich, wenn sie sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten vom Betrage der mittleren Geschwindigkeit bei 2000 Grad abs. einander bis auf einen Minimalabstand von 10^{-6} cm nähern, eine Ablenkung von fast 19 Winkelgraden, und selbst bei einer Annäherung bis auf 10^{-5} beträgt diese Ablenkung noch $1^1/_2$ Grad. Jedenfalls liegt aber diese Bedingung schon allen Anwendungen der Gleichung $\Delta \varphi = -\varrho_0 e^{-\frac{E\varphi}{RT}}$ auf die statischen Fälle zu Grunde,

und wir handeln somit nur folgerichtig, wenn wir sie hier auf Strömungserscheinungen übertragen.

Weiter beschränken wir uns auf so geringe Geschwindigkeiten, daß das magnetische Feld, welches ja bei jeder Elektronenbewegung notwendig auftritt, keine merkliche Rückwirkung auf diese Strömung ausübt, daß ferner die elektrische Feldstärke sich immer noch aus einem, wenn auch zeitlich langsam veränderlichen skalaren Potential φ ableitet. Dann können wir die gesamte Hydrodynamik auf die Elektronen anwenden, mit dem einzigen Unterschied, daß das Potential der äußeren Kräfte, statt wie zumeist dort eine gegebene Funktion des Ortes zu sein, hier mit der elektrischen Dichte der Elektronenschar durch die Gleichung $\Delta \varphi = -\varrho$ verbunden und aus ihr und gewissen Grenzbedingungen zu bestimmen ist. Dieser Unterschied ändert aber nichts an der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen, sei es in der Lagrangeschen, sei es in der Eulerschen Form, erst recht nichts an der Kontinuitätsgleichung. Die Helmholtzschen Wirbelsätze gelten ebenfalls unverändert und man kann wie in der Hydrodynamik schließen, daß einmal wirbelfreie Bewegungen dauernd wirbelfrei bleiben. Dann darf man das Geschwindigkeitspotential ψ ($\mathfrak{q} = \operatorname{grad} \psi$) einführen und kann aus den Eulerschen Gleichungen durch eine Integration die Formel ableiten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} q^2 + P = -\frac{\varepsilon}{m} \varphi + \text{konst.} \tag{26}$$

P ist dabei das Integral $\int \frac{dp}{\delta}$; wo p den Molekulardruck, $\delta = \frac{m}{\varepsilon} \varrho$ die Massendichte der Elektronenschar bezeichnet. Bei ganz langsamer Strömung wird das thermische Gleichgewicht nicht gestört, sodaß

$$p = \frac{\varrho}{\varepsilon} k T, \quad P = \frac{k T}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{27}$$

zu setzen ist; daraus folgt dann, wenn wir die Konstante aus 26) mit in $\log \varrho_0$ einbeziehen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \frac{k\,T}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0} = -\frac{\varepsilon}{m} \varphi. \tag{28}$$

Nimmt man zu dieser Formel hinzu die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\, \mathfrak{q}) = 0 \tag{29}$$

und die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = -\varrho,$$

so hat man die Differentialgleichungen für die Strömung zusammengestellt.

Für stationäre Strömung folgt bei Vernachlässigung der thermischen Bewegung und des von ihr herrührenden Summanden P in 26)

$$\tfrac{1}{2} q^2 = -\frac{\varepsilon}{m} \varphi + \text{konst}, \quad \operatorname{div}(\varrho\, \mathfrak{q}) = 0, \quad \Delta \varphi = -\varrho. \tag{30a}$$

Hierzu nimmt man in folgerichtiger Vernachlässigung der Wärmebewegung die Nebenbedingung, daß die Elektronen die Glühkathode mit der Geschwindigkeit 0 verlassen. Aus der ersten der Gleichungen 30a) folgt dann, wenn wir unter n die Normale auf der Glühelektrode verstehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{m}{\varepsilon} q \frac{\partial q}{\partial n} = 0.$$

Damit aber haben wir die Differentialgleichungen und die beiden Nebenbedingungen zusammengestellt, auf welchen die Theorie der Versuche von Gruppe 2) beruht. — Wir wollen im folgenden im Gegensatz hierzu gerade so geringe Geschwindigkeiten annehmen, daß in 28) das Glied $\frac{k\,T}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$ gegenüber dem $\frac{1}{2} q^2$ den Ausschlag gibt.

Um die Grenzbedingungen aufzustellen, wollen wir annehmen, daß die Strömung der Elektronen senkrecht auf den Elektrodenflächen steht und daß diese Potentialhöhenflächen sind. Der Austritt des elektrischen Stroms aus der Glühelektrode, welche für dessen Durchgang durch die Elektronen-

schar als Anode dient, geht dann so vor sich, daß mehr Elektronen auf diese auftreffen und infolgedessen auch mehr von ihr aufgenommen werden, als im Gleichgewichtsfall; da andererseits die Elektrode nicht mehr Elektronen hergibt, als in diesem, so ergibt sich der erforderliche Überschuß eintretender Elektronen. An der Kathode, welche nach unserem Plan dieselbe hohe Temperatur hat wie die Anode, müssen umgekehrt weniger Elektroden auftreffen, als beim Gleichgewicht.

Hat die Elektronenschar als Ganzes an einer Stelle eine Geschwindigkeit vom Betrage q in der positiven x-Richtung, so haben an dieser Stelle

$$\frac{\varrho}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}\, e^{-\frac{m(\xi-q)^2}{2kT}}\, d\xi$$

Elektronen eine Geschwindigkeitskomponente in derselben Richtung, die zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt; denn $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ ist die Zahl der Elektronen für die Volumeneinheit. Weist die positive x-Richtung nun senkrecht auf die Anode, so treffen infolgedessen auf diese

$$\frac{\varrho_+}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}\int_0^\infty \xi\, e^{-\frac{m(\xi-q)^2}{2kT}}\, d\xi$$

für die Flächen- und Zeiteinheit, wenn ϱ_+ die Dichte unmittelbar vor ihr bedeutet. Wir berechnen das Integral, indem wir $\lambda = \xi - q$ als Integrationsveränderliche einführen:

$$\int_0^\infty \xi\, e^{-\frac{m(\xi-q)^2}{2kT}}\, d\xi = \int_{-q}^\infty (\lambda + q)\, e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}}\, d\lambda =$$

$$\int_0^\infty \lambda\, e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}}\, d\lambda + q\int_0^\infty e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}}\, d\lambda + \int_{-q}^0 \lambda\, e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}}\, d\lambda + q\int_{-q}^0 e^{-\frac{m\lambda^2}{2kT}}\, d\lambda.$$

Die Auswertung der beiden Integrale von $-q$ bis 0 erleichtern wir uns durch die Annahme

$$q << \sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad 30\,\mathrm{b)}$$

d. h. daß q klein ist gegen die mittlere Molekulargeschwindigkeit. Dann dürfen wir nämlich in diesen Integralen die e-Funktion gleich 1 setzen. Vernachlässigen wir weiterhin folgerichtigerweise $q^2\sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}$ gegen q, so finden wir für die Zahl der auftreffenden Elektronen:

$$\frac{\varrho_+}{\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}+\tfrac{1}{2}q\right).$$

Von diesen nimmt die Elektrode auf:

$$\nu_+ = (1-S)\frac{\varrho_+}{\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}+\tfrac{1}{2}q\right). \qquad 31)$$

Wäre $q = 0$, so nähme sie statt dessen auf

$$\nu_0 = (1-S)\frac{\varrho_g}{\varepsilon}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \qquad 32)$$

Elektronen, wenn ϱ_g die gewöhnliche Grenzschichte bedeutet. Ebensoviel gibt sie also auch ab. Der elektrische Strom, der aus ihr herauskommt, hat infolgedessen für die Flächeneinheit die Stärke

$$i = (\nu_+ - \nu_0)\,\varepsilon = (1-S)\left(\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}(\varrho_g - \varrho_+) - \tfrac{1}{2}\varrho_+ q\right) \qquad 33)$$

Andererseits ist aber auch

$$-\varrho_+ q = i; \qquad 34)$$

also gilt nach 33) die Beziehung

$$-(\varrho_+ - \varrho_g) = \frac{1}{2}\frac{1+S}{1-S}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\,i. \qquad 35)$$

Dies ist die Grenzbedingung für die Anode. Da ϱ_+ und ϱ_g negativ sind, sagt sie aus, daß an der Anode die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit bei der Strömung größer ist, als im Gleichgewichtsfall. An der Kathode ist es gerade umgekehrt, und zwar gilt für sie

$$-(\varrho_- - \varrho_g) = -\frac{1}{2}\frac{1+S}{1-S}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\,i. \qquad 35\text{a})$$

Wir wollen übrigens noch eine Annahme aufdecken, welche dieser Rechnung zugrunde liegt. Das Spiegelungsvermögen für Elektronen hängt nach den Erfahrungen bei kalten Körpern von deren Auftreffgeschwindigkeit ab. Da hier die Elektronen verschiedene Geschwindigkeiten haben, ist S ein mittleres Spiegelungsvermögen, dessen Wert durch die Geschwindigkeitsverteilung der Elektroneu mitbestimmt ist. Im Falle der Strömung herrscht eine etwas andere Geschwindigkeitsverteilung, als im Gleichgewicht. Infolgedessen dürfen wir eigentlich für S in Gleichung 31) und 32) nicht denselben Wert einsetzen. Wenn wir dies doch tun, so berufen wir uns dabei auf die Voraussetzung 30 b) einer sehr kleinen Geschwindigkeit q.

Wir brauchen jetzt nur noch Gleichung (28) mit 35) und 35 a) zu vereinigen. Dabei können wir in 28) noch fortlassen den Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, weil wir nur stationäre Strömung in Betracht ziehen, und $\frac{1}{2} q^2$, weil wir nach 30 b) $\frac{1}{2} q^2$ gegen $\frac{kT}{m} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$ zu vernachlässigen haben. Für den Spannungsunterschied zwischen Anode und Kathode ergibt sich so wie beim Gleichgewicht

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{kT}{\varepsilon} \log \frac{\varrho_-}{\varrho_+}.$$

In erster Näherung ist nun

$$\log \frac{\varrho_-}{\varrho_+} = \log \frac{\varrho_-}{\varrho_g} - \log \frac{\varrho_+}{\varrho_g} = \frac{\varrho_- - \varrho_+}{\varrho_g}.$$

Sind beide Elektroden eben und einander parallel, so ist die Stromdichte i auf ihnen die gleiche und wir finden aus 35) und 35 a)

$$\varphi_+ - \varphi_- = \sqrt{2\pi m k T}\, \frac{1+S}{1-S} \frac{i}{\varrho_g \varepsilon}. \tag{36}$$

Eine Messung dieses Zusammenhanges liefert uns also, wie in der Einleitung angekündigt, die Größe $\frac{1-S}{1+S} \varrho_g$.

Sind aber die Elektroden konzentrische Zylinder von den Halbmessern r_+ und r_-, und der Höhe a, und hat der Strom

zwischen ihnen die Stärke J, so ist die Stromdichte i an ihnen $\frac{J}{2\pi r_+ a}$ und $\frac{J}{2\pi r_- a}$, so daß wir finden:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\sqrt{\frac{mkT}{2\pi}}\,\frac{1+S}{1-S}\,\frac{J}{\varrho_g \varepsilon}. \qquad 37)$$

Die Formeln 36) und 37) gelten zunächst in dem hier überall benutzten Lorentzschen Maßsystem. Sie übertragen sich aber unverändert auf das elektrostatische; denn das Potential φ transformiert sich dabei wie $\frac{1}{\varepsilon}$ und die Stromdichte i wie die Raumdichte ϱ_g, während alle anderen dort auftretenden Größen unverändert bleiben. Nun wird mit $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $k = 1{,}34 \cdot 10^{-16}$ gr cm^2 sec^{-2} grad^{-1}, $T = 2400^0$ grad, $|\varrho_g| = 1{,}4 \cdot 10^2$ (siehe die Tabelle auf S. 250 a. a. O.) und $|\varepsilon| = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten

$$\frac{\sqrt{2\pi m k T}}{\varrho_g\,|\varepsilon|} = 6{,}4 \cdot 10^{-13} \text{ cm sec.}$$

Die Stromdichte i, welche wir hier zur Größenordnungsschätzung in geringer Abänderung von 33) gleich $\varrho_g|q$ setzen dürfen, ist durch die Bedingung 30b), derzufolge bei $T = 2400$ grad

$$q << \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1{,}9 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1}$$

ist, an eine obere Grenze gebunden, die gegen $2{,}5 \cdot 10^9$ gr$^{\frac{1}{2}}$ cm$^{-\frac{1}{2}}$ sec^{-2} klein ist. Wir erfüllen diese Bedingung nun gewiß sehr gut, wenn wir $i = 10^7$ elektrostatische Einheiten (d. h. gleich $3 \cdot 10^{-3}$ Ampere: cm^2) wählen. Dann aber wird nach 37)

$$\varphi_+ - \varphi_- = 6{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ elektrostatische Einheiten}$$

d. h. gleich $2 \cdot 10^{-3}$ Volt, und zwar unter der ungünstigsten Annahme, daß das Spiegelungsvermögen $S = 0$ ist. Das sind Verhältnisse, bei denen man durchaus messen könnte.

Zusatz bei der Korrektur.

Bei der Aufzählung der bisherigen Versuche in der Einleitung haben wir die unmittelbar thermischen Messungen der Austrittswärme der Elektronen zu erwähnen vergessen[1]. Im Sinne der Richardsonschen Formel und ihrer Ableitung bestimmen sie die Konstante β im Exponenten von 3). Im Sinne unserer zum Gleichgewichtsgesetz 5a) führenden Überlegung besteht zwischen der Austrittswärme r eines Mols Elektronen und der Elektronenaffinität μ der Zusammenhang:

$$r = 2\,R\,T - \left(\mu - T\frac{d\mu}{d\,T}\right).$$

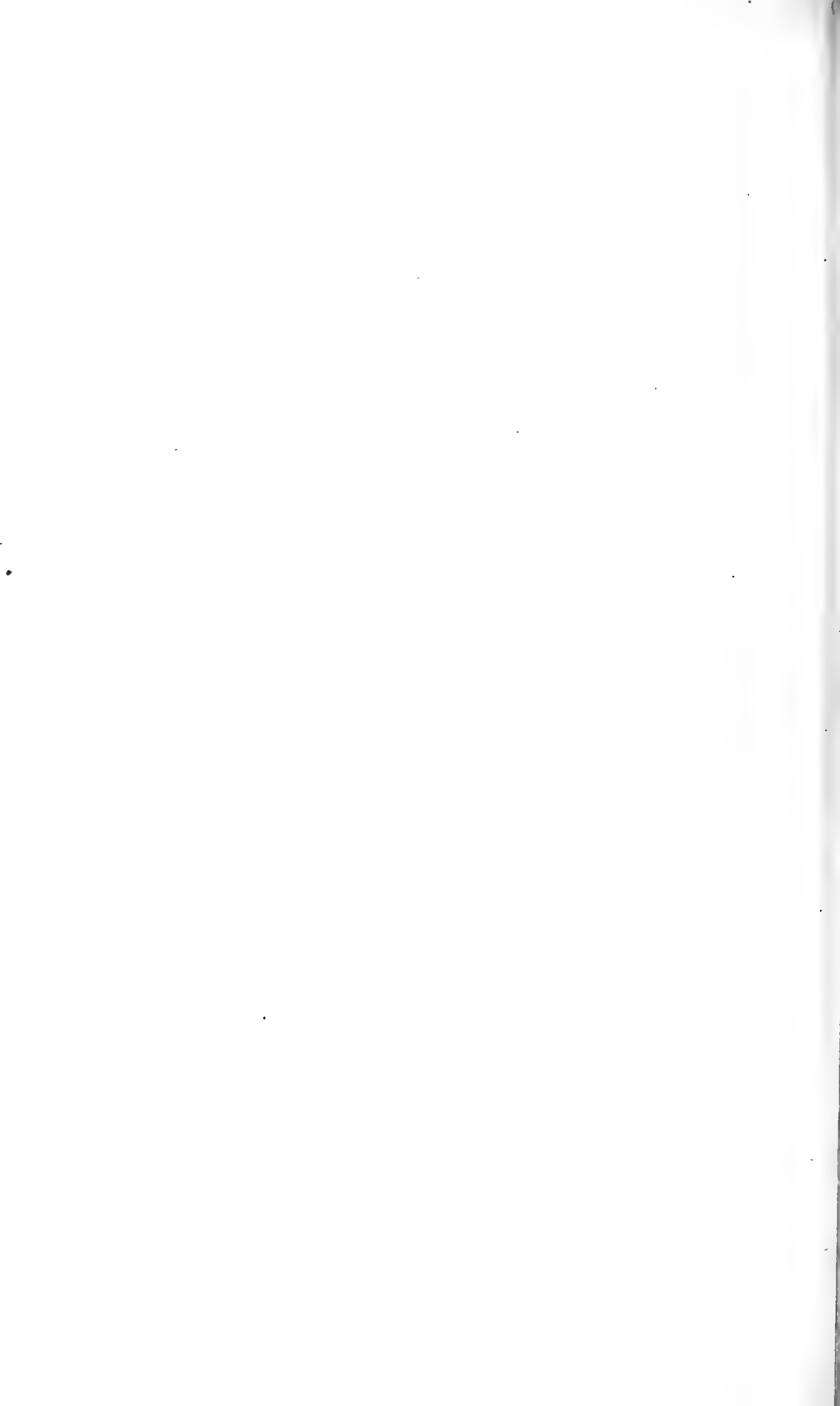
Denn die Energie $2\,R\,T$ nimmt ein Mol mit, wenn es durch ein hohes beschleunigendes Potential sogleich als Sättigungsstrom zur Anode überführt wird, und $-\left(\mu - T\frac{d\mu}{d\,T}\right)$ ist die Abnahme der Energie der Glühkathode bei diesem Vorgang. Wäre r als Funktion der Temperatur bekannt, so ließe sich aus der letzten Gleichung durch Integration μ bis auf eine Konstante bestimmen, und damit wäre nach 5a), wenn man sich noch auf den quantentheoretischen Wert

$$C^2 = \frac{(\pi\,m)^{\frac{3}{2}}\,(2\,k)^{\frac{5}{2}}}{(N\varepsilon)^2\,h^3}$$

stützt, ein gewisser Schluß auf die Grenzdichte ϱ_g möglich. Es scheint uns aber zweifelhaft, ob die bisherigen Versuchsergebnisse so verhältnismäßig weitgehende Folgerungen zulassen.

---

[1] A. Wehnelt und J. Jentzsch, Verh. d D. Phys. Ges., **10**, 605, 1908; **11**, 105, 1909; Annalen d. Phys., **28**, 537, 1909; H. Cooke und O. W. Richardson, Phil. Mag., **25**, 624, 1913 und **26**, 472, 1913; A. Wehnelt und A. Liebreich, Verh. d. D. Phys. Ges., **15**, 1057, 1913; Phys. Zeitschrift, **15**, 548, 1914.



Über die Interferenzfähigkeit von Spektrallinien vom Standpunkt der Quantentheorie.

Von **Paul S. Epstein.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 11. Januar 1919.

§ 1. Die Emission von Spektrallinien erfolgt nach den Vorstellungen von N. Bohr während des Überspringens eines Elektrons aus einer „statischen" Bahn in eine andere. Die Wellenlänge bestimmt sich dabei aus den Energien der Anfangs- und Endbahn nach der sogenannten Frequenzbedingung, und der rein phänomenologische Charakter dieser Bedingung bei gänzlichem Fehlen eines Einblickes in das Verhalten des Elektrons während des Überganges bildete den schwächsten Punkt der ganzen Bohrschen Theorie. Erst in jüngster Zeit sind unabhängig von N. Bohr[1]) selbst und von Rubinowicz[2]) Versuche gemacht worden, tiefer in den Mechanismus dieses Vorganges einzudringen, und die sich aus ihren Ansätzen ergebenden Folgerungen haben bereits zu einer bemerkenswerten Übereinstimmung mit der Erfahrung geführt[3]), welche zu einem weiteren Ausbau dieser Theorie ermutigt.

Dabei sind es zwei Gesichtspunkte, an welche man anknüpfen kann: Während Bohr im wesentlichen von der Äquivalenz von Elektrodynamik und Quantentheorie im

---

[1]) N. Bohr, Kgl. Danske Nidesk. Selsk. Skrifter. Naturvidensk. Afd., 8. Raekke, IV, 1. Eine Darstellung findet sich auch in meiner in Fußnote 3) erwähnten Arbeit.

[2]) A. Rubinowicz, Phys. Zs. 19, p. 445, 465, 1918.

[3]) Vgl. auch P. S. Epstein, Ann. d. Phys.

Gebiete großer Wellenlängen ausgeht, rückt Rubinowicz die Giltigkeit der Energie- und Impulsstätte in den Vordergrund, wobei er annimmt, daß die gesamte Energie in Form einer einzigen Wellenlänge emittiert werde. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man durch gleichzeitige Anwendung dieser beiden Gesichtspunkte zu einer noch etwas weiter gehenden Hypothese gedrängt wird, welche präzise Aussagen über die Interferenzfähigkeit von Spektrallinien gestattet. Die so gezogenen Folgerungen sind im Gebiete der Röntgenwellen experimentell prüfbar, wodurch sich eine Mitteilung derselben rechtfertigt.

§ 2. Die Mechanismen der Lichtemission durch Elektronen weisen, von den Standpunkten der klassischen Elektrodynamik und der Quantentheorie betrachtet, die folgenden Hauptunterschiede auf: In der Elektrodynamik erfolgt die Energieabgabe an den Äther kontinuierlich unter gleichzeitiger stetiger Veränderung der Bahn. Dagegen findet in der Quantentheorie die Bewegung im allgemeinen in stationären Bahnen ohne Energieverlust statt, und die Emission ist ein Ausnahmevorgang von begrenzter Dauer beim Übergang aus einer stationären Bahn in eine andere. Im übrigen sollen nach Bohr und besonders nach Rubinowicz die Gesetze der Elektrizitätslehre für diesen zeitlich begrenzten Vorgang der Lichtaussendung in weitgehendem Maße giltig bleiben. Ferner verlangt Bohr, daß beide Betrachtungsweisen für sehr große Wellenlängen zu den gleichen Resultaten in Bezug auf Schwingungszahl, Polarisation und relative Intensität der emittierten Spektrallinien führen. Die einfachste Hypothese über die quantentheoretische Emission, die wir machen können, um eine solche Übereinstimmung zu erreichen, besteht darin, daß im Grenzfall großer Wellenlängen mit dem Anfang dieses Vorganges die Elektrodynamik in ihre Rechte eingesetzt wird[1]) und die Bewegung des Elektrons so lange unter Energieausstrahlung nach den Regeln derselben verläuft, bis die

[1]) Über gewisse Einschränkungen vgl. § 4.

Energiestufe der nächsten stationären Bahn erreicht ist. Darin besteht unsere über Bohr und Rubinowicz hinausgehende Hypothese, auf welche sich unsere weiteren Folgerungen gründen.

Die Anfangs- und Endbahn eines Elektrons seien durch die Quantenzahlen m_1, m_2, m_3 bzw. n_1, n_2, n_3 gekennzeichnet. Den Grenzfall langer Wellen haben wir dann, wenn die Differenzen $m_1 - n_1$, $m_2 - n_2$, $m_3 - n_3$ im Verhältnis zu den Quantenzahlen selbst klein sind. D. h. die Anfangs- und die Endbahn sind praktisch identisch, und der geschilderte Vorgang stellt sich so dar, daß das Elektron in dieser Bahn zunächst ohne Energieverlust umläuft. Zu einem gewissen Zeitpunkt t_1 möge die Emission einsetzen; das Elektron bleibt praktisch immer noch in derselben Bahn, strahlt aber in einer in den nächsten Paragraphen näher erörterten Weise mit der Schwingungszahl ν, bis es zur Zeit t_2 die Energie

$$A(m_1, m_2, m_3) - A(n_1, n_2, n_3) = h\nu \tag{1}$$

verloren hat. Von da ab hört die Energieabgabe wieder auf. Für diesen Grenzfall läßt sich demnach die Emissionsdauer ohne Schwierigkeiten berechnen. Die unter diesen Voraussetzungen gewonnenen Formeln wollen wir auf den Fall kürzerer Wellenlängen übertragen; eine Extrapolation, welche sich bei verwandten Fragen in den Händen von Bohr bestens bewährt hat.

§ 3. Wir gehen daran, die eben angedeutete Berechnung für ein wasserstoffähnliches Atom durchzuführen. Dabei werden wir relativistische Massenveränderlichkeit und Mitbewegung des Kerns vernachlässigen, also nur die gewöhnliche Keplerellipse betrachten, welche ein Elektron um ein festes Coulombsches Zentrum (von der Ladung $+\varkappa e$) beschreibt.

Als begrifflich und rechnerisch einfachsten Fall wollen wir die Kreisbewegung und Bohrsche Übergänge zwischen benachbarten Kreisen ins Auge fassen. Die cartesischen Koordinaten des Elektrons in der Bahnebene stellen sich, wenn a den Bahnradius und φ das Azimut bedeutet, einfach so dar:

$$x = a \cos\varphi = a \cos \Omega (t - t_0),$$
$$(2) \qquad y = a \sin\varphi = a \sin \Omega (t - t_0).$$

Bedeutet $p\,(= n h / 2\pi)$ den φ zugeordneten Winkelimpuls, e und μ Ladung und Masse eines Elektrons, so sind bekanntlich Energie und Radius gleich

$$(3) \qquad A = -\frac{\mu \varkappa^2 e^4}{2 p^2}, \quad a = \frac{p^2}{\mu \varkappa e^2},$$

und daher die Umlaufsfrequenz (mittlere Bewegung)

$$(4) \qquad \dot{\varphi} = \Omega = \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\mu \varkappa^2 e^4}{p^3}, \text{ also}$$

$$(5) \qquad a = \left(\frac{\varkappa e^2}{\mu \Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Das Quadrat der Beschleunigung wird

$$j^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = a^2 \Omega^4,$$

was zu einem Energiegewinn durch Strahlung vom Betrage[1])

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 = -\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \Omega^4}{c^3}$$

pro Zeiteinheit führt. Der gesamte Verlust während der Dauer der Ausstrahlung $t_2 - t_1$ ist daher

$$A_1 - A_2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \Omega^4}{c^3} (t_2 - t_1).$$

Andererseits ist diese Energiedifferenz nach der Frequenzbedingung (1)

$$A_1 - A_2 = h\nu = \frac{h}{2\pi} \Omega.$$

Durch Vergleich dieser beiden Beziehungen folgt unter Berücksichtigung von (4) und (5)

$$(6) \qquad t_2 - t_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{h c^3}{2\pi} \cdot \left(\frac{\mu^2}{\varkappa^2 e^{10} \Omega^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^6 \frac{c^3}{\mu e^{10}} \frac{n^5}{\varkappa^4}.$$

---

[1]) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, p. 66, Leipzig 1905.

Damit haben wir die Dauer des Emissionsaktes ermittelt. Ist die Periode der Schwingung $\tau = 2\pi/\Omega$, so entspricht dieselbe einem Wellenzug von der Anzahl der Wellenlängen

$$\mathfrak{N} = \frac{t_2 - t_1}{\tau} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{hc}{2\pi e^2}\right)^3 \frac{n^2}{\varkappa^2}, \tag{7}$$

dessen Gesamtlänge durch den Ausdruck

$$l = c\,(t_2 - t_1) = \frac{3}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^6 \frac{c^4}{\mu\, e^{10}}\, \frac{n^5}{\varkappa^4} \tag{7 a}$$

dargestellt wird. Schließlich berechnet sich die wahre Linienbreite (Halbweite) zu

$$\varDelta\lambda = \frac{\lambda}{\mathfrak{N}} = \frac{8\pi^2 e^2}{3 c^2 \mu}\, n\,^{1)}. \tag{7 b}$$

Im Interesse einer bequemen Extrapolation auf kurze Wellenlängen wollen wir noch angeben, wie sich diese Größen durch die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\Omega$ ausdrücken. Es bedeute k eine Konstante mit dem numerischen Wert

$$k = \frac{3h}{16\pi^3}\left(\frac{2\pi c^7 \mu^2}{e^{10}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2{,}27 \cdot 10^9, \tag{8}$$

dann ist

$$l = \frac{k}{\varkappa^{\frac{2}{3}}}\lambda^{\frac{5}{3}}, \quad \mathfrak{N} = \frac{k}{\varkappa^{\frac{2}{3}}}\lambda^{\frac{2}{3}}, \quad \varDelta\lambda = \frac{\varkappa^{\frac{2}{3}}}{k}\lambda^{\frac{1}{3}}. \tag{9}$$

§ 4. Etwas komplizierter, aber um so interessanter gestalten sich die analogen Betrachtungen im allgemeinen Fall einer durch die Quantenzahlen n, n' und die Winkelkoordinaten w, w' gekennzeichneten elliptischen Bewegung. Ohne die Rechnungen auszuführen, wollen wir die Ausdrücke[2]) angeben, welche an Stelle von (2) für die kartesischen Koordinaten des Elektrons treten:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{h^2 (n + n')^2}{4\pi^2 \mu \varkappa e^2}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{i} (\pm 1)^i \sigma_i(\varepsilon) \cos(w + i w') - 2\varepsilon \cos(w - w')\right\}. \tag{10}$$

[1]) Genauer: $\varDelta\lambda = 0{,}89\,\lambda/\mathfrak{N}$; auf so große Genauigkeit kommt es uns indessen nicht an.

[2]) Die Rechnung verläuft analog der bei P. S. Epstein (Ann. d. Phys., 58, l. c.) für den Fall des Starkeffektes durchgeführten.

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\sigma_i(\varepsilon) = J_i(\varepsilon) - \frac{n'}{2(n+n')}[J_i(\varepsilon) - J_{i+2}(\varepsilon)], \tag{11}$$

wo ε die Exzentrizität ($\sqrt{1-\varepsilon^2} = n/n + n'$) und $J_i(\varepsilon)$ die i-te Besselsche Zylinderfunktion des Argumentes ε bedeutet. In der Tat reduziert sich diese Formel im Falle der Kreisbewegung ($n' = 0$, $\varepsilon = 0$, $w = \varphi$) auf den Ausdruck (2).

Wir erinnern daran, daß die Winkelkoordinaten lineare Funktionen der Zeit sind

$$w = \Omega t + \delta, \qquad w' = \Omega' t + \delta',$$

wobei die Beziehungen gelten

$$\Omega = \Omega' = \frac{\partial \Omega}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial p'} = \frac{8\pi^2 \mu \varkappa^2 e^4}{h^3(n+n')^3}, \tag{12}$$

wenn

$$A = -\frac{\mu \varkappa^2 e^4}{2(p+p')^2}, \quad p = \frac{nh}{2\pi}, \quad p' = \frac{n'h}{2\pi}. \tag{13}$$

Daher sind die Frequenzen der Partialschwingungen von (10) gleich

$$\pm(\Omega + i\Omega') = \pm(1+i)\Omega = Q\Omega. \tag{14}$$

Andererseits ergeben sich aus der Frequenzbedingung (1) im Grenzfall langer Wellen[1]) die Frenquenzen

$$(m-n)\Omega + (m'-n')\Omega'.$$

Aus seinem Prinzip, daß in diesem Bereich Elektrodynamik und Quantentheorie zu gleichen Resultaten führen, würde Bohr folgern, daß nur solche Übergänge möglich sind, bei welchen $m - n = \pm 1$, $m' - n' = \pm i = 0, 1, 2, 3 \ldots$[2]). Die Zahl Q bedeutet dann die gesamte Quantendifferenz

$$Q = (m+m') - (n+n'). \tag{15}$$

---

[1]) Vgl. N. Bohr, l. c. oder P. S. Epstein, l. c.

[2]) Daß in der Reihe (10) die azimutale Koordinate w nur mit dem Faktor 1 vorkommt, was auf $m - n = \pm 1$ führt, liegt in der Natur der Sache und folgt aus der Symmetrie des Problems. Es bietet auch in

Wenn Bohr verlangt, daß Intensität und Polarisation des bei irgend einem Quantenübergang emittierten Lichtes mit den Werten übereinstimmt, welche man elektrodynamisch aus dem entsprechenden Gliede der Fourierschen Reihe (10) berechnet, so gehen wir, gestützt auf die Annahme von Rubinowicz, daß nur eine einzige Wellenlänge emittiert wird, und gemäß den in §§ 1, 2 entwickelten Grundsätzen noch einen Schritt weiter und fordern, daß sich auch die Emissionsdauer elektrodynamisch berechnen läßt. Dies führt zu der folgenden Vorstellung vom Strahlungsvorgang: So lange das Elektron, ohne zu strahlen, in einer elliptischen Bahn kreist, enthält das System die Partialschwingungen der Reihe (10) gewissermaßen in latenter Form. Diese latenten Schwingungen haben aber nicht nur einen mathematischen Sinn, sondern auch eine physikalische Existenz insofern, als jede von ihnen unabhängig von den andern zum Strahlen gebracht werden kann. Die Energieabgabe vollzieht sich dann nach den Regeln der Elektrodynamik, bis die nächste resp. Energiestufe erreicht ist, um dann wieder aufzuhören.

Eine der Hauptschwierigkeiten für das Verständnis des Bohrschen Modells, auf welche besonders nachdrücklich von J. Stark[1]) hingewiesen wurde, bestand darin, daß die emittierte Wellenlänge durch die Endbahn bestimmt wird; das

---

dieser Hinsicht keinen Vorteil, anzunehmen, daß molekulare Ursachen eine Richtung auszeichnen, und in räumlichen Polarkoordinaten zu quanteln. In den Sommerfeldschen Feinstrukturformeln treten dann bekanntlich an Stelle von m und n die Summen zweier Quantenzahlen $m_1 + m_2$ bzw. $n_1 + n_2$ auf. Die entsprechende Rechnung zeigt, daß als azimutale Quantendifferenz sowohl $m_1 - n_1 = 0$ (axiale Schwingung) als auch $m_1 - n_1 = \pm 1$ (radiale Schwingung) auftreten kann, jedoch ist stets $(m_1 + m_2) - (n_1 + m_2) = \pm 1$. — Dagegen folgt aus den Beobachtungen, besonders aus denjenigen an der K-Serie der Röntgenstrahlen, mit Sicherheit, daß es auch Übergänge gibt, welche der Differenz $m - n = 0$ entsprechen. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Bohr gelingt es, diese Schwierigkeit durch Berücksichtigung von molekularen elektrischen Feldern zu überwinden.

[1]) J. Stark, Ann. d. Phys., 54, p. 113, 1918.

Elektron schien bereits die Endbahn vor ihrer Erreichung zu kennen und die Strahlungsabgabe entsprechend einzurichten. Auf Grund der eben dargelegten Auffassung kann man diesen Sachverhalt mit einem Vorstellungsinhalt verbinden: Die Wellenlängen, welche zur Emission gelangen können, sind bereits im System in Form der latenten Partialschwingungen prästabiliert. Je nachdem welche Partialschwingung angeregt wird, wird das System zwangläufig auf die eine oder die andere der möglichen Endbahnen geführt. Wir brauchen wohl kaum zu wiederholen, daß nur im Grenzfall langer Wellen die emittierte Frequenz vollständig mit derjenigen der entsprechenden latenten Schwingung übereinstimmt.

Eine der in § 3 durchgeführten vollständig analoge Rechnung führt zu den folgenden Ausdrücken für die charakteristischen Größen

$$
(16) \qquad \begin{cases} l' = \dfrac{k}{\varkappa^{\frac{2}{3}}} \dfrac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{\sigma_i^2 Q^3}, \quad \mathfrak{N}' = \dfrac{k}{\varkappa^{\frac{2}{3}}} \dfrac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{\sigma_i^2 Q^3}, \\[2ex] \qquad \Delta \lambda' = \dfrac{\varkappa^{\frac{2}{3}}}{k} \lambda^{\frac{1}{3}} \sigma_i^2 Q^3, \end{cases}
$$

welche sich nur um den Faktor $\sigma_i^2 Q^3$ (bzw. den reziproken Wert) von den entsprechenden im Falle der Kreisbewegung (9) unterscheiden. Falls die Exzentrizität ε in der Anfangs- und Endbahn verschieden ist, wird man dem Übergang zwischen beiden einen mittleren Wert von ε zuschreiben müssen. Es bleibt bis zu einem gewissen Grade willkürlich, welche Art der Mittelung man wählt; auf Grund unserer bei der Berechnung von Intensitäten gewonnenen Erfahrung[1]) wollen wir einfach das arithmetische Mittel der Werte σ_i^2 für den Anfangs- und den Endzustand benutzen.

Z. B. wollen wir $\sigma_i^2 Q^3$ für den Übergang vom $m = 2$, $m' = 2$ zu $n = 1$, $n' = 1$, welcher uns noch in § 7 beschäftigen wird, berechnen. In diesem Falle ist $i = 1$, $Q = 2$ und

[1]) P. S. Epstein, l. c.

für Anfangs- und Endbahn übereinstimmend $\varepsilon = 0{,}87$, so daß die Unsicherheit der Mittelung wegfällt. Daher:

$$Q^3 \sigma_i^2 = 8\left[\tfrac{3}{4} J_1(0{,}87) + \tfrac{1}{4} J_3(0{,}87)\right]^2 = 0{,}72.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den Übergang von $m_2 = 2$, $m' = 1$ zu $n = 1$, $n' = 1$. Die Exzentrizitäten werden bzw. 0,75 und 0,87, was mit $i = 0$, $Q = 1$ auf die beiden Werte von σ_i führt:

$$1) \quad \sigma_i = \left[\tfrac{5}{6} J_0(0{,}75) + \tfrac{1}{6} J_2(0{,}75)\right] = 0{,}73,$$

$$2) \quad \sigma_i = \left[\tfrac{3}{4} J_0(0{,}87) + \tfrac{1}{4} J_2(0{,}87)\right] = 0{,}64.$$

Daraus ergibt sich als Mittelwert der Ausdrücke $Q^3 \sigma_i^2$ die Zahl 0,47.

§ 5. Die in den §§ 3, 4 bestimmten Größen l und $\Delta\lambda$ wollen wir als wahre Kohärenzlänge und wahre Linienbreite bezeichnen; sie kämen nur dann in reiner Form zur Geltung, wenn sich alle an der Strahlung beteiligten Atome in Ruhe befänden. Unter den tatsächlichen Verhältnissen überlagert sich ihnen jedoch bekanntlich ein sekundärer von dem regellosen Bewegungszustande der Atome nach dem Dopplerschen Prinzip herrührender Effekt, der zu einer Verkürzung der Kohärenzlänge und entsprechender Verbreiterung der Halbweite führt. Und zwar würde selbst ein monochromatischer, unendlich langer Wellenzug durch diese Ursache bis zur sogenannten thermokinetischen Kohärenzlänge

$$l_t = 1{,}22 \cdot 10^6 \lambda \sqrt{\frac{M}{T}} \tag{17}$$

verkürzt werden (wo M das betreffende Atom- bzw. Molekulargewicht und T die absolute Temperarur des leuchtenden Mediums bedeutet), während die thermokinetische Halbweite der Linie durch

$$\Delta_t \lambda = 0{,}82 \cdot 10^{-6} \lambda \sqrt{\frac{T}{M}} \tag{17'}$$

gegeben ist.

Im Gebiete sichtbarer Wellen überwiegt $\Delta_t \lambda$ in solchem Maße über die wahre Linienbreite $\Delta\lambda$, daß die letztere vernach-

lässigt werden kann, so daß l_t und $\Delta_t \lambda$ die effektiv beobachtbaren Werte darstellen. In der Tat haben Fabry und Buisson[1]) die Kohärenzlängen an Linien von Helium, Argon und Krypton sowohl bei Zimmertemperatur als bei Kühlung durch flüssige Luft interferometrisch untersucht und eine sehr gute Übereinstimmung mit den nach Formel (17) berechneten Werten von l_t gefunden. Nun sieht man aber beim Vergleich der Ausdrücke (17) und (9), daß bei festgehaltenen M und T (derselbe Stoff bei derselben Temperatur) l mit der Wellenlänge viel schneller abnimmt als l_t, und die Rechnung zeigt, daß im Bereiche der Schumannwellen beide Längen bereits die gleiche Größenordnung aufweisen. Z. B. gestalten sich für die Grundlinien (und die den Kreisbahnen entsprechenden Komponenten) des Wasserstoffs die Verhältnisse wie folgt:

Ritz-Paschen-Serie	$\lambda = 18571$,	$l = 1370$ cm,	$l_t = 22{,}6$ cm
Balmer- „	6563,	242 „	8,0 „
Ritz-Lyman- „	1216,	14,6 „	1,5 „

(wobei l_t für die Temperatur $T = 100^0$ abs. berechnet ist). Im extremen Ultraviolett ist also das Verhältnis $l : l_t$ auf rund 10 gesunken, und dabei liegen bei Wasserstoff wegen seines niedrigen Atomgewichts die Verhältnisse noch besonders ungünstig. Auf Grund eines eingehenden Studiums der spektralen Besonderheiten der Edelgase scheint es dem Verfasser wahrscheinlich, daß die Atome dieser Elemente in strahlendem Zustande insofern eine gewisse Wasserstoffähnlichkeit besitzen, als ihr äußerster Elektronenring durch ein einziges Elektron gebildet wird. Faßt man also in erster ganz grober Annäherung den Kern mit den übrigen Elektronen zu einem einwertigen Kern zusammen, so kann man unsere Theorie auch auf die Grundlinien der entsprechenden Serien der Edelgase anwenden. Für Helium hat ja Lyman[2]) im Schumannbereich und bei noch kürzeren, zwischen 900 und 600 Å liegenden Wellenlängen zahlreiche Linien gefunden, dagegen sind Argon und

[1]) Ch. Fabry et Ch. Buisson, C. R. 154, p. 1224, 1912.
[2]) Th. Lyman, Proc. American Nat. Acad. 1, p. 368. 1915.

Krypton in dieser Richtung noch nicht untersucht. Allein auch für das schwere Krypton wäre die thermokinetische Kohärenzlänge in diesem Gebiete nur etwa 16,5 cm, also kaum länger als die wahre, so daß das extreme Ultraviolett für eine Prüfung unserer Theorie nicht in Betracht kommt.

§ 6. Bevor wir uns der Diskussion der Verhältnisse im Bereich der Röntgenwellen zuwenden, wollen wir noch einige Worte darüber sagen, wie sich unsere Theorie zu den direkten Messungen der Emissionsdauer in der Balmerserie, wie sie von J. Stark[1]) ausgeführt wurden, verhält. Unter Voraussetzung eines exponentiellen Abfalls der Intensitäten während der Strahlung findet Stark, daß die Zeit, während welcher die Intensität auf $1/e$ sinkt, mit der Ordnungszahl der Linie zunimmt. Bei den Linien H_α und H_β läßt sich für diese Dauer nur eine obere Grenze angeben, für H_γ und H_δ sind ihre ungefähren Werte $2 \cdot 10^{-7}$ bzw. $4 \cdot 10^{-7}$ sec. Diese Zahlen bezeichnet Stark als scheinbare Leuchtdauer, weil sie „in dem Falle, daß der maximale Wert der Intensität einer Serienlinie nicht unmittelbar nach dem erregenden Stoß, sondern erst merkliche Zeit später sich einstellt", diese bis zur Erreichung des Maximalwertes verfließende Zeit mit enthält. Vom Standpunkte der Quantentheorie würden wir sagen: die von Stark beobachteten Leuchtzeiten umfassen die ganze Periode vom Moment, in welchem die Vorbedingung des Strahlens dadurch geschaffen war, daß das Elektron in eine äußere Bahn befördert wurde, bis zum Ende des Strahlungsvorgangs; sie setzen sich also aus den Zeiten des Umlaufens in der Anfangsbahn und des eigentlichen Leuchtens zusammen. Da es jedoch allen unseren Anschauungen widerspricht, daß sich ein Elektron in einer weiteren Bahn länger ungestört bewegen sollte als in einer engeren, so müssen wir die Verlängerung der Leuchtzeit mit der Seriennummer der Linie auf Rechnung der wahren Leuchtdauer setzen.

Es ist nun interessant, daß unsere Theorie qualitativ zu demselben Resultat führt, wie man aus der folgenden Tabelle

---

[1]) J. Stark, Ann. d. Phys., 49, p. 731, 1916.

ersieht, in der die nach (16) berechneten Leuchtzeiten $t_2 - t_1 = l/c$ für die verschiedenen in der Reihe (10) enthaltenen Komponenten der ersten Linien der Balmerserie zusammengestellt sind.

	$(n, n') = (2,0)$ $m = 3$		$(n, n') = (2,0)$ $m = 1$		$(n, n') = (1,1)$ $m = 2$		Mittelwert
	m'	$t_2 - t_1$	m'	$t_2 - t_1$	m'	$t_2 - t_1$	$t_2 - t_1$
H_α	0	$0{,}81 \cdot 10^{-8}$	2	$1{,}47 \cdot 10^{-7}$	1	$1{,}72 \cdot 10^{-8}$	$1{,}59 \cdot 10^{-8}$
H_β	1	1,63 "	3	0,41 "	2	0,68 "	1,29 "
H_γ	2	$0{,}81 \cdot 10^{-7}$	4	1,50 "	3	3,07 "	$0{,}58 \cdot 10^{-7}$
H_δ	3	$1{,}19 \cdot 10^{-6}$	5	$1{,}76 \cdot 10^{-6}$	4	$5{,}28 \cdot 10^{-7}$	9,08 "

Für die Bestimmung des Mittelwertes wurde jede Komponente mit einem ihrer Intensität (σ_i^2) proportionalen Gewicht in Rechnung gesetzt. Man erkennt, daß die theoretischen Ergebnisse sowohl in ihrem Gange von Linie zu Linie als auch in der Größenordnung der Absolutwerte mit den erwähnten Messungsresultaten übereinstimmen. Eine weitergehende Übereinstimmung dürfen wir auch gar nicht erwarten: Einerseits können die theoretischen Werte wegen der Extrapolation auf kurze Wellenlängen und der Unsicherheit des Mittelungsverfahrens bei Berechnung der Koeffizienten $\sigma_i(\varepsilon)$ keine große Zuverlässigkeit beanspruchen. Andererseits stellen die Starkschen Zahlen gar nicht die eigentliche Leuchtdauer dar; denn abgesehen davon, daß sie die Umlaufszeit in der äußeren Bahn mit enthalten, sind sie unter der Voraussetzung exponentiellen Abklingens der Intensitäten ermittelt, welche für unsere Theorie gar nicht zutrifft, und sollen nur über die Zeit des Abfalls der Lichtstärke um $1/e$ orientieren. Aus diesem Grunde sind wir geneigt, die Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Werte für eine genügende zu halten und in ihr eine Bestätigung unserer Theorie zu erblicken.

§ 7. Eine schärfere Prüfung unserer Theorie scheinen die Verhältnisse im Bereiche der Röntgen-Strahlen zuzulassen. Entsprechend den in § 5 über die Abhängigkeit der Kohärenz-

länge und Linienhalbweite von der Wellenlänge gemachten Bemerkungen dominiert hier die wahre Linienbreite in solchem Maße über die thermokinetische, daß man von dem letzteren Effekt ganz absehen kann. Es fragt sich nur, inwiefern diese Erscheinungen hier überhaupt der Beobachtung zugänglich sind. Offenbar kann man nicht daran denken, Kohärenzlängen von Röntgen-Strahlen auf interferometrischem Wege zu messen; wir werden aber gleich sehen, daß es wohl möglich ist, die Erscheinung durch Messung von Linienbreiten zu erfassen.

Nach Gleichung (7 b) ist die Halbweite der zu Kreisbahnen gehörigen Linien von der Ordnungszahl $\varkappa$ unabhängig und nur der Quantenzahl proportional. Mit Hilfe der für die Extrapolation geeigneteren Formeln (9) berechnet sie sich für die entsprechenden Linien (in Sommerfeldscher Bezeichnung α, in Siegbahnscher α_1) der K-, L- und M-Serien zu

$$\begin{array}{ll} K_\alpha & \Delta\lambda = 0{,}001\ \text{Å} \\ L_\alpha & \phantom{\Delta\lambda = {}} 0{,}002\ \text{Å} \\ M_\alpha & \phantom{\Delta\lambda = {}} 0{,}003\ \text{Å} \end{array}$$

Die entsprechende Kohärenzlänge ist jedoch von der Wellenlänge abhängig. In der L-Serie und für schwere Elemente hat z. B. λ die Größenordnung 1,5 Å, was $l = \lambda^2 / \Delta\lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm ergibt.

Um die Abmessungen, welche den angegebenen Breiten im Röntgen-Spektrogramm entsprechen, zu ermitteln, müssen wir auf die Entstehung der Interferenzen am Kristall eingehen. Bei monochromatischem Licht ist die Röntgen-Optik des Kristalls von seiner Regelmäßigkeit abhängig, da ein Kristall nur auf kleinen Strecken homogen ist. Die angegebene Kohärenzlänge entspricht für Steinsalz ($d = 2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm) etwa 400 für Gips ($d = 7{,}621 \cdot 10^{-8}$ cm) nur 150 Gitterkonstanten. Wir wollen annehmen, daß diese relativ regelmäßigen Kristalle auf bedeutend längeren Strecken homogen sind als diese. D. h. wir stellen sie uns als Gemisch von vollständig regelmäßigen Kriställchen vor, deren Dimensionen (D) die Kohärenzlänge der K- und L-Linien um ein mehrfaches übertreffen. In welchem

Maße diese Vorstellung zutrifft, werden wir später sehen; dagegen scheint es uns zweifelhaft, ob dies für die M-Serie richtig ist, in der die Wellenlängen auch bei ziemlich schweren Elementen bis zu 10 $Å$ (entsprechend $l = 3 \cdot 10^{-4}$ cm) betragen. Denken wir uns nun das einfallende Licht (nach Fourier) spektral zerlegt und betrachten das Beugungsbild, welches der Kristall von einem monochromatischen Bestandteil desselben erzeugt, so erhält dasselbe durch die Begrenzung der Kriställchen eine endliche Breite von der Größenordnung λ^2/D, welche jedoch nach dem eben Gesagten schmal ist im Verhältnis zur wahren Linienbreite $\Delta\lambda\,(=\lambda^2/l)$. Wir werden also im Spektrogramm im wesentlichen die wahre Verteilung der spektralen Intensitäten und die wahre Linienbreite erhalten. Diesen Sachverhalt wollen wir ausdrücken, wenn wir sagen, daß die Röntgen-Linien unter den gemachten Voraussetzungen vollständig aufgelöst werden.

Aus der Vollständigkeit der Auflösung ergeben sich wichtige praktische Konsequenzen: Nach obigem hat eine Linie bei Anwendung beliebiger Kristalle für die Herstellung der Spektrogramme in der Skala der Wellenlängen gemessen stets die gleiche Breite, nämlich die wahre Halbweite $\Delta\lambda$. Hieraus folgt, daß auch das Verhältnis der Breite einer Linie zum Abstand bis zu einer benachbarten Linie in allen Spektrogrammen konstant ist. D. h. wenn zwei Linien übereinander greifen, können wir sie durch keinerlei Kunstgriffe trennen, welche Gitterkonstanten, Reflexionswinkel oder spektrale Ordnungen wir auch verwenden mögen. Jedes neue Spektrogramm wird nur eine Wiederholung des ersten in verändertem Maßstabe sein. Dabei sehen wir allerdings vom geometrisch-optischen Einfluß der Spaltbreite, Eindringungstiefe etc. ab und setzen voraus, daß diese Bedingungen geeignet gewählt sind. Das Bedenken, daß die Verhältnisse durch die Wärmebewegung im Kristall getrübt werden könnten, erledigt sich durch das Hauptresultat der Debyeschen, den Temperatureinfluß berücksichtigenden Theorie: Die ungeordnete Bewegung der Kristallatome

beeinflußt nicht die Lage und Schärfe der Interferenzen, sondern setzt nur deren Intensität herab[1]).

Die Breite im Spektrophotogramm, welche $\Delta\lambda$ in der Skala der Wellenlängen entspricht, ergibt sich ohne weiteres aus der Braggschen Beziehung

$$2\,d\sin\varphi_k = k\lambda, \tag{18}$$

wo k die Ordnung des Spektrums, φ_k den von der Kristallfläche aus gemessenen sogenannten „Glanzwinkel" in der k-ten Ordnung und d die Gitterkonstante bedeutet. Durch Differentiation erhält man für die Winkelhalbweite

$$\Delta\varphi_k = \frac{k\,\Delta\lambda}{2\,d\cos\varphi_k},$$

falls der Kristall fest steht; ist dagegen der Spalt fest und der Kristall beweglich, wie dies gewöhnlich der Fall ist, so muß die Winkelbreite verdoppelt werden:

$$\Delta\varphi_k = \frac{k\,\Delta\lambda}{d\cos\varphi_k}.$$

Bezeichnen wir schließlich mit r die Entfernung vom Kristall zur photographischen Platte, so wird die Linienbreite auf der letzteren

$$\delta = r\cdot\Delta\varphi_k = \frac{k\,r\,\Delta\lambda}{d\cos\varphi_k}. \tag{19}$$

Für $d = 2{,}814\cdot 10^{-8}$ cm (Steinsalz), $r = 16$ cm (der Anordnung von Siegbahn und Friman[2]) entsprechend), $k = 1$ und kleine Glanzwinkel ($\cos\varphi_k = 1$) ergeben sich für δ die numerischen Werte 0,057 mm für K_α, 0,11 mm für L_α, 0,17 mm für M_α. In Wirklichkeit sind jedoch die Winkel φ auch in der ersten Ordnung nicht sehr klein und für leichtere Elemente sogar ziemlich groß; z. B. hat L_α für Silber $\lambda = 4{,}146$ Å, $\varphi_1 = 47^\circ\ 27'$, 30, was einer Halbweite von 0,16 mm entspricht. Durch geeignete Wahl von k und d kann man günstige Bedingungen für eine Prüfung der Beziehung (19) erreichen.

---

[1]) Vgl. M. v. Laue, Enzykl. der Math. Wiss., V, 24, p. 478.

[2]) M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys., 49, p. 611, 1916.

Eine qualitative Bestätigung unserer Theorie bildet nach einer privaten Mitteilung von Herrn M. Siegbahn der Umstand, daß man einen Dublettabstand experimentell am besten aus einer Aufnahme in erster Ordnung bestimmen kann. Für eine direkte quantitative Prüfung ist nach Meinung dieses Forschers die Linie L_β (oder in Siegbahnscher Bezeichnung L_{β_1}) am besten geeignet. Wir wollen deshalb angeben, wie groß die Halbweite dieser Linie nach unserer Theorie wird. Die Endbahn entspricht hier nach Sommerfeld den Quantenzahlen $n = 1$, $n' = 1$, soll die Linie in unserer Reihe (10) enthalten sein, so müssen wir (da $m + m' = 3$ sein soll) $m = 2$, $m' = 1$ setzen. Es ist dies als das zum Schlusse des § 4 betrachtete Beispiel, welches $Q^3 \sigma_1^2 = 0{,}47$ ergab: Die Linienbreite von L_β verhält sich zu derjenigen von L_α wie $0{,}47\, \lambda_\beta^{\frac{1}{3}} : \lambda_\alpha^{\frac{1}{3}}$. Dagegen bezieht sich die auf derselben Seite berechnete Zahl $Q^3 \sigma_1^2 = 0{,}72$ auf die Linie L_δ (bei Siegbahn L_{γ_1}).

Spektrale Intensitätskurven für Röntgen-Linien sind bis jetzt nur von Stenström[1]) für die M-Serie veröffentlicht worden. In den Elementen von Ur bis W scheinen zwei Linien, die nach Siegbahn mit α und β bezeichnet werden, eine für die verschiedenen Stoffe leidlich analoge Struktur zu besitzen. Stenström gibt an, daß diese Linien mit fallender Ordnungszahl $\varkappa$ des Elementes immer breiter und diffuser werden. Es geht jedoch aus seinen Protokollen hervor, daß in derselben Reihenfolge auch die Glanzwinkel φ_1 anwachsen, unter denen diese Linien an Steinsalz reflektiert werden. Daher entsteht die Frage, ob das scheinbare Diffuswerden nicht einfach eine Folge wachsender Dispersion ist, entsprechend dem Faktor $1/\cos \varphi_1$ in unserer Formel (19). Soweit die Genauigkeit der von Stenström mitgeteilten Kurven einen Rückschluß gestattet, bestätigt sich dies durchaus: Die Breite der Linien α und β steht in einem konstanten Verhältnis zu ihrem Abstand, und da letzterer einen nahezu konstanten Wellenlängenwert hat, so ist auch die in der Skala der Wellenlängen gemessene

---

[1]) W. Stenström, Ann. d. Phys., 57, p. 347, 1918.

Linienbreite von der Ordnungszahl k unabhängig, wie es Formel (19) fordert. Bei den leichteren Elementen wird die Beurteilung der Linienbreite schwieriger, weil die Komponenten, aus denen die komplexen Linien α und β zusammengesetzt sind, hier bereits merklich auseinander rücken; indessen hat man auch hier den Eindruck, daß die Breite der einzelnen Komponenten dem Abstande $\alpha\beta$ proportional läuft. Der Umstand, daß die Linien bei kleineren $\varkappa$ aufgelöst werden, widerspricht unserer Theorie in keiner Weise, denn er ist in den Eigenschaften des Röntgen-Lichtes selbst und nicht in der Art der Beugung am Kristall begründet. Die Komponenten rücken mit fallender Ordnungszahl auseinander, trotzdem ihre Breite konstantes Wellenlängenmaß hat, weil ihr in Wellenlängen gemessener Abstand von Element zu Element als Funktion der Ordnungszahl variiert. Nach Angabe von Stenström ist nämlich die Entfernung $\alpha\alpha'$ für *Th* 0,015 Å, *Jr* 0,022 Å, *Ta* 0,029 Å, *Ad* 0,032 Å. Aus der Übereinstimmung mit Formel (19) dürfen wir indessen keine Schlüsse zu Gunsten unserer Theorie ziehen: Alle Aufnahmen sind nämlich bei Stenström am selben Kristall und in derselben (ersten) Spektralordnung gemacht. Und unter diesen Umständen führt die Voraussetzung, daß die Kohärenzlänge größer ist als die Dimensionen der homogenen Kriställchen und daß deren kürzeste Abmessungen (D) senkrecht zur Oberfläche des Gesamtkristalls orientiert waren, zu derselben Formel (19), nur daß unter $\Delta\lambda$ eine durch die Kriställchen gegebene Linienbreite (λ^2/D) zu verstehen ist. Da bei Erzeugung der Oberfläche durch Spalten oder Schleifen die Normale genügend ausgezeichnet wird, halten wir dies sogar für wahrscheinlicher und haben die Stenströmschen Messungen nur deshalb besprochen, weil man aus ihnen Rückschlüsse auf eine möglichst zweckmäßige Versuchsanordnung zur Prüfung unserer Theorie in der K- und L-Serie ziehen kann. Aus der Aufnahme an Aldebaranium (Linie β_1) können wir nämlich den Absolutwert der Halbweite zu etwa 1,7 mm ermitteln, was in Wellenlängen 0,030 Å entspricht. Dies ist zehn Mal so viel als der theoretisch für die wahre Halbweite zu erwartende Wert und könnte

zum Teil auf unvollständiger Auflösung und komplexer Struktur der Linie, zum Teil auf dem eben erwähnten Einfluß der Inhomogenitäten beruhen. Wir wollen den ungünstigsten Fall annehmen, daß die Verbreiterung gänzlich auf Rechnung der Kriställchen zu setzen ist, dann erhalten wir für die kleinste Dimension derselben $D = \lambda^2/0{,}030 = 2{,}1 \cdot 10$. Das ist nur doppelt so viel als der oben für $\lambda = 1{,}5$ Å berechnete Wert der Kohärenzlänge in der L-Serie. Man wird daher gut tun, für die Prüfung an Steinsalzkristallen nur Wellenlängen von 1 Å und weniger zu benutzen, für welche man ein Verhältnis D/λ größer als 4,5 findet.

Indem wir alles über das Verhältnis der einschlägigen Experimentaluntersuchungen zu unserer Theorie gesagte zusammenfassen, können wir feststellen, daß deren bisherige Ergebnisse in allen Punkten zwanglos mit unserer Theorie zu vereinbaren sind. Dagegen können nur speziell zu diesem Zwecke unternommene Messungen endgiltig über die Brauchbarkeit derselben entscheiden. Solche experimentellen Prüfungen scheinen uns um so wünschenswerter, als die berührten Probleme, auch abgesehen von unseren speziellen Vorstellungen, ein großes Interesse besitzen.

München, Januar 1919.

Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.

Von A. Rosenthal.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 11. Januar 1919.

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes, die an den in der Analysis situs wichtigen Begriff des irreduziblen Kontinuums anknüpft. (Unter einem zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuum versteht man nach L. Zoretti bekanntlich ein Kontinuum, das kein a und b umfassendes Teilkontinuum enthält.) Die geschlossene Jordansche Kurve setzt sich aus zwei einfachen Kurvenbogen zusammen; diese sind beschränkte und zwischen ihren Endpunkten irreduzible Kontinua, die noch eine geeignete Nebenbedingung erfüllen, etwa kein Häufungskontinuum zu enthalten. Durch Weglassung dieser Nebenbedingung gelangt man also allgemein zu zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ der Ebene, die nur a und b gemeinsam haben. Die Vereinigung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ kann nun allerdings beliebig viele, sogar unendlich viele Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ in der Ebene bestimmen. Wir werden aber sehen, daß trotzdem stets *genau zwei* ausgezeichnete Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ („Hauptgebiete") vorhanden sind, die nämlich von der *ganzen* Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt werden.

Die von $\mathfrak{C}$ hervorgerufene Teilung der Ebene hatte übrigens schon Herr L. Zoretti ins Auge gefaßt[1]). Aber der von ihm

[1]) L. Zoretti, Acta math. 36 (1912/13), p. 261/263.

hierüber aufgestellte Satz ist nicht ganz korrekt[1]), würde zudem auch bei einwandfreier Fassung nicht gerade viel besagen[2]) und sein Beweisgang ist nicht richtig[3]) (wie überhaupt in der betreffenden Abhandlung mancherlei Unrichtiges enthalten ist[4])).

---

[1]) Zorettis Satz lautet: „La réunion de deux continus irréductibles entre deux points qui sont leurs seuls points communs partage le plan en deux aires cantoriennes [= flächenhafte Kontinua] dont elle constitue l'ensemble des points frontières (c'est à dire non intérieurs)." Aber eine bestimmte derartige Teilung der Ebene in zwei flächenhafte Kontinua wird im allgemeinen durch $\mathfrak{C}$ nicht bewirkt; vielmehr kann eine solche Teilung (bei unendlich vielen Komplementärgebieten von $\mathfrak{C}$) noch auf unendlich vielfache Weise möglich sein; es kommt nämlich darauf an, in welcher Verteilung die übrigen Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ den beiden „Hauptgebieten" hinzugefügt werden.

[2]) Abgesehen von der erwähnten Vieldeutigkeit: Ist $\mathfrak{K}$ ein linienhaftes Kontinuum der Ebene, dessen Komplementärmenge sich in zwei elementenfremde Mengen K_1 und K_2 zerlegen läßt, so daß $(K_1 + \mathfrak{K})$ und $(K_2 + \mathfrak{K})$ zwei flächenhafte Kontinua darstellen, deren Begrenzungen mit $\mathfrak{K}$ identisch sind, — dann braucht noch immer kein einziges Komplementärgebiet von $\mathfrak{K}$ zu existieren, das von dem ganzen $\mathfrak{K}$ begrenzt wird. Beispiel: Drei sich von außen paarweise berührende Kreise; die Vereinigung der drei Kreislinien sei $\mathfrak{K}$, die drei Kreisgebiete bilden zusammen K_1, die beiden Restgebiete K_2.

[3]) Der Kern des Beweises ist unrichtig, nämlich die Behauptung, daß die beiden dort durch Näherungspolygone konstruierten Kontinua D und D' keine inneren Punkte gemeinsam haben können. Der Fehlschluß befindet sich l. c., p. 262, Zeile 2—4 v. o. und Zeile 7—3 v. u. Man sieht den Sachverhalt deutlich an folgendem Beispiel: Zwei von den Punkten a und b ausgehende, sich um eine Kreislinie $\mathfrak{K}_0$ unendlich oft asymptotisch herumwindende Spiralen bilden zusammen mit $\mathfrak{K}_0$ ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$, die Strecke ab ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_2$; die Vereinigung von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sei $\mathfrak{C}$. Dann kann man $\mathfrak{C}$ durch eine Folge von Polygonen D_ε (Seitenlänge $< \varepsilon$; ε nehme gegen 0 ab) approximieren, die abwechselnd $\mathfrak{K}_0$ ausschließen bzw. einschließen.

[4]) Z. B. der Satz, l. c. p. 258: „Toute portion continue d'un continu irréductible est elle-même irréductible entre deux de ses points" ist falsch. Gegenbeispiel: Das in 3) erwähnte irreduzible Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthält den Kreis $\mathfrak{K}_0$, der zwischen keinen zwei seiner Punkte irreduzibel ist. — Ferner: l. c., p. 267 wird für den dreidimensionalen Raum

Alle unsere Betrachtungen werden sich in der Ebene abspielen. Unter 𝔊 werden wir im folgenden stets ein ebenes, einfach zusammenhängendes Gebiet verstehen, dessen Begrenzung B beschränkt ist und aus mehr als einem Punkt besteht.

In § 1—3 des folgenden werden zunächst einige allgemeine Sätze über die Teilung von 𝔊 durch in 𝔊 liegende „nicht abgeschlossene Kontinua" bzw. „lückenlos zusammenhängende Mengen" C gebracht. In § 1 wird insbesondere gezeigt, daß, wenn C eine punkthafte Menge von Randpunkten, mindestens aber zwei solche Punkte approximiert, dann in 𝔊 stets mindestens zwei Teilgebiete durch C bestimmt werden. § 2 enthält einige Hilfssätze über den Gebietsrand und § 3 vor allem den Satz: Wenn C zwei Punkte des Gebietsrandes approximiert und ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene bestimmt, dann wird 𝔊 in genau zwei Teilgebiete durch C zerlegt, — woraus noch einige verwandte Sätze folgen. Die Anwendung auf irreduzible Kontinua ergibt dann in § 4 den oben erwähnten Hauptsatz und Verallgemeinerungen; zugleich wird durch ein einfaches Beispiel gezeigt, daß die Bedingung der Beschränktheit für den Hauptsatz und andere unserer Sätze wesentlich ist.

§ 1. Minimalzahl der Teilgebiete bei gewissen Gebietsteilungen.

Herr C. Carathéodory hat die Struktur der Begrenzung B des Gebietes 𝔊 in allgemeiner Weise eingehend untersucht[1]) und er hat gezeigt, daß man diesen Rand B als eine Gesamt-

---

eine Definition einer „Linie" gegeben, nach welcher die Kugeloberfläche eine „Linie" wäre!

Bezüglich früherer Untersuchungen L. Zorettis über irreduzible Kontinua siehe die wertvollen kritischen Bemerkungen von L. E. J. Brouwer, Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 565/6 und Proc. Amsterdam Akad. 1911, p. 144/5.

[1]) C. Carathéodory, Math. Ann. 73 (1913), p. 323/370 [„Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete"]. — Ein ähnliches Ziel verfolgen auch die ungefähr gleichzeitigen Überlegungen des Herrn E. Study im § 8 seiner Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der

heit gewisser zyklisch geordneter, elementarer Gebilde auffassen kann, die er „Primenden"[1]) nennt. Herr P. Koebe[2]) bezeichnet sie recht zweckmäßig als „Randelemente", eine Bezeichnung, der wir uns hier anschließen wollen. Begriff und einfachste Eigenschaften dieser „Randelemente" werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Wir bemerken zunächst, daß (wie unmittelbar ersichtlich) die von irgend einer Menge M in $\mathfrak{G}$ approximierten Randpunkte und die von M in $\mathfrak{G}$ approximierten Randelemente stets abgeschlossene Mengen bilden.

Satz 1: Ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes „nicht abgeschlossenes Kontinuum"[3]) C, das irgend eine (selbstverständlich abgeschlossene), aus mindestens einem Punkt bestehende Menge von Randpunkten approximiert, zerlegt $\mathfrak{G}$ in mindestens zwei Teilgebiete, an deren Begrenzung die Ableitung $\bar{C}$ von C und der Rand B von $\mathfrak{G}$ gemeinsam teilnehmen, wenn mindestens zwei von C nicht approximierte Randelemente existieren, die im Zyklus durch von C approximierte Randelemente getrennt werden.

Beweis: Da die Menge der von C approximierten Randelemente abgeschlossen ist, müssen die beiden nach Voraussetzung von C nicht approximierten Randelemente μ und ν zwei Intervallen M und N von Randelementen angehören, in die C nicht eindringt; daher enthalten M und N zwei Randelemente γ bzw. δ mit in γ bzw. δ von C nicht approximierten, erreichbaren Punkten c bzw. d. Diese γ und δ werden im Zyklus durch zwei von C approximierte Randelemente α und β getrennt. c (in γ) und d (in δ) verbinde man durch einen abgesehen von den Endpunkten ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufenden ein-

---

Geometrie, 2. Heft: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche (herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke), Leipzig und Berlin 1913.

[1]) Die Definition des Primende findet sich a. a. O., p. 336.

[2]) P. Koebe, J. f. Math. 145 (1915), p. 217.

[3]) Unter einem „nicht abgeschlossenen Kontinuum" C wird bekanntlich eine Menge verstanden, von der irgend zwei Punkte durch ein abgeschlossenes Teilkontinuum von C verbunden werden können.

fachen Streckenzug (Querschnitt) $\mathfrak{f}_{cd}$; durch $\mathfrak{f}_{cd}$ wird $\mathfrak{G}$ in genau zwei Teilgebiete $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zerlegt. Da α und β durch γ und δ getrennt werden, so liegen (von einem gewissen Index ab) die Ketten von Teilgebieten von $\mathfrak{G}$, die α bzw. β darstellen, in $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$. Daher liegen innerhalb $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Punkte von C und deshalb muß $\mathfrak{f}_{cd}$ von C getroffen werden und zwar gilt dies für jeden derartigen c und d verbindenden Streckenzug. Durchläuft man $\mathfrak{f}_{cd}$ von c nach d, so gibt es auf $\mathfrak{f}_{cd}$ einen ersten zu $\bar{C}$ gehörenden Punkt s_C und einen letzten solchen Punkt s_C'. Nimmt man nun auf $\mathfrak{f}_{cd}$ in hinreichender Nähe von c und d, nämlich vor s_C und nach s_C', zwei Punkte s_c bzw. s_d, so kann man s_c und s_d nicht durch einen Streckenzug in $\mathfrak{G}$ verbinden, ohne C zu treffen, da man sonst einen c und d verbindenden Streckenzug von der Art $\mathfrak{f}_{cd}$ erhalten würde, der keinen Punkt mit C gemeinsam hätte. Also s_c und s_d sind in zwei verschiedenen von C in $\mathfrak{G}$ bestimmten Teilgebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ enthalten.

Übrigens sei hervorgehoben, daß alle hier und im folgenden vorkommenden Teilgebiete einfach zusammenhängend sind, da sie Komplementärgebiete eines Kontinuums, nämlich $(B + \bar{C})$, sind.

Aus dem Beweis von Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2: Ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes, „nicht-abgeschlossenes Kontinuum" C, das eine endliche oder abzählbare oder allgemeiner eine punkthafte[1]) *Menge von Randpunkten von $\mathfrak{G}$, mindestens aber zwei Randpunkte approximiert, zerlegt $\mathfrak{G}$ in mindestens zwei Teilgebiete (an deren Begrenzung die Ableitung C' von C und der Rand B von $\mathfrak{G}$ gemeinsam teilnehmen).*

Beweis: Da die punkthafte, abgeschlossene Menge der von C approximierten Randpunkte in B nirgends dicht liegt, sind in jedem Intervall von Randelementen erreichbare Punkte vorhanden, die von C nicht approximiert werden; also sind die Voraussetzungen für die Punkte c und d im Beweis von Satz 1

[1]) Also eine (abgeschlossene) Menge von Randpunkten, die kein Kontinuum enthält.

erfüllt. (Oder: Mit Hilfe von Hilfssatz c des § 2 sieht man unmittelbar, daß die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.)

Genau ebenso ergibt sich aus Satz 1:

Satz 3: Ein in 𝔊 gelegenes „nicht-abgeschlossenes Kontinuum“ C, das genau einen Randpunkt, aber in mindestens zwei Randelementen von 𝔊 approximiert, zerlegt 𝔊 in mindestens zwei Teilgebiete (an deren Begrenzung $\bar{C}$ und B gemeinsam teilnehmen).

Diese Sätze lassen sich noch verallgemeinern durch Heranziehung des folgenden Begriffes, der von den Herren N. J. Lennes[1]) und F. Hausdorff[2]) herrührt: Eine Punktmenge M wird von N. J. Lennes „connected“, von F. Hausdorff „zusammenhängend“ genannt, wenn sie sich nicht in zwei nicht leere, elementenfremde, „in M abgeschlossene“ Teilmengen spalten läßt; dabei heißt eine Teilmenge A von M „in M abgeschlossen“, wenn jeder in M enthaltene Häufungspunkt von A auch Punkt von A ist. Zur Unterscheidung von dem üblichen Cantorschen Begriff „zusammenhängend“ wollen wir für den Begriff von Lennes und Hausdorff die Bezeichnung „lückenlos zusammenhängend“ gebrauchen.

Satz 1a, 2a, 3a: Die Sätze 1, 2, 3 bleiben richtig, wenn man das in 𝔊 gelegene, „nicht-abgeschlossene Kontinuum“ C verallgemeinernd durch eine in 𝔊 gelegene, „lückenlos zusammenhängende Menge“ C^* ersetzt.

Denn: die Beweise behalten wörtlich ihre Giltigkeit.

§ 2. Hilfssätze über den Gebietsrand.

Unter C werde in diesem Paragraphen stets ein in 𝔊 gelegenes nicht-abgeschlossenes Kontinuum oder gleich allgemeiner eine in 𝔊 gelegene lückenlos zusammenhängende Menge verstanden.

Hilfsatz a: C approximiert in einem Randelement ϱ, gegen das überhaupt Punktfolgen von C konvergieren, entweder einen

[1]) N. J. Lennes, Amer. J. of math. 33 (1911), p. 303.

[2]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 244.

einzelnen Punkt oder ein ganzes Kontinuum; und zwar enthält diese in ϱ von C approximierte Punktmenge sämtliche Hauptpunkte von ϱ.

Beweis: Wir stellen ϱ durch eine Kette von Teilgebieten $\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)} \ldots, \mathfrak{G}^{(n)} \ldots$ dar, die ausgeschnitten werden durch eine Kette von konzentrischen Kreisschnitten $\mathfrak{k}^{(1)}, \mathfrak{k}^{(2)} \ldots, \mathfrak{k}^{(n)} \ldots$, deren Mittelpunkt irgend ein Hauptpunkt r von ϱ ist. Man wähle den Index n_0 so groß, daß nicht alle Punkte von C in $\mathfrak{G}^{(n_0)}$ liegen; dann wird für $m > n_0$ jedes $\mathfrak{k}^{(m)}$ von C getroffen. Vereinigt man nun $\mathfrak{k}^{(m)}$ mit dem Durchschnitt D_m von C und $\mathfrak{G}^{(m)}$, so erhält man eine lückenlos zusammenhängende Menge C_m. [Denn: andernfalls wäre eine Zerlegung von C_m in zwei „in C_m abgeschlossene", elementenfremde Mengen möglich, von denen die eine ganz innerhalb $\mathfrak{G}^{(m)}$ gelegen wäre, was eine ebensolche Zerlegung von C zur Folge hätte.] Dann ist auch die Vereinigung K_m von D_m mit allen $\mathfrak{k}^{(\mu)}$ für $\mu \geq m$ eine lückenlos zusammenhängende Menge. Durch Hinzufügung der fehlenden Häufungspunkte zu K_m erhält man ein (abgeschlossenes) Kontinuum $\overline{K}_m$. Läßt man nun den Index m beständig wachsen, so ergibt sich eine absteigende Folge von ineinander geschachtelten Kontinuen $\overline{K}_m, \overline{K}_{m+1}, \overline{K}_{m+2} \ldots, \overline{K}_{m+\nu} \ldots$; der Durchschnitt D einer solchen Folge ist bekanntlich ein einzelner Punkt oder ein (abgeschlossenes) Kontinuum. Zugleich sehen wir, daß jeder Hauptpunkt r von ϱ zu D gehört.

Da bekanntlich ein Randelement entweder einen einzigen erreichbaren Hauptpunkt oder ein Kontinuum von nicht erreichbaren Hauptpunkten besitzt[1]), so folgt aus Hilfsatz a (wenn man noch berücksichtigt, daß die von C approximierte Menge von Randpunkten abgeschlossen ist):

Hilfsatz b: Wenn C höchstens endlich oder abzählbar unendlich viele Randpunkte oder allgemeiner eine punkthafte Menge von Randpunkten approximiert, dann ist jeder dieser Randpunkte in jedem Randelement, in dem er von C approximiert

---

[1]) C. Carathéodory, a. a. O., p. 362.

wird, ein erreichbarer Punkt. C approximiert also in keinem Randelement mehr als einen Punkt.

Daraus folgt:

Hilfsatz c: Unter denselben Bedingungen bilden die von C approximierten Randelemente eine nirgends dichte Menge.

Beweis: Lägen die approximierten Randelemente in einem Intervall Δ von Randelementen überall dicht, so müßten (wegen der Abgeschlossenheit der approximierten Randelemente) alle Randelemente von Δ durch C approximiert werden; dies gälte also (nach Hilfsatz *b*) für alle erreichbaren und deshalb überhaupt für sämtliche Punkte von Δ, im Widerspruch mit der Voraussetzung über C.

Hilfsatz d: Zwei Randelemente α_1 und α_2, in denen Punkt a ein erreichbarer Punkt ist, und zwei Randelemente β_1 und β_2, in denen ein anderer Punkt b erreichbarer Punkt ist, können sich gegenseitig nicht trennen.

Beweis: Von einem innern Punkt q aus ziehe man in $\mathfrak{G}$ zwei einfache Wege[1]) $\mathfrak{w}_a^1$ und $\mathfrak{w}_a^2$, die a in α_1 bzw. α_2 erreichen, ebenso zwei einfache Wege $\mathfrak{w}_b^1$ und $\mathfrak{w}_b^2$, die b in β_1 bzw. β_2 erreichen. $\mathfrak{w}_a^1$, $\mathfrak{w}_a^2$, $\mathfrak{w}_b^1$, $\mathfrak{w}_b^2$ mögen außer q keinen innern Punkt gemeinsam haben. $(\mathfrak{w}_a^1 + \mathfrak{w}_a^2)$ bildet ein einfaches geschlossenes Polygon (mit eventuell unendlich vielen Seiten), welches die Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ teilt. Wären nun $\mathfrak{w}_a^1$ und $\mathfrak{w}_a^2$ durch $\mathfrak{w}_b^1$ und $\mathfrak{w}_b^2$ getrennt, so läge etwa $\mathfrak{w}_b^1$ in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{w}_b^2$ in $\mathfrak{E}_2$; dann müßte ihr gemeinsamer Endpunkt, nämlich b, gleichzeitig in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ liegen, was unmöglich ist.

Wir bemerken: Eine Folge von Randelementen mit dem erreichbaren Punkt a und eine Folge von Randelementen mit dem erreichbaren Punkt b können gegen dasselbe Randelement konvergieren, wie sehr einfache Beispiele zeigen.

Trotzdem gilt:

Hilfsatz e: Wenn C eine punkthafte Menge von Randpunkten approximiert, dann können Randelemente, in denen C

---

[1]) Unter einem „einfachen Weg" verstehen wir, wie meist üblich, einen einfachen Streckenzug endlicher oder unendlicher Streckenzahl mit höchstens einem Häufungspunkt der Strecken auf dem Gebietsrand.

den Punkt a approximiert, und Randelemente, in denen C den davon verschiedenen Punkt b approximiert, nicht gegen dasselbe Randelement konvergieren.

Denn: Wäre ϱ ein solches gemeinsames Häufungs-Randelement, dann müßte C in ϱ gleichzeitig die Punkte a und b approximieren, im Widerspruch mit Hilfsatz b.

Es sei bemerkt, daß diese Hilfsätze a, b, c und e nicht mehr allgemein für ein in $\overline{\mathfrak{G}}$ gelegenes abgeschlossenes Kontinuum $\overline{C}$ gelten (wobei unter $\overline{\mathfrak{G}}$ der durch Hinzufügung des Randes aus $\mathfrak{G}$ entstehende Bereich verstanden wird); man kann sich hievon durch geeignete Beispiele überzeugen.

§ 3. Teilung in genau zwei Teilgebiete.

In Anknüpfung an § 1 und unter Verwendung des § 2 wollen wir nun in einem allgemeinen Fall nachweisen, daß eine Teilung des Gebietes in genau zwei Teilgebiete stattfindet.

Satz 4: Sei C eine lückenlos zusammenhängende Menge, die ganz in $\mathfrak{G}$ gelegen ist und nur die beiden Randpunkte a und b approximiert, die ferner in der Ebene ein einziges Komplementärgebiet bestimmt[1]*; dann wird $\mathfrak{G}$ durch C in genau zwei verschiedene einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt.*

Beweis: Satz 2a sagt bereits aus, daß mindestens zwei solche Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ durch C in $\mathfrak{G}$ bestimmt werden; es ist also nur noch zu zeigen, daß es höchstens zwei Teilgebiete sind. Aus den Hilfsätzen b, d und e ergibt sich, daß die Randelemente, in denen C den Punkt a approximiert, und die Randelemente, in denen C den Punkt b approximiert, getrennt werden durch zwei Intervalle von Randelementen A_1 und A_2, in die C nicht eindringt. Nimmt man beim Beweis von Satz 1 die Randelemente γ und δ in A_1 bzw. A_2 an, so sieht man, daß A_1 bzw. A_2 an der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ bzw.

[1] Wir sagen kurz, daß C ein einziges Komplementärgebiet (bzw. m solche) bestimmt, wenn die Komplementärmenge) der Ableitung $\overline{C}$ von C aus einem einzigen Gebiet (bzw. aus m solchen) besteht.

$\mathfrak{G}_2$ teilnehmen. Wäre also noch ein weiteres (von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ verschiedenes) Teilgebiet $\mathfrak{H}$ vorhanden, das durch C in $\mathfrak{G}$ bestimmt wird, so müßte jedes an der Begrenzung von $\mathfrak{H}$ teilnehmende und von C nicht approximierte Intervall von Randelementen von $\mathfrak{G}$ zwischen zwei Randelementen liegen, in denen C den *gleichen* Punkt (a bzw. b) approximiert. Es sei nun q ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}$, q_1 ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}_1$. Man könnte q mit q_1 nicht in $\mathfrak{G}$ verbinden, ohne C zu überschreiten. Da aber C in der Ebene nur ein einziges Komplementärgebiet bestimmt, so muß sich q mit q_1 in der Ebene verbinden lassen, ohne C und sogar ohne die Ableitung $\bar{C}$ von C zu treffen: etwa mit Hilfe des Streckenzuges $\mathfrak{s}$ (der von q nach q_1 durchlaufen werde). Es sei s der *erste* Punkt von $\mathfrak{s}$, der Randpunkt von $\mathfrak{H}$ ist und die Eigenschaft hat, daß *nach* ihm $\mathfrak{s}$ nicht wieder nach $\mathfrak{H}$ zurückkehrt. s gehört nun *entweder* einem von C nicht approximierten Randelement ϱ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ an *oder* (wenn das nicht der Fall ist) einem Randelement α_1' von $\mathfrak{G}$, in dem C den erreichbaren Punkt, sagen wir a, approximiert; wir unterscheiden demgemäß zwei Fälle.

Im *ersten* Fall ist ϱ in einem (von C nicht approximierten) Intervall Δ von Randelementen von $\mathfrak{G}$ enthalten, das durch zwei Randelemente α_1 und α_2 abgeschlossen wird, in denen C denselben (erreichbaren) Punkt, sagen wir a, approximiert. Δ ist zugleich Intervall von Randelementen von $\mathfrak{H}$; dabei entsprechen den α_1 und α_2 in $\mathfrak{H}$ die Randelemente $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$. In diesen ist a ein für $\mathfrak{H}$ erreichbarer Punkt; denn: aus der Folge der zu a konzentrischen Kreisschnitte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ . . ., $\mathfrak{k}_n$ . . ., die in $\mathfrak{G}$ etwa gegen α_1 konvergieren, entsteht in $\mathfrak{H}$ (von einem gewissen Index ab) eine Folge von Teilkreisschnitten $\tilde{\mathfrak{k}}_1$, $\tilde{\mathfrak{k}}_2$ . . ., $\tilde{\mathfrak{k}}_n$ . . ., die in $\mathfrak{H}$ gegen $\tilde{\alpha}_1$ konvergieren und deren Endpunkte je in Δ bzw. C liegen; verläuft nun ein a in $\tilde{\alpha}_1$ approximierender Streckenzug $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{H}$ stets in hinreichender Nähe von C, so wird $\mathfrak{a}$ *nur* den Punkt a approximieren.

Im *zweiten* Falle gehört s einem (α_1' entsprechenden) Randelement $\tilde{\alpha}_1'$ von $\mathfrak{H}$ an. Also gibt es eine Folge von inneren

Punkten von $\mathfrak{H}$, die gegen s in $\tilde{a}_1'$ konvergieren, und deshalb eine gegen s in $\tilde{a}_1'$ konvergierende Folge von erreichbaren Randpunkten $e_1, e_2 \ldots, e_n \ldots$ von $\mathfrak{H}$ und daher auch von $\mathfrak{G}$; und zwar gehören diese erreichbaren Randpunkte $e_1, e_2 \ldots, e_n \ldots$ zu einer gegen $\tilde{a}_1'$ konvergierenden Folge von Randelementen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n \ldots$ von $\mathfrak{H}$ (und $\mathfrak{G}$). Ein von ε_n und ε_{n+1} begrenztes, a_1' nicht enthaltendes Intervall von Randelementen von $\mathfrak{G}$ sei mit Δ_n bezeichnet. Verbindet man in $\mathfrak{H}$ e_n (von ε_n) mit e_{n+1} (von ε_{n+1}) durch einen einfachen Streckenzug (Querschnitt) $\mathfrak{f}_n$ (der also von C nicht getroffen wird), so wird durch $\mathfrak{f}_n$ aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ ein Teilgebiet $\mathfrak{D}_n$ abgeschnitten, in welches C nicht eindringt und an dessen Begrenzung Δ_n teilnimmt. Also alle Δ_n und sämtliche e_n mit den zugehörigen Randelementen ε_n von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ werden von C nicht approximiert; deshalb ist $\tilde{a}_1'$ (bzw. a_1') Endelement eines von C nicht approximierten Intervalls Δ' von Randelementen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$. Daher muß (wie oben) a in $\tilde{a}_1'$ erreichbarer Punkt sein. Ferner muß es in $\mathfrak{H}$ ein zweites Endelement $\tilde{a}_2'$ von Δ' geben, das aus dem Endelement a_2' von Δ' in $\mathfrak{G}$ durch Eindringen von C entsteht; und zwar muß C in a_2' nach dem obigen denselben Punkt a approximieren, so daß a auch erreichbarer Punkt von $\tilde{a}_2'$ in $\mathfrak{H}$ ist.

In beiden Fällen kann man also in $\mathfrak{H}$, etwa von q aus, einfache Wege $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ ziehen, die in $\tilde{a}_1$ (bzw. $\tilde{a}_1'$) und $\tilde{a}_2$ (bzw. $\tilde{a}_2'$) den Punkt a erreichen und außer a und q keinen Punkt gemeinsam haben. Das Polygon (mit eventuell unendlich vielen Seiten) $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$ zerlegt die Ebene in zwei Teilgebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Da nun auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ Δ (bzw. Δ') durch a_1 und a_2 (bzw. a_1' und a_2') von Δ_1 getrennt wird, also Δ (bzw. Δ') und Δ_1 sich in $\mathfrak{G}$ mit verschiedenen Seiten von $\mathfrak{r}$ verbinden lassen, so liegen s und q_1 in verschiedenen Gebieten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Es ist daher nicht möglich, s mit q_1 zu verbinden, ohne $\mathfrak{r}$ zu überschreiten, d. h. (bei Vermeidung von a), ohne in $\mathfrak{H}$ einzudringen, was im Widerspruch mit der obigen Aussage über $\mathfrak{f}$ steht. Demnach ist die Existenz von $\mathfrak{H}$ mit der Voraussetzung über C nicht verträglich. w. z. b. w.

Aus Satz 4 folgt nun:

Satz 5: Sei C eine lückenlos zusammenhängende Menge, die in $\mathfrak{G}$ gelegen ist und genau die beiden Randpunkte a und b approximiert, und gehöre die Begrenzung B von $\mathfrak{G}$ einem einzigen Komplementärgebiet von C an; dann werden in $\mathfrak{G}$ durch C genau zwei Teilgebiete bestimmt, an deren Begrenzung (abgesehen von a und b) die Ableitung $\bar{C}$ von C und B gemeinsam teilnehmen. (Eventuell sind noch andere von $\bar{C}$ allein begrenzte Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ vorhanden.)

Zusatz: Bestimmt C in der Ebene m Komplementärgebiete, so wird $\mathfrak{G}$ durch C insgesamt in $(m+1)$ Teilgebiete zerlegt.

Beweis: Wenn C nur ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene bestimmt, dann haben wir den Fall des Satzes 4. Andernfalls bestimmt C außer dem Komplementärgebiet $\mathfrak{E}_0$, in welchem B liegt, noch andere Komplementärgebiete $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Diese $\mathfrak{E}_n$ liegen, wie C, ganz innerhalb $\mathfrak{G}$; denn man kann jeden Punkt eines $\mathfrak{E}_n$ mit C verbinden, ohne B zu überschreiten. Vereinigt man also diese $\mathfrak{E}_n$ mit $\bar{C}$ unter Weglassung von a und b, so erhält man wieder eine lückenlos zusammenhängende Menge C^*, die nun die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt.

Aus Satz 5 und Zusatz ergibt sich unmittelbar:

Satz 6: Es seien in der Ebene zwei beschränkte, lückenlos zusammenhängende Mengen C_1 und C_2 vorgelegt, die beide genau zwei Punkte a und b gleichzeitig approximieren und von denen jedes in einem einzigen Komplementärgebiet des andern liegt, dann bestimmt die Vereinigungsmenge $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)$ der Ableitungen von C_1 und C_2 in der Ebene genau zwei Komplementärgebiete, die (abgesehen von a und b) zugleich von Punkten von $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ begrenzt werden.

Bestimmen C_1 bzw. C_2 in der Ebene m_1 bzw. m_2 Komplementärgebiete, so teilt $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)$ die Ebene insgesamt in $(m_1 + m_2)$ Teilgebiete[1]).

---

[1]) In Satz 6 ist als Spezialfall die *folgende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes* enthalten: *Bestimmen die beiden elementen-*

Bemerkung: Gemäß Satz 5 genügt es für Satz 6, wenn eine der beiden Mengen C_1 und C_2 beschränkt ist. Dagegen gilt Satz 6 nicht mehr, wenn C_1 und C_2 beide nicht beschränkt sind, wie das Beispiel in § 4 zeigt.

§ 4. Über irreduzible Kontinua.

Satz 7: Ist C_1 ein Kontinuum, das die Punkte a und b enthält, ist ferner $\mathfrak{C}_2$ ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum, das mit C_1 nur die beiden Punkte a und b gemeinsam hat, dann kann $\mathfrak{C}_2$ nur in einem einzigen Komplementärgebiet von C_1 liegen.

Beweis: Angenommen, daß $\mathfrak{C}_2$ in mindestens zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \ldots$ von C_1 eindringe. Wird dann mit T_1 das zu $\mathfrak{H}_1$ komplementäre Kontinuum der Ebene bezeichnet, wird ferner unter $(\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1)$ bzw. $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{H}_1$ bzw. T_1 verstanden, dann kann wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_2$ keine der beiden abgeschlossenen, a und b umfassenden Mengen $((\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1) + a + b)$ und $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ ein Kontinuum sein. Also zerfallen $((\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1) + a + b)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}^1_*$ und $\mathfrak{C}^2_*$, $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}^1_{**}$ und $\mathfrak{C}^2_{**}$. Jede dieser vier Teilmengen muß einen der Punkte a, b enthalten; denn andernfalls würde die betr. Menge und der Rest von $\mathfrak{C}_2$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_2$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen darstellen. Es enthalten also etwa $\mathfrak{C}^1_*$ und $\mathfrak{C}^1_{**}$ den Punkt a, $\mathfrak{C}^2_*$ und $\mathfrak{C}^2_{**}$ den Punkt b. Dann müßte $\mathfrak{C}_2$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $(\mathfrak{C}^1_* + \mathfrak{C}^1_{**})$ und $(\mathfrak{C}^2_* + \mathfrak{C}^2_{**})$ zerfallen. Also ist unsere Annahme unmöglich: $\mathfrak{C}_2$ liegt deshalb in einem einzigen Komplementärgebiet von C_1.

---

fremden, beschränkten, lückenlos zusammenhängenden Mengen C_1 und C_2 je ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene und approximieren beide zugleich genau die zwei Punkte a und b, dann wird die Ebene durch $(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)$ in genau zwei Teilgebiete zerlegt.

Aus Satz 7 folgt unmittelbar:

Satz 8: Sind die beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwischen a und b irreduzibel und haben sie außer a und b keinen Punkt gemeinsam, dann liegt $\mathfrak{C}_1$ in einem einzigen Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_2$ in einem einzigen Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_1$.

Es sei bemerkt, daß das in Satz 8 ausgezeichnete Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) begrenzt wird [wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) und weil a und b der Begrenzung des betreffenden Gebietes angehören].

Ähnlich wie Satz 7 ergibt sich noch der folgende

Hilfsatz f: Ist $\mathfrak{C}$ ein zwischen den Punkten a und b irreduzibles Kontinuum, so ist die nach Weglassung von a und b entstehende Menge $\mathfrak{C}^*$ eine lückenlos zusammenhängende Menge[1]).

Beweis: Angenommen, $\mathfrak{C}^*$ wäre nicht lückenlos zusammenhängend, dann wäre eine Zerlegung von $\mathfrak{C}^*$ in zwei nicht leere, in $\mathfrak{C}^*$ abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen $\mathfrak{C}^*_1$ und $\mathfrak{C}^*_2$ möglich. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}$ könnte dann keine der beiden abgeschlossenen Mengen $(\mathfrak{C}^*_1 + a + b)$ und $(\mathfrak{C}^*_2 + a + b)$ ein Kontinuum sein. Es zerfiele also $(\mathfrak{C}^*_1 + a + b)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}^1_1$ und $\mathfrak{C}^2_1$, $(\mathfrak{C}^*_2 + a + b)$ in die beiden nicht leeren,

[1]) Hilfsatz f wäre nicht mehr richtig, wenn man darin den Begriff „lückenlos zusammenhängende Menge" durch den engeren Begriff „nicht abgeschlossenes Kontinuum" ersetzen würde. Beispiel: Das für $-\frac{1}{\pi} < x < +\frac{1}{\pi}$ durch $y = f(x)$ dargestellte, zwischen a und b irreduzible Kontinuum, wobei unter a der Punkt $x = -\frac{1}{\pi}$, $y = 0$, unter b der Punkt $x = +\frac{1}{\pi}$, $y = 0$ verstanden werde:

$$y = f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x - \frac{1}{\pi}}\right) & \text{für } -\frac{1}{\pi} < x < +\frac{1}{\pi} \\ 1 < y < +1 & \text{für } x = \pm\frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$. Jede dieser vier Teilmengen müßte einen der Punkte a, b enthalten; denn andernfalls würde die betreffende Menge und der Rest von $\mathfrak{C}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen darstellen. Also enthielten etwa $\mathfrak{C}_1^1$ und $\mathfrak{C}_2^1$ den Punkt a, ebenso $\mathfrak{C}_1^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$ den Punkt b. Dann zerfiele $\mathfrak{C}$ in die beiden abgeschlossenen, elementenfremden Mengen $(\mathfrak{C}_1^1 + \mathfrak{C}_2^1)$ und $(\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2)$. Die gemachte Annahme ist daher unmöglich; $\mathfrak{C}^*$ muß demnach lückenlos zusammenhängend sein.

Aus Satz 8, Hilfsatz f und Satz 6 folgt nun:

Satz 9: Ist $\mathfrak{C}$ die Vereinigungsmenge von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die außer a und b keinen Punkt gemeinsam haben, dann gibt es in der Ebene genau zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{C}$, an deren Begrenzung (von a und b abgesehen) zugleich $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beteiligt sind.

Die übrigen von $\mathfrak{C}$ eventuell bestimmten Komplementärgebiete werden (von a und b abgesehen) von Punkten von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Wir zeigen nun, daß diese beiden ausgezeichneten Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}$ begrenzt werden:

An der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ (analog für $\mathfrak{G}_2$) nimmt, gemäß dem Anfang des Beweises von Satz 4, ein Intervall Λ_1 von ganz aus Punkten von $\mathfrak{C}_1$ bestehenden Randelementen teil, das in $\mathfrak{G}_1$ von zwei Randelementen α und β abgeschlossen wird, in denen a bzw. b erreichbare Punkte sind. Fügt man zu Λ_1 seine in α und β enthaltenen Häufungspunkte hinzu, so erhält man ein a und b umfassendes Kontinuum $\bar{\Lambda}_1$ (denn $\bar{\Lambda}_1$ ist die abgeschlossene, zusammenhängende Menge, die entsteht, wenn man zu den in $\mathfrak{G}_1$ erreichbaren Punkten von Λ_1 alle Häufungspunkte hinzunimmt). $\bar{\Lambda}_1$ besteht durchweg aus Punkten von $\mathfrak{C}_1$ und ist deshalb wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{C}_1$ identisch. Ebenso ergibt sich, daß ganz $\mathfrak{C}_2$ an der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ (bzw. $\mathfrak{G}_2$) teilnimmt.

Wir sind so zu dem folgenden Ergebnis gelangt:

Hauptsatz: Ist $\mathfrak{C}$ die Vereinigungsmenge von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die außer a und b keinen Punkt gemeinsam haben, dann bestimmt $\mathfrak{C}$ in der Ebene stets genau zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, die von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}$ begrenzt werden.

Die übrigen von $\mathfrak{C}$ eventuell bestimmten Komplementärgebiete werden (von a und b abgesehen) von Punkten von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Ist C irgend ein Kontinuum in der Ebene, so wollen wir jedes Komplementärgebiet von C, dessen Begrenzung mit dem ganzen Kontinuum C identisch ist, als (von C bestimmtes) „Hauptgebiet" bezeichnen, jedes andere (also nur von einem Teil von C begrenzte) Komplementärgebiet von C als „Nebengebiet". Dann erhalten wir die folgende *andere Fassung des Hauptsatzes:*

$\mathfrak{C}$ bestimmt in der Ebene stets genau zwei Hauptgebiete. Die etwa vorhandenen Nebengebiete werden von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Wir fügen noch einige Bemerkungen an:

$\mathfrak{C}$ kann beliebig viele, sogar abzählbar unendlich viele Nebengebiete bestimmen. Denn dies gilt schon für das einzelne irreduzible Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$; einfaches Beispiel: man füge n solche irreduzible Kontinua, wie $\mathfrak{C}_1$ in Fußnote 3 auf Seite 92, aneinander bzw. abzählbar unendlich viele solche Kontinua mit einem einzigen Häufungspunkt.

Ferner sei hervorgehoben, daß ein einzelnes beschränktes, zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ in der Ebene mehr als ein Hauptgebiet bestimmen kann, wie merkwürdige Beispiele von L. E. J. Brouwer[1]) zeigen. Andererseits gibt es zwischen a und b irreduzible Kontinua $\mathfrak{C}_0$, die überhaupt kein Hauptgebiet bestimmen; es kann nämlich sein, daß kein

[1]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 68 (1909/10), p. 423/6 und Proc. Amsterdam. Akad. 1911, p. 139/145.

Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_0$ gleichzeitig a und b auf seiner Begrenzung enthält; einfaches Beispiel: Sei K_0 eine Kreislinie; von einem äußeren Punkt a aus lege man eine asymptotisch um K_0 sich windende Spirale S_a, von einem innern Punkt b eine andere K_0 von innen approximierende Spirale S_b; die Vereinigung $\mathfrak{C}_0$ von S_a, S_b, K_0 ist zwischen a und b irreduzibel. Natürlich kann ein derartiges irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_0$ niemals die Rolle von $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2$ in unserm Hauptsatz spielen. — Also für ein irreduzibles Kontinuum gilt keineswegs immer die Verallgemeinerung des Satzes, daß ein einfacher (Jordanscher) Kurvenbogen ein einziges Hauptgebiet bestimmt.

Im Satz 9 und im Hauptsatz kann man mit einer etwas geringeren Voraussetzung über $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ auskommen: man braucht (vgl. Schlußbemerkung zu Satz 6) nur von *einem* der beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die *Beschränktheit* vorauszusetzen.

Würde aber für *beide* Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die *Bedingung der Beschränktheit* weggelassen, so wären Satz 9 und der Hauptsatz, ebenso Satz 6 in der Euklidischen Ebene *nicht mehr richtig*, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei

$$\text{Punkt } a\colon x = -\frac{1}{\pi},\ y = 0; \quad \text{Punkt } b\colon x = +\frac{1}{\pi},\ y = 0;$$

$\mathfrak{C}_1$ werde dargestellt durch

$$y = \left|\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \quad \text{für } -\frac{1}{\pi} \leqq x \leqq +\frac{1}{\pi},$$

wobei y für $x = 0$ alle Werte $\geqq 0$ annehme; $\mathfrak{C}_2$ werde dargestellt durch

$$y = \begin{cases} -\left|\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| - 1 & \text{für } -\frac{1}{2\pi} \leqq x \leqq +\frac{1}{2\pi} \\ 2\pi|x| - 2 & \text{für } \frac{1}{2\pi} \leqq |x| \leqq \frac{1}{\pi}, \end{cases}$$

wobei y für $x = 0$ alle Werte $\leqq -1$ annehme.

Aus diesem Beispiel geht zugleich hervor, daß die Sätze 4 und 5 nicht allgemein giltig wären, wenn von dem Gebiet $\mathfrak{G}$

nicht vorausgesetzt worden wäre, daß seine Begrenzung B beschränkt sein soll.

Zum Schluß wollen wir noch eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes angeben, die dadurch entsteht, daß mehr als zwei irreduzible Kontinua zusammengefügt werden. Wir schicken die beiden folgenden Hilfsätze voraus:

Hilfsatz g: Sei $\mathfrak{C}_1$ *ein zwischen* a *und* b *irreduzibles Kontinuum und* $\mathfrak{C}_2$ *ein zwischen* b *und* c *irreduzibles Kontinuum; außer dem Punkt* b *sollen* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *keinen Punkt gemeinsam haben; dann ist die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *ein zwischen* a *und* c *irreduzibles Kontinuum.*

Beweis: $\mathfrak{C}$ ist ein Kontinuum. Angenommen, es wäre nicht zwischen a und c irreduzibel; dann gäbe es in $\mathfrak{C}$ jedenfalls ein zwischen a und c irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_0$. Dann müßte $\mathfrak{C}_0$ den Punkt b enthalten, da andernfalls $\mathfrak{C}_0$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Durchschnitte $(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_1)$ und $(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_2)$ zerfallen würde. Ferner könnten nicht beide Durchschnitte $(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_1)$ und $(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_2)$ ein Kontinuum sein, da sonst wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ das Teilkontinuum $\mathfrak{C}_0$ mit $\mathfrak{C}$ identisch wäre. Sei also etwa $(\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_1)$ kein Kontinuum; dann zerfällt diese Menge in zwei nicht leere, abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen $\mathfrak{C}^{I}_{*}$ und $\mathfrak{C}^{II}_{*}$. Jede von diesen muß einen der Punkte a, b enthalten, da andernfalls die betreffende Menge und der Rest von $\mathfrak{C}_0$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_0$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Mengen darstellen würde. Enthalte also $\mathfrak{C}^{I}_{*}$ den Punkt a und $\mathfrak{C}^{II}_{*}$ den Punkt b. Dann wäre $\mathfrak{C}^{I}_{*}$ und $(\mathfrak{C}^{II}_{*} + (\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_2))$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_0$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen. Also kann die Annahme, daß $\mathfrak{C}$ nicht zwischen a und c irreduzibel ist, nicht richtig sein.

Aus Hilfsatz g folgt sofort durch Schluß von n auf $n + 1$:

Hilfsatz h: Es seien $a_1, a_2 \ldots a_m$ *endlich viele, verschiedene Punkte in der Ebene. Ferner sei* $\mathfrak{C}_k$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_k *und* a_{k+1} *(für* $k = 1, 2 \ldots, m - 1$*) und diese* $\mathfrak{C}_k$ *sollen, abgesehen von dem gemeinsamen Endpunkt*

zweier aufeinander folgender Kontinua, paarweise keine Punkte gemeinsam haben. Dann ist die Vereinigung $\mathfrak{C}$ *aller* $\mathfrak{C}_k$ *ein zwischen* a_1 *und* a_m *irreduzibles Kontinuum.*

Nimmt man die Hilfsätze g und h mit dem Hauptsatz zusammen, so erhält man schließlich als Verallgemeinerung des Hauptsatzes:

Satz 10: Es seien $a_1, a_2 \ldots, a_m$ *endlich viele, verschiedene Punkte in der Ebene. Ferner sei* $\mathfrak{C}_k$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_k *und* a_{k+1} *(für* $k = 1, 2 \ldots, m-1$*) und außerdem sei* $\mathfrak{C}_m$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_m *und* a_1 *und alle diese* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \ldots, \mathfrak{C}_m$ *sollen, abgesehen von dem gemeinsamen Endpunkt zweier (in zyklischer Ordnung) aufeinander folgender Kontinua, paarweise keine Punkte gemeinsam haben. Dann bestimmt die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{C}$ *aller* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \ldots, \mathfrak{C}_m$ *genau zwei Hauptgebiete und die eventuell vorhandenen Nebengebiete werden nur von Punkten je eines einzigen* $\mathfrak{C}_k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ *begrenzt.*



Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 8. Februar 1919.

In der letzten Arbeit[1]) war darauf verwiesen worden, daß die Untersuchung von Frobenius „Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale" (Berl. Ber. 28 (1915), S. 387—404) trotz des geometrischen Ausgangspunktes vom Verfasser nicht zu einem einfachen *geometrischen* Beweis für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises ausgebaut worden ist. Diese auffallende Lücke soll hier noch ausgefüllt werden.

Es ist zu zeigen, daß zwischen Umfang (L) und Inhalt (F) eines Ovals die Beziehung besteht

$$1)\quad L^2 - 4\pi F \geqq 0,$$

und daß das Gleichheitszeichen nur für den Kreis besteht.

Zu diesem Zweck hat man die *Parallelkurven* heranzuziehen. Trägt man auf den Normalen eines Ovals die Strecke t ab, so erhält man die Parallelkurven, für positives t die *äußeren*, für negatives die *inneren*. Inhalt und Umfang werden bekanntlich

$$L(t) = L + 2t\pi$$
$$F(t) = F + tL + t^2\pi.$$

Man sieht, daß $F(t)$ — selbstverständlich nur für innere Parallelkurven, also negative Werte von t — auch negativ werden kann, sobald die Ungleichheit (1) gilt.

Demnach ist, um die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises zu erweisen, nur zu entscheiden, ob jedes vom Kreis verschiedene Oval unter seinen (inneren) Parallelkurven auch solche mit

[1]) Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme. Diese Berichte 1918, S. 489—505. Man vgl. besonders die Anmerkung S. 492/93.

negativem Inhalt besitzt. Diese Frage findet nun ihre Antwort in dem folgenden Satz:

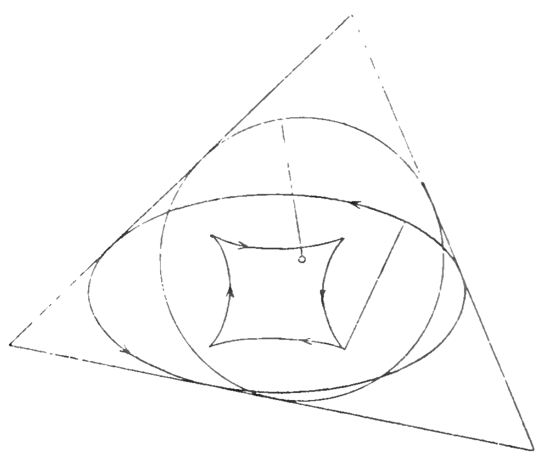
Zieht man zu einer Eilinie die (innere) Parallelkurve, indem man auf den Normalen die Strecke

$$t = -\varrho^*$$

abträgt, wobei ϱ^* der Radius des Inkreises irgend eines Kappendreiecks, d. h. eines die Kurve umschließenden Tangentendreiecks ist, so ist

$$F(-\varrho^*) < 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur in dem trivialen Fall, wenn nämlich die Eilinie ein Kreis ist.



(Vgl. die Figur, die den Satz für das Beispiel der Ellipse erläutert.)

Man kann diesen Satz unter Verwendung des Grundgedankens von Frobenius leicht beweisen, und zwar rein geometrisch.

In zwei parallelen Horizontalebenen sollen zwei Eilinien E und E' gegeben sein. Um E beschreiben wir ein Kappendreieck LMN, um E' das Kappendreieck $L'M'N'$, dessen Seiten den entsprechenden des ersten parallel sind. Die Pyramide, die man erhält, wenn man die Kanten LL', MM', NN' bis zu ihrem Schnittpunkt S verlängert, möge „Kappenpyramide" heißen.

Wir betrachten jetzt jedes Oval als *Kernfigur*, die übrig bleibt, wenn man vom Kappendreieck eine unbegrenzte Folge von *Restdreiecken* nach bestimmtem Gesetz abschneidet. Diese

Restdreiecke sind sämtlich den Ovalen anbeschrieben; man erhält k_1 (und k_1'), wenn man an E und E' die Tangente legt, die auf der inneren Halbierungslinie des Winkels NLM (und $N'L'M'$) senkrecht steht; entsprechend an den Ecken M (und M'), N (und N') die Restdreiecke k_2 (und k_2') bzw. k_3 (und k_3'). Schneidet man diese drei Paare von Restdreiecken ab, so bleiben als Kerne zwei Tangentensechsecke von E und E' mit entsprechend parallelen Seiten. Nach demselben Gesetz, also mit Benützung von Tangenten, die den Halbierungslinien der Außenwinkel der übrig gebliebenen Kernsechsecke parallel sind, schneidet man dann sechs Restdreiecke $k_3 \ldots k_9$, $k_3' \ldots k_9'$ ab, dann weitere zwölf usw.

Auf diese Weise erhält man die beiden Ovale als Kerne, die übrig bleiben, wenn von den Kappendreiecken eine unbegrenzte Folge von Restdreiecken

$$k_1,\ k_2,\ k_3\ \ldots\ k_r\ \ldots$$
$$k_1',\ k_2',\ k_3'\ \ldots\ k_r'\ \ldots$$

abgeschnitten ist. Dabei haben zufolge der Konstruktion selbst die Dreieckspaare $k_r k_r'$ entsprechend gleichsinnig parallele Seiten, liegen also paarweise perspektivisch.

Nunmehr betrachten wir die Hüllfläche der gemeinsamen Tangentialebenen beider Ovale, wobei die Tangentialebenen selbstverständlich so zu legen sind, daß E und E' beide auf derselben Seite liegen. Diese Hüllfläche ist eine abwickelbare Fläche, deren zwischen E und E' gelegener Teil wohl als „Huf" bezeichnet werden kann. Unter den Tangentialebenen wollen wir die Folge der bei der Konstruktion der Restdreiecke auftretenden besonders hervorheben.

Man sieht unmittelbar, daß jeder Horizontalschnitt der Hüllfläche wieder aufzufassen ist als Differenz eines Kappendreiecks $L(h)$, $M(h)$, $N(h)$, das zu LMN und $L'M'N'$ perspektivisch liegt und einer Reihe von Restdreiecken $k_1(h)$, $k_2(h) \ldots$, $k_r(h) \ldots$, die zu $k_1 k_1'$, $k_2 k_2' \ldots k_r k_r'$ perspektivisch liegen; h soll dabei die Höhe des Horizontalschnittes etwa über der Ebene des Ovals E bedeuten.

Wir betrachten jetzt den Horizontalschnitt durch die Spitze S der Kappenpyramide.

Sein Inhalt ist die Differenz des Kappendreiecks $L^* M^* N^*$, das aber in einen Punkt zusammenschrumpft, eben den Punkt S und einer Folge von Dreiecken k_1^*, $k_2^* \ldots$, $k_r^* \ldots$, also *negativ*, wenn nicht *alle* k_r^* den Inhalt Null haben, also auch in Punkte zusammenschrumpfen. Das tritt für k_1^*, k_2^*, k_3^* nur ein, wenn S auch das Perspektivitätszentrum der Paare $k_1 k_1'$, $k_2 k_2'$, $k_3 k_3'$ ist. Damit dann auch k_4^*, $k_5^* \ldots$, k_9^* sämtlich Null sind, muß S auch das Perspektivitätszentrum der Paare $k_4 k_4' \ldots$, $k_9 k_9'$ sein.

Die unbeschränkte Fortsetzung dieses Schlußverfahrens zeigt, daß folgende Alternative besteht: *Entweder hat unsere abwickelbare Fläche auch Querschnitte mit negativem Inhalt* (nämlich z. B. den Horizontalschnitt, dessen Ebene durch die Spitze einer Kappenpyramide geht) *oder die beiden Ovale liegen perspektivisch.*

Dies ist jetzt auf einen besonderen Fall anzuwenden. E sei das gegebene Oval, E' in einer Horizontalebene, die unterhalb der von E liegt, der Schnitt einer durch E gelegten Böschungsfläche von 45^0 Neigung. Wenden wir hier die Konstruktion an, so erhalten wir eben die Böschungsfläche wieder, und ihre Horizontalschnitte ergeben, senkrecht auf die Ebene von E projiziert, die Parallelkurven von E. Den oberen Schnitten entsprechen *innere*, den unteren *äußere* Parallelkurven. Demgemäß hat E entweder innere Parallelkurven mit negativem Inhalt, und dann ist
$$L^2 - 4\pi F > 0$$
oder die innere Parallelkurve, deren Abstand gleich der Höhe der Kappenpyramide ist, reduziert sich auf einen Punkt, und dann ist E ein Kreis. Die Höhe der Kappenpyramide ist, weil ihre Seitenflächen unter 45^0 gegen die Grundebene geneigt sind, gleich dem Radius ϱ^* des Inkreises des Kappendreiecks LMN.

Entweder also ist E ein Kreis, oder aber die innere Parallelkurve im Abstand ϱ^* hat negativen Inhalt. Damit ist der Beweis des vorangestellten Satzes und also auch der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises auf diesem Weg erbracht.

Formeln für die Geländeaufnahme aus der Luft.

Von F. v. Dalwigk in Marburg i. H.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 8. Februar 1919.

1. Sollen zwei oder mehrere aus der Luft gemachte photogrammetrische Aufnahmen eines und desselben Geländestückes gemeinsam bearbeitet werden, so galt es bisher anscheinend als wesentlich, zunächst für jedes Bild den Aufnahmeort O, die Neigung der optischen Achse und die Verkantung zu bestimmen. Ich habe Ostern 1918 ein anderes Verfahren für vollständig graphische und für teils graphische, teils rechnende Arbeit entworfen und bald darauf erprobt.

Bei jeder Aufnahme müssen drei Geländepunkte, die Festpunkte, der Lage nach genau bekannt sein, und ihnen müssen auf dem Bild deutlich erkennbare Punkte entsprechen. Das Bilddreieck bestimmt durch seine Lage in bezug auf den zweiten Hauptpunkt des Objektivs die Bildpyramide, und in deren abgewickelten Mantel werden die Seiten des im Kartenmaßstab verkleinerten Festpunktdreiecks eingepaßt. Wenn der Aufnahmepunkt O dem gefährlichen Ort[1]) nicht nahe liegt, so wird man bei dieser Einpassung unter den verschiedenen möglichen Lösungen ziemlich leicht die richtige auswählen können. Zugleich wird dann bei sorgfältiger Arbeit in genügend großem Maßstab ein guter Genauigkeitsgrad erreicht.

Die Pyramide, welche den Aufnahmepunkt O zur Spitze und das Festpunktdreieck zur Basis hat, nenne ich die Fest-

[1]) Vgl. Das Rückwärtseinschneiden im Raum, von S. Finsterwalder und W. Scheufele. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akad. der Wiss., 23. Bd., 1903, S. 591.

punktpyramide. Ihre von O ausgehenden Kanten r_1, r_2, r_3 sind durch die geschilderte Konstruktion gefunden. Sie spielen in 3 eine wichtige Rolle und lassen sich — falls ihr graphischer Genauigkeitsgrad nicht ausreicht — mit wenig Zeitaufwand und Mühe durch Rechnung verbessern, worauf ich jetzt nicht eingehe. An die Einpassung der Seiten des Festpunktdreiecks schließt sich eine Konstruktion an, welche die räumliche Lage von O liefert. Das ist der „Rückwärtseinschnitt". Auch hier läßt sich das Ergebnis der Konstruktion durch Rechnung auf verschiedene Arten genauer gestalten; ich komme später darauf zurück.

Auf die Bestimmung der Neigung und der Verkantung verzichte ich vollständig. Ich übertrage statt dessen die Bildpunkte perspektivisch in die Ebene des Festpunktdreiecks und bilde von dieser Figur den Grundriß. So ist wenigstens der Gedankengang; tatsächlich wird nur die Grundrißfigur hergestellt, nicht die wahre Gestalt der Figur in der Festpunktebene.

2. Der Aufstellung der Transformations-Formeln mag folgende Überlegung vorangehen. Die Bildebene ist perspektivisch der Festpunktebene zugeordnet; die Festpunktebene wird durch Orthogonalprojektion auf die Kartenebene, die Grundrißebene, bezogen. Dadurch besteht zwischen der Bildebene und der Grundrißebene eine Kollineation (nach bekanntem Satz sogar eine Zentralkollineation, worauf es jetzt aber nicht ankommt). In der Kartenebene benutzt man rechtwinklige Koordinaten x, y. Dadurch sind die Festpunktebene und das Gelände auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen.

Man kann mittelst der Koordinaten der Festpunkte P_1, P_2, P_3 den allgemeinen Punkt R der Festpunktsebene $\mathfrak{E}$ baryzentrisch so darstellen:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

Die ersten beiden Formeln für sich genommen geben in der x, y-Ebene den Grundriß R' von R. Die besprochene kollineare Zuordnung von R' zum Punkt $Q(\xi, \eta)$ der Bildebene liefert Ausdrücke von der Form

$$x = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1}{a \xi + b \eta + c}, \quad y = \frac{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2}{a \xi + b \eta + c}.$$

Beide Darstellungsweisen für die Koordinaten von R' geben zusammengenommen

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= \mu(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1) \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 &= \mu(a_2 \xi + b_2 \eta + c_2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \mu(a \xi + b \eta + c). \end{aligned}$$

Man kann auch μ als 1 nehmen, weil es auf einen gemeinsamen Faktor der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht ankommt. Die Auflösung der linearen Gleichungen für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gibt einen von 0 verschiedenen und konstanten Nenner, gleich dem doppelten Inhalt des Grundrißdreiecks $P_1' P_2' P_3'$, die Zähler sind lineare Funktionen von ξ, η. Damit ist gefunden

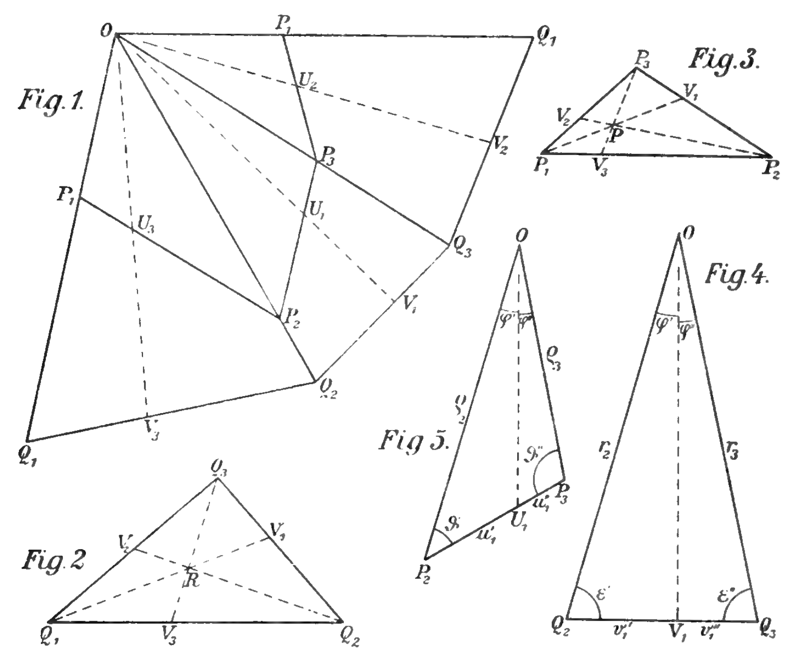
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \\ \lambda_2 &= A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \\ \lambda_3 &= A_3 \xi + B_3 \eta + C_3. \end{aligned}$$

Die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind ganze lineare Funktionen der Koordinaten ξ, η des Bildpunktes Q.

3. Die wirkliche Bestimmung der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erfolgt aus den Figuren 1 bis 5. Ein Punkt Q des Bilddreiecks liefert durch die Ecktransversalen die Punkte V_1, V_2, V_3 auf den Seiten. Ihnen entsprechen nach der räumlichen perspektivischen Zuordnung die Stellen U_1, U_2, U_3 auf den Seiten des Festpunktdreiecks. Die Ecktransversalen geben den Punkt R, welcher im Raum dem Bildpunkt Q perspektivisch entspricht; alles ist darstellend-geometrisch sehr einfach zu übersehen. Q ist in der Bildebene im Innern des Bilddreiecks angenommen, die Lage außerhalb bietet nichts neues. Die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke $Q Q_2 Q_3$, $Q Q_3 Q_1$, $Q Q_1 Q_2$ sind

$$J_1 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für einen innern Punkt Q sind die drei Größen positiv.



Anmerkung: In Fig. 2 ist statt R Q zu lesen, in Fig. 3 statt P R. In Fig. 4 ist r mit ϱ, in Fig. 5 ϱ mit r zu vertauschen.

Das Teilungsverhältnis $Q_2 V_1 : V_1 Q_3 = v_1' : v_1''$ ist gleich dem negativen Verhältnis der von Q_2 und Q_3 auf $Q_1 Q$ gefällten Lote und damit auch gleich $+J_3 : J_2$ (nicht $J_2 : J_3$).

So hat man

$$v_1' : v_1'' = J_3 : J_2$$
$$v_2' : v_2'' = J_1 : J_3$$
$$v_3' : v_3'' = J_2 : J_1.$$

Im Festpunktdreieck treten auf den Seiten entsprechende Teilungsverhältnisse $u_1' : u_1''$, $u_2' : u''$, $u_3' : u_3''$ auf. Aus projektiv-

geometrischen Gründen müssen sie bis auf konstante Faktoren gleich $v_1' : v_1''$, $v_2' : v_2''$, $v_3' : v_3''$ sein.

In den beiden Dreiecken $Q Q_2 V_1$ und $Q Q_3 V_1$ der Figur 4 wendet man den Sinussatz so an, daß v_1', v_1'' und $O V_1$ vorkommen. Die Verbindung der Formeln ergibt

$$\frac{v_1'}{v_1''} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi''} \cdot \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'}.$$

Entsprechend folgt aus den Dreiecken $O P_2 U_1$ und $O P_3 U_1$ (Fig. 5)

$$\frac{u_1'}{u_1''} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi''} \cdot \frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta'}.$$

Man erhält

$$\frac{u_1'}{u_1''} = \frac{v_1'}{v_1''} \cdot \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon''} \cdot \frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta'} \quad \text{oder} \quad \frac{u_1'}{u_1''} = \frac{v_1'}{v_1''} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_3}.$$

Damit ist das Formelsystem gefunden:

$$\frac{u_1'}{u_1''} = \frac{v_1'}{v_1''} \cdot \frac{r_3 \varrho_2}{r_2 \varrho_3} = \frac{J_3}{J_2} \cdot \frac{r_3 \varrho_2}{r_2 \varrho_3}$$

$$\frac{u_2'}{u_2''} = \frac{v_2'}{v_2''} \cdot \frac{r_1 \varrho_3}{r_3 \varrho_1} = \frac{J_1}{J_3} \cdot \frac{r_1 \varrho_3}{r_3 \varrho_1}$$

$$\frac{u_3'}{u_3''} = \frac{v_3'}{v_3''} \cdot \frac{r_2 \varrho_1}{r_1 \varrho_2} = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{r_2 \varrho_1}{r_1 \varrho_2}.$$

Im Festpunktdreieck wurden schon die baryzentrischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 eingeführt. R hat im Raum die Koordinaten

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3};$$

U_1 z. B. hat die Koordinaten

$$x = \frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad z = \frac{\lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_2 + \lambda_3},$$

und deshalb ist $\lambda_3 : \lambda_2$ das bisher mit $u_1' : u_2'$ bezeichnete Teilungsverhältnis.

So entstehen die Formeln

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{J_3}{J_2} \cdot \frac{r_3 \varrho_2}{r_2 \varrho_3}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{J_1}{J_3} \cdot \frac{r_1 \varrho_3}{r_3 \varrho_1}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{r_2 \varrho_1}{r_1 \varrho_2}$$

Sie werden erfüllt durch

$$\lambda_1 = J_1 \cdot \frac{r_1}{\varrho_1}$$

$$\lambda_2 = J_2 \cdot \frac{r_2}{\varrho_2}$$

$$\lambda_3 = J_3 \cdot \frac{r_3}{\varrho_3}$$

Auf einen gemeinsamen Faktor, der etwa noch hinzugefügt werden kann, kommt es nicht an. Entsprechend zu 2. sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wirklich ganze lineare Funktionen von ξ, η.

4. Zwei Aufnahmen werden nun betrachtet. Ein allgemeiner Geländepunkt sei P; ihm entspreche im ersten Bild Q_I, im zweiten Q_{II}. Q_I liefert bei der perspektivischen Abbildung auf die Ebene $\mathfrak{E}_I$ des ersten Festpunktdreiecks den Punkt R_I, Q_{II} gibt ebenso auf $\mathfrak{E}_{II}$ den Punkt R_{II}. Die Grundrisse von R_I und R_{II} sind R_I' und R_{II}'. Die Punkte werden nach den berechneten Koordinaten (3) in einen Plan großen Maßstabs eingetragen, in ein Quadratnetz, wie der Geodät Punkte „kartiert“. Ebenso werden die Grundrisse O_I' und O_{II}' der beiden Aufnahmepunkte O_I und O_{II} eingetragen, vorläufig mögen sie als zugängliche Punkte gelten.

Im Raum trifft der Strahl $O_I P$ die erste Festpunktsebene $\mathfrak{E}_I$ in R_I, und der Strahl $O_{II} P$ trifft $\mathfrak{E}_{II}$ in R_{II}. Man kennt nun in der Zeichnung die Grundrisse $O_I' R_I'$ und $O_{II}' R_{II}'$ beider Strahlen und findet P' als den Schnittpunkt dieser Linien.

Es handelt sich noch um die Höhe von P. Man kennt im Raum R_I und O_I, damit auch das Gefälle der Geraden $O_I R_I$ für die Längeneinheit im Grundriß. Hieraus ergibt sich mittelst der Strecke $R_I' P_I'$ die relative Höhe von P über R_I, die übrigens auch negativ sein kann. Entsprechend findet man den Höhenunterschied von P und R_{II} und hat damit eine Probe.

Durch Verwendung von mehr als zwei Aufnahmen erhält man P' als Schnittpunkt von mehr als zwei Geraden, durch graphischen Ausgleich. Ebenso hat man weitere Höhenproben. — Wenn O_I' und O_{II}' über die Zeichnungsfläche hinausfallen, so stört dies nicht wesentlich, denn die Richtungen $R_I' O_I'$ und $R_{II}' O_{II}'$ erhält man leicht aus Rechnung.

Ein besonderer Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß man die Aufnahmepunkte O_I und O_{II} nicht sehr genau nötig hat. Das beruht darauf, daß eine mäßige Unsicherheit von O_I' und O_{II}' die Richtungen der Geraden $R_I' O_I'$ und $R_{II}' O_{II}'$ nur unbedeutend beeinflußt; der Schnittpunkt P' wird deshalb wegen seiner Nähe an R_I' und R_{II}' nicht störend beeinträchtigt. Ebensowenig leidet die Höhenbestimmung des P unter der Unsicherheit der Grundrisse und der Höhen von O_I und O_{II}. Es lassen sich für alles leicht Fehlerabschätzungen bilden, zur praktischen Erprobung — wenigstens durch Bearbeitung einer größeren Reihe von Aufnahmen — bot sich noch keine Gelegenheit.



Über orthogonale Kurvensysteme in der Ebene.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. März 1919.

1. Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene werden im allgemeinen in der Weise eingeführt, daß die eine Kurvenschar als gegeben betrachtet und die andere, die der Orthogonal-Trajektorien, durch die Forderung der Orthogonalität bestimmt wird. Unter den Klassen von Orthogonal-Systemen, bei denen beide Kurvenscharen von vornherein als gleichberechtigt auftreten, ist die der Isothermen-Systeme bei weitem die wichtigste.

Die folgende Untersuchung stellt sich auf den Standpunkt der gleichzeitigen Einführung der beiden Kurvenscharen. Es wird ein Weg angegeben, auf dem es gelingt, unendlich viele Klassen von orthogonalen Kurvensystemen aufzustellen; zugleich ergibt sich die Möglichkeit einer systematischen Aufzählung, indem jede dieser Klassen durch zwei ganze Zahlen, die „Rangzahlen“ der Klasse, gekennzeichnet ist.

Bezogen auf zwei beliebige Systeme von Kurven u und v stellen sich die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der Ebene durch

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v)$$

dar. Das Linienelement der Ebene ist

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2; \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}; \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2;$$

die Orthogonalitäts-Bedingung ist $F = 0$.

Man kann stets eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (Laplacesche Gleichung) einer Funktion $\vartheta(u, v)$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} + a_0(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b_0(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0$$

aufstellen, welche x, y und 1 zu partikulären Integralen hat. Durch Multiplikation der beiden Gleichungen für $\vartheta = x$ und $\vartheta = y$ mit x bzw. y und Addition ergibt sich nach vereinfachender Zusammenfassung

$$\frac{\partial^2 (x^2 + y^2)}{\partial u \partial v} + a_0(u, v) \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial u} + b_0(u, v) \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial v} = 2F.$$

Wenn also $F = 0$ ist, und nur in diesem Fall, ist $x^2 + y^2$ ein 4. partikuläres Integral der Laplaceschen Gleichung.

Zwischen den 4 Integralen

$$\vartheta_1 = x; \quad \vartheta_2 = y; \quad \vartheta_3 = 1; \quad \vartheta_4 = x^2 + y^2$$

besteht die quadratische Beziehung

$$\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = \vartheta_3 \vartheta_4.$$

Diese ändert ihre Form nicht bei Einführung homogener Koordinaten

$$x_1 = \varrho x; \quad x_2 = \varrho y; \quad x_3 = \varrho;$$

und des entsprechenden 4. Integrals $x_4 = \varrho(x^2 + y^2)$, welche einer allgemeineren Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + a(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v} + c(u, v)\,\theta = 0$$

genügen. Bei Einführung „tetrazyklischer" Koordinaten

$$\theta_1 = \varrho x; \; \theta_2 = \varrho y; \; \theta_3 = \varrho \frac{1 - x^2 - y^2}{2}; \; \theta_4 = -i\varrho \frac{1 + x^2 + y^2}{2}$$

nimmt die quadratische Beziehung folgende Normalform an

$$\sum_1^4 {}^{\nu}\, \theta_\nu^2 = 0.$$

Die tetrazyklischen Koordinaten der Punkte der Ebene, bezogen auf ein Orthogonalsystem von Para-

meterkurven, sind 4 partikuläre Integrale einer Laplaceschen Gleichung.

2. In einer Abhandlung „Beitrag zur Laplaceschen Cascaden-Methode", die in den Mathematischen Annalen erscheint, habe ich mich allgemein mit Systemen von n Integralen einer Laplaceschen Gleichung beschäftigt, welche einer quadratischen Nebenbedingung genügen. Die Ergebnisse dieser Arbeit, die unter der besonderen Annahme $n = 4$ für die folgende Untersuchung grundlegend sind, seien in Kürze angeführt:

Aus einer Laplaceschen Gleichung

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a(u,v)\frac{\partial z}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial z}{\partial v} + c(u,v)z = 0$$

können durch Anwendung der Laplaceschen Transformation nach u und nach v

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial v} + az; \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} + bz_1 = hz$$

$$z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial u} + bz; \quad \frac{\partial z_{-1}}{\partial v} + az_{-1} = kz$$

zwei neue Laplacesche Gleichungen $E_1 = 0$ in z_1 und $E_{-1} = 0$ in z_{-1} abgeleitet werden, deren Integration mit der Integration von $E = 0$ äquivalent ist. Dabei bedeuten h und k die „Invarianten" der Ausgangsgleichung:

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c; \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c.$$

Die Laplacesche Transformation ist entweder nach beiden Seiten hin unbegrenzt fortsetzbar, oder sie bricht bei der p. bzw. $-q$. Transformierten ab.

In diesem Fall läßt sich das allgemeine Integral der letzten Transformierten E_p bzw. E_{-q} auf die Form bringen:

$$z_p = U(u) + \int \beta(u,v)\psi(v)\,dv; \quad z_{-q} = V(v) + \int \alpha(u,v)\varphi(u)\,du,$$

wo $U(u)$, $\varphi(u)$, $V(v)$, $\psi(v)$ willkürliche Funktionen von u bzw. v allein bedeuten, $\alpha(u,v)$ und $\beta(u,v)$ dagegen bestimmte Funktionen von u und v. Ein unwesentlicher Faktor, der allen

partikulären Integralen gemeinsam ist, ist weggelassen. Die Ausgangsgleichung heißt dann „vom Rang $p+1$ hinsichtlich u bzw. $q+1$ hinsichtlich v“.

Besteht zwischen n Integralen von $E=0$ eine quadratische Bedingung

$$\sum_1^n {}_\nu \, z_\nu^2 = 0,$$

so genügen die n Integrale $z_{i\nu}$ von $E_i=0$, welche durch i-malige Transformation aus z_ν hervorgehen, und die entsprechenden n Integrale $z_{-i\nu}$ von $E_{-i}=0$ für beliebiges i folgendem Gleichungssystem

$$\sum_1^n {}_\nu \, z_{i,\nu} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n {}_\nu \, z_{i,\nu} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial u} = 0 \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial v} = 0$$

$$\sum_1^n {}_\nu \, z_{i,\nu} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial v} = 0 \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial u} = 0$$

welches seinerseits für das Bestehen der quadratischen Bedingung notwendig und hinreichend ist.

Um zu Integralen zu gelangen, die in geschlossener Form angebbar sind, ist vorausgesetzt, daß $E=0$ hinsichtlich u von endlichem Rang $p+1$ ist. Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit des Bestehens einer quadratischen Beziehung zwischen einer Anzahl n von linear unabhängigen partikulären Integralen, daß sie auch hinsichtlich v von endlichem Rang $q+1$ ist.

Wählt man die Bezeichnungen so, daß

$$q > p$$

ist, so ist n an die Bedingung geknüpft:

$$n \geq q - p + 2.$$

Das allgemeine Integral von $E=0$ kann in folgende Form gebracht werden:

$$z = \begin{vmatrix} U\,U' \dots U^{(p)}\,V\,V' \dots V^{(q)} \\ x_1\,x_1' \dots x_1^{(p)}\,y_1\,y_1' \dots y_1^{(q)} \\ x_2\,x_2' \dots x_2^{(p)}\,y_2\,y_2' \dots y_2^{(q)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m\,x_m' \dots x_m^{(p)}\,y_m\,y_m' \dots y_m^{(q)} \end{vmatrix}.$$

Dabei bedeutet U eine willkürliche Funktion von u allein, V von v allein; $x_1, x_2 \dots, x_m$ sind bestimmte Funktionen von u allein, $y_1, y_2 \dots, y_m$ von v allein. Außerdem ist

$$m = p + q + 1.$$

Durch Transformation der quadratischen Bedingung in sich läßt sich eine Normierung der Integrale erreichen, derart, daß ein Teil von ihnen nur eine willkürliche Funktion U, der Rest nur eine willkürliche Funktion V enthält; also

$$\sum_1^s{}^{\nu} \begin{vmatrix} U_\nu\,U_\nu' \dots U_\nu^{(p)} & 0\ 0\ \dots\ 0 \\ x_1\,x_1' \dots x_1^{(p)} & y_1\,y_1' \dots y_1^{(q)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m\,x_m' \dots x_m^{(p)} & y_m\,y_m' \dots y_m^{(q)} \end{vmatrix}^2 + \sum_1^t{}^{\nu} \begin{vmatrix} 0\ 0\ \dots\ 0 & V_\nu\,V_\nu' \dots V_\nu^{(q)} \\ x_1\,x_1' \dots x_1^{(p)} & y_1\,y_1' \dots y_1^{(q)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m\,x_m' \dots x_m^{(p)} & y_m\,y_m' \dots y_m^{(q)} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Dabei ist $$s + t = n.$$

s und t selbst genügen den Bedingungen

$$s \geqq p - q + 2; \quad t \geqq q - p + 2,$$

aus denen sich noch $n \geqq 4$ ergibt. Der im folgenden in geometrischen Anwendungen behandelte Fall $n = 4$ ist also der einfachste, bei welchem die allgemeine Theorie noch zur Geltung kommt.

Es handelt sich jetzt um die Aufsuchung von geeigneten n partikulären Integralen. Die s Funktionen $U_\nu(u)$ und die m Funktionen $x_\mu(u)$ müssen das System von $p + 1$ Gleichungen

$$\sum_1^s{}^{\nu}\, U_\nu^{(\varkappa)2} + \sum_1^m{}^{\mu}\, x_\mu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \dots, p)$$

erfüllen; ein analoges System die t Funktionen $V_\nu(v)$ und m Funktionen $y_\mu(v)$

$$\sum_1^t{}^{\nu}\, V_\nu^{(\lambda)2} + \sum_1^m{}^{\mu}\, y_\mu^{(\lambda)2} = 0; \quad (\lambda = 0, 1 \dots, q).$$

Ein derartiges Gleichungssystem, das vereinfacht in der Form

$$\sum_1^N {}^\nu A_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \ldots k)$$

geschrieben sein möge, läßt sich durch schrittweise Reduktion auflösen. Wenn ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, so genügen N Funktionen B_ν, die mit A_ν durch die Gleichungen $A_\nu = \varrho B_\nu$ verbunden sind, denselben Gleichungen wie die A_ν:

$$\sum_1^N {}^\nu B_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \ldots k)$$

Durch geeignete Wahl von ϱ läßt sich erreichen, daß

$$B_{N-1} = \frac{i}{2}\left(1 + \sum_1^{N-2} {}^\nu B_\nu^2\right); \quad B_N = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sum_1^{N-2} {}^\nu B_\nu^2\right)$$

wird; dadurch wird die erste Gleichung formal zur Identität, und in allen folgenden verringert sich die Zahl der Summanden um 2; das Gleichungssystem reduziert sich also auf ein System, das eine Gleichung weniger als das Ausgangssystem und in jeder Gleichung 2 Summanden weniger enthält:

$$\sum_1^{N-2} {}^\nu B_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots k).$$

Hat man diese Reduktion so oft durchgeführt, daß nur mehr eine Gleichung übrig bleibt, so erfordert die Bestimmung der Größen A_ν nur Quadraturen.

3. Im Fall $n = 4$ ergeben die allgemeinen Beziehungen zwischen n, p, q, s, t:

$$4 \geq q - p + 2; \quad q - p \leq 2; \quad q > p$$
$$s = p - q + 2; \quad t = q - p + 2.$$

Demnach zerfallen die ebenen Orthogonalsysteme in drei verschiedene Typen, je nachdem $q - p$ den Wert 0, 1 oder 2 hat. Führt man noch die „Rangzahlen"

$$r_1 = p + 1; \quad r_2 = q + 1$$

ein, so sind die drei Typen durch folgende Zahlen charakterisiert:

I. $q = p$; $r_1 = p + 1$; $r_2 = p + 1$; $s = 2$; $t = 2$
II. $q = p + 1$; $r_1 = p + 1$; $r_2 = p + 2$; $s = 1$; $t = 3$
III. $q = p + 2$; $r_1 = p + 1$; $r_2 = p + 3$; $s = 0$; $t = 4$.

Legt man also der Zahl p alle ganzzahligen positiven Werte (einschließlich 0) bei, so ergibt eine Aufzählung aller ebenen Orthogonalsysteme drei nebeneinander herlaufende Reihen. Die drei Typen werden im folgenden allgemein untersucht und die Ergebnisse zur Aufzählung der einfachsten Fälle und zur Kennzeichnung ihrer geometrischen Eigenschaften verwendet.

4. Die tetrazyklischen Koordinaten sollen in rein geometrischer Weise durch stereographische Projektion der Kugel eingeführt werden; der Übergang zu einer Reihe räumlicher Betrachtungen, die bei der folgenden Untersuchung ebener Orthogonal-Systeme nicht zu umgehen sind, vollzieht sich dann in natürlichster Weise.

Projiziert man einen Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ aus dem Südpol $(0, 0, -1)$ stereographisch in die Äquatorebene $(Z = 0)$, so sind die Koordinaten des Bildpunkts (x, y)

$$x = \frac{X}{1 + Z}; \quad y = \frac{Y}{1 + Z}$$

oder in homogener Form (a ist, wie im folgenden ϱ_0 und ϱ, ein Proportionalitäts-Faktor)

$$a x = X; \quad a y = Y; \quad a = 1 + Z.$$

Hiezu tritt zufolge der Gleichung der Einheitskugel die 4. Gleichung

$$a (x^2 + y^2) = 1 - Z.$$

Unter Verzicht auf die Realität der Darstellung bringt man durch die Substitution

$$\theta_1 = \varrho_0 X; \quad \theta_2 = \varrho_0 Y; \quad \theta_3 = \varrho_0 Z; \quad \theta_4 = -\varrho_0 i$$

die Gleichung der Einheitskugel auf die Normalform (3)

$$\sum_1^4 {}^\nu \, \theta_\nu^2 = 0;$$

durch Auflösung der homogenen Formeln für die stereographische Projektion ergeben sich die „tetrazyklischen Punktkoordinaten“ der Ebene (2):

$$\theta_1 = \varrho x;\quad \theta_2 = \varrho y;\quad \theta_3 = \varrho \frac{1 - x^2 - y^2}{2};\quad \theta_4 = -\varrho i \frac{1 + x^2 + y^2}{2}$$

$$(\theta_3 + i\theta_4 = \varrho).$$

Bei dieser Einführung kann man die tetrazyklischen Koordinaten θ_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) nach Wahl als Punktkoordinaten auf der Kugel oder in der Ebene auffassen; die Rückkehr zu den rechtwinkligen Koordinaten vollzieht sich für die Kugelpunkte und für die Punkte ihres ebenen stereographischen Bildes mittels der Formeln:

$$X = \frac{\theta_1}{i\theta_4};\quad Y = \frac{\theta_2}{i\theta_4};\quad Z = \frac{\theta_3}{i\theta_4}$$

$$x = \frac{\theta_1}{\theta_3 + i\theta_4};\quad y = \frac{\theta_2}{\theta_3 + i\theta_4};\quad \left(x^2 + y^2 = \frac{-\theta_3 + i\theta_4}{\theta_3 + i\theta_4}\right).$$

Ein Kreis auf der Kugel wird als Schnitt der Kugelfläche mit einer Ebene in tetrazyklischen Koordinaten durch eine lineare Gleichung gegeben; ebenso also auch ein Kreis in der Ebene:

$$\sum_1^4{}^{\nu}\, \varphi_\nu \theta_\nu = 0.$$

Bei Einführung rechtwinkliger Koordinaten in der Ebene ergibt sich

$$x^2 + y^2 - \frac{2\varphi_1}{\varphi_3 + i\varphi_4} x - \frac{2\varphi_2}{\varphi_3 + i\varphi_4} y - \frac{\varphi_3 - i\varphi_4}{\varphi_3 + i\varphi_4} = 0.$$

Bezeichnet man die Mittelpunktskoordinaten des Kreises in der Ebene mit a, b, die Potenz des Anfangspunktes mit T^2, so ergibt sich die geometrische Bedeutung der „tetrazyklischen Kreiskoordinaten“ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$:

$$\varphi_1 = \sigma a;\quad \varphi_2 = \sigma b;\quad \varphi_3 = \sigma \frac{1 - T^2}{2};\quad \varphi_4 = -i\sigma \frac{1 + T^2}{2}$$

$$(\varphi_3 + i\varphi_4 = \sigma)$$

σ ist ein Proportionalitäts-Faktor; der Kreisradius[1]) R ergibt sich aus

$$\sqrt{\sum_1^4{}_\nu \varphi_\nu^2} = \sigma R.$$

Eine lineare Gleichung zwischen den φ_ν

$$\sum_1^4{}_\nu c_\nu \varphi_\nu = 0$$

sagt aus, daß die Ebene (φ) durch einen Punkt (c) hindurchgeht. Alle so definierten Kreise liegen also in den Ebenen eines Bündels mit dem Träger (c); sie schneiden den Kreis, in dem die Polarebene von (c) die Kugel trifft, als „Grundkreis" senkrecht. In der Ebene stellt eine lineare Gleichung zwischen tetrazyklischen Kreiskoordinaten somit die Gleichung eines Kreisnetzes dar.

Ein besonderes Kreisnetz $\varphi_3 + i\varphi_4 = 0$ bilden alle Geraden der Ebene.

Zwei lineare Gleichungen zwischen den φ_ν bestimmen die Kreise eines Büschels.

5. Der Laplaceschen Transformation legt Darboux[2]) folgende geometrische Deutung unter: θ_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ (ohne quadratische Beziehung) seien die homogenen Punktkoordinaten einer Fläche F, auf der die Kurven u und v der Laplaceschen Gleichung zufolge ein konjugiertes System bilden. Legt man in den Punkten von F die Tangenten an die Kurven u, so entsteht eine Strahlenkongruenz, deren erste Brennfläche F ist; die Koordinaten $\theta_{1,\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ der zweiten Brennfläche F_1 gehen durch die Laplacesche Transformation

$$\theta_{1\,\nu} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial v} + a\,\theta_\nu$$

aus denen der ersten hervor. F wird längs jeder Kurve v von den Ebenen einer abwickelbaren Fläche berührt, deren

[1]) Die durch Einführung des imaginären Radius als 5. Koordinate entstehenden „pentazyklischen Kreiskoordinaten" kommen hier nicht in Betracht.

[2]) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II. Bd., S. 16 u. f.

Rückkehrkante die entsprechende Kurve v auf F_1 bildet; ebenso bestimmen die Tangenten einer Kurve u von F eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante eben diese Kurve u ist und deren Ebenen F_1 längs der entsprechenden Kurve u berühren.

In gleicher Weise kann man F zur ersten Brennfläche einer Kongruenz machen, die von den Tangenten der Kurven v von F gebildet ist. Die Koordinaten der 2. Brennfläche werden dann durch die Laplacesche Transformation

$$\theta_{-1,\nu} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial u} + b\,\theta_\nu \text{ erhalten.}$$

Beide Transformationen lassen sich fortsetzen, indem man wieder F_1 bzw. F_{-1} zur ersten Brennfläche einer Strahlenkongruenz macht, die auf F_2 bzw. F_{-2} führt usf. Ist die zu F gehörige Laplacesche Gleichung vom Range $i+1$ hinsichtlich einer der beiden Veränderlichen, bricht also die Reihe der Transformierten nach i Operationen ab, so artet die mit F_i als erster Brennfläche konstruierte Kongruenz in der Weise aus, daß ihre 2. Brennfläche eine (im allgemeinen doppelt gekrümmte) Kurve wird.

Der Satz, daß eine Laplacesche Gleichung, welche vier durch eine quadratische Beziehung verbundene Integrale besitzt und welche hinsichtlich der einen Veränderlichen von endlichem Rang r_1 ist, auch hinsichtlich der anderen Veränderlichen von endlichem Rang r_2 ist, wobei $|r_2 - r_1| \leq 2$ ist, hat also folgenden geometrischen Sinn. Die beiden Kurvenscharen eines Orthogonalsystems auf der Kugel dienen als Ausgang zweier Reihen von Strahlen-Kongruenzen, deren 1. Brennfläche in beiden Fällen die Kugel ist. Wenn die eine Reihe nach einer endlichen Anzahl von r_1 Operationen auf eine in eine Kurve ausgeartete letzte Brennfläche führt, so gilt das gleiche für die 2. Reihe nach einer endlichen Anzahl von r_2 Operationen, wobei $|r_2 - r_1| \leq 2$ ist (vgl. Fig. S. 140).

6. Es sei jetzt $P_i(z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4})$ ein Punkt einer Brennfläche F_i, die nach i Operationen aus der Kugel hervorgeht,

ebenso $P_{-i}(z_{-i,1}, z_{-i,2}, z_{-i,3}, z_{-i,4})$ der entsprechende Punkt einer Brennfläche F_{-i}, die ebenfalls nach i Operationen, aber unter Verwendung der anderen Kurvenschar, aus der Kugel erhalten wird. Wegen $\sum_1^4 {}^\nu z_{i,\nu} z_{-i,\nu} = 0$ liegt P_{-i} in der Polarebene von P_i und umgekehrt. Die Ebenen-Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 der Tangentialebene von F_i in P_i sind durch die drei Gleichungen bestimmt:

$$\sum_1^4 {}^\nu \xi_\nu z_{i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4 {}^\nu \xi_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} = 0; \quad \sum_1^4 {}^\nu \xi_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} = 0.$$

Wegen

$$\sum_1^4 {}^\nu z_{i,\nu} z_{-i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4 {}^\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} z_{-i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4 {}^\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} z_{-i,\nu} = 0$$

ist

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = z_{-i,1} : z_{-i,2} : z_{-i,3} : z_{-i,4}.$$

Die Ebenenkoordinaten von F_i sind also den Punktkoordinaten von F_{-i} proportional und umgekehrt.

Die Flächen F_i und F_{-i} liegen in Bezug auf die Ausgangskugel polar. F_{-i} wird von den Polarebenen der Punkte von F_i umhüllt; die Punkte von F_{-i} sind die Pole der Tangentialebenen von F_i.

Sowohl F_i als F_{-i} werden durch $z_{i,\nu}$ und $z_{-i,\nu}$ in doppelter Weise, in Punkt- und Ebenen-Koordinaten, dargestellt. Diese Dualität gilt ohne Zwang, so lange F_i und F_{-i} ∞^2 Punkte und ∞^2 Tangentialebenen besitzen; für die Endglieder der Reihen von Brennflächen, bei denen ein Ausarten in eine Kurve oder abwickelbare Fläche eintritt, sind besondere Betrachtungen nötig.

Die gleiche Polarreziprozität gilt für zwei Strahlenkongruenzen, welche F_i und F_{i+1} bzw. F_{-i} und F_{-i-1} zu Brennflächen haben. Insbesondere sind die beiden Strahlensysteme, welche die Kugel selbst zur ersten Brennfläche haben, zur Kugel polar; entsprechende Strahlen sind aufeinander senkrechte Tangenten der Kugel.

Auf Grund dieser allgemeinen geometrischen Überlegungen werden nun die oben aufgestellten 3 Typen gesondert behandelt.

7. I. Typus. $q = p;\ s = 2;\ t = 2.$

Die tetrazyklischen Koordinaten der Kugelpunkte sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} U_\nu\, U_\nu' & \dots & U_\nu^{(p)} & 0\ 0 & \dots & 0 \\ x_1\, x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1\, y_1' & \dots & y_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\, x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m\, y_m' & \dots & y_m^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1,2)$$

$$\theta_\pi = \begin{vmatrix} 0\ 0 & \dots & 0 & V_\pi\, V_\pi' & \dots & V_\pi^{(p)} \\ x_1\, x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1\, y_1' & \dots & y_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\, x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m\, y_m' & \dots & y_m^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (\pi = 3,\ 4)$$

Dabei ist $m = 2p + 1$.

p Laplacesche Transformationen im positiven Sinne ergeben die homogenen Punktkoordinaten von F_p, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_{-p}:

$$\theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu & 0\ 0 & \dots & 0 \\ x_1 & y_1\, y_1' & \dots & y_1^{(2p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m\, y_m' & \dots & y_m^{(2p)} \end{vmatrix} = U_\nu\, \Delta(y) \qquad \theta_{p,\pi} = \begin{vmatrix} 0 & V_\pi\, V_\pi' & \dots & V_\pi^{(2p)} \\ x_1 & y_1\, y_1' & \dots & y_1^{(2p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m\, y_m' & \dots & y_m^{(2p)} \end{vmatrix}$$

Ebenso ergeben p Transformationen im negativen Sinn die homogenen Punktkoordinaten von F_{-p}, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_p:

$$\theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu\, U_\nu' & \dots & U_\nu^{(2p)} & 0 \\ x_1\, x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\, x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m \end{vmatrix} \qquad \theta_{-p,\pi} = \begin{vmatrix} 0\ 0 & \dots & 0 & V_\pi \\ x_1\, x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\, x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m \end{vmatrix} = -V_\pi\, \Delta(x).$$

Zwischen den so bestimmten Koordinaten bestehen folgende Gleichungen:

$$\theta_{p,1}\, U_2 - \theta_{p,2}\, U_1 = 0; \quad \theta_{-p,3}\, V_4 - \theta_{-p,4}\, V_3 = 0.$$

Hieraus folgt in Punktkoordinaten (x, y, z):

$$x_p U_2 - y_p U_1 = 0; \quad z_{-p} V_4 - V_3 = 0$$

und in Ebenenkoordinaten (ξ, η, ζ)

$$\xi_{-p} U_2 - \eta_{-p} U_1 = 0; \quad \zeta_p V_4 - V_3 = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende geometrische Eigenschaften für die transformierten Flächen F_p und F_{-p}:

Auf F_p liegen die Kurven u in Ebenen, die ein Büschel mit der z Achse als Achse bilden; längs der konjugierten Kurven v wird F_p von Kegeln berührt, deren Spitzen die z Achse erfüllen.

F_{-p} wird längs der Kurven u von Zylindern berührt, die zur xy Ebene parallel sind; die konjugierten Kurven v liegen in zur xy Ebene parallelen Ebenen.

Eine weitere Laplacesche Transformation ergibt

$$\theta_{p+1,\nu} = 0; \quad \theta_{p+1,\pi} = \begin{vmatrix} V_\pi & V_\pi' & \ldots & V_\pi^{(2p+1)} \\ y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & \ldots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = \psi_\pi(v)$$

$$\theta_{-p-1,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu & U_\nu' & \ldots & U_\nu^{(2p+1)} \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = \varphi_\nu(u); \quad \theta_{-p-1,\pi} = 0.$$

F_{p+1} und F_{-p-1} arten also, wie auch die geometrische Betrachtung der Strahlensysteme, welche F_p und F_{-p} zur ersten Brennfläche haben, unmittelbar ersehen läßt, in die z Achse bzw. die ∞ ferne Gerade der xy Ebene aus. Es mag darauf hingewiesen werden, daß die besondere Lage dieser beiden Geraden eine Folge der gewählten Normierung der tetrazyklischen Koordinaten ist; ohne diese würden sich zwei beliebige, zur Ausgangskugel polare Gerade ergeben.

F_{p-1} und F_{-p+1} sind die ersten Brennflächen in den Strahlensystemen, welche F_p und F_{-p} zu zweiten Brennflächen

haben. Die Tangenten einer Kurve v von F_p berühren auf F_{p-1} die Kurven u in den Punkten der entsprechenden Kurve v. Die Tangentialebenen von F_p in den Punkten einer Kurve v sind also Schmiegungsebenen der Kurven u auf F_{p-1} in den Punkten einer Kurve v. Diese Schmiegungsebenen bilden folglich den Tangentialkegel, der F_p längs der Kurve v berührt, und dessen Spitze auf der Geraden F_{p+1} liegt. Der duale Satz sagt aus, daß die Punkte der Rückkehrkanten der F_{p-1} längs der Kurven v berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve u auf F_{p-1} entsprechen, die entsprechende Kurve u auf F_p erfüllen; sie liegen also in einer Ebene des Büschels, welches die Gerade F_{p+1} zum Träger hat. — Die gleichen Sätze gelten, mit Vertauschung von u und v, für F_{-p+1}.

8. II. Typus. $q = p + 1$; $s = 1$; $t = 3$.

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(p)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p+1)} \end{vmatrix}$$

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(p+1)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p+1)} \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, 4).$$

Dabei ist $m = 2p + 2$.

Wie bei I erhält man die homogenen Punktkoordinaten von F_p, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_{-p}:

$$\theta_{p,1} = \begin{vmatrix} U & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = U\Delta(y); \quad \theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(2p+1)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix}$$

Ebenso die homogenen Punktkoordinaten von F_{-p}, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_p:

$$\theta_{-p,1} = \begin{vmatrix} U\, U' \ldots U^{(2p)}\, 0 & 0 \\ x_1\, x_1' \ldots x_1^{(2p)}\, y_1 & y_1' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_m\, x_m' \ldots x_m^{(2p)}\, y_m & y_m' \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} 0\ 0 \ldots 0 & V_\nu\, V_\nu' \\ x_1\, x_1' \ldots x_1^{(2p)} & y_1\, y_1' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ x_m\, x_m' \ldots x_m^{(2p)} & y_m\, y_m' \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man mit v_ν die adjungierten Funktionen der V_ν, setzt also

$$\sum_2^4{}^\nu\, v_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_2^4{}^\nu\, v_\nu V_\nu' = 0,$$

so ist auch

$$\sum_2^4{}^\nu\, v_\nu\, \theta_{-p,\nu} = 0.$$

Diese Gleichung sagt in Punktkoordinaten aus: Auf F_{-p} liegen die Kurven v in Ebenen, die einen Zylinder mit zur x Achse parallelen Mantellinien bilden. In Ebenenkoordinaten: F_p wird längs der Kurven v von Kegeln berührt, deren Spitzen auf einer Kurve der Ebene $x = 0$ liegen.

Eine weitere Transformation ergibt:

$$\theta_{p+1,1} = 0; \quad \theta_{p+1,\nu} = \begin{vmatrix} V_\nu\, V_\nu' & \ldots & V_\nu^{(2p+2)} \\ y_1\, y_1' & \ldots & y_1^{(2p+2)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_m\, y_m' & \ldots & y_m^{(2p+2)} \end{vmatrix} = \psi_\nu(v)$$

$$\theta_{-p-1,1} = \begin{vmatrix} U\ U' & \ldots & U^{(2p+1)} & 0 \\ x_1\ x_1' & \ldots & x_1^{(2p+1)} & y_1 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\ x_m' & \ldots & x_m^{(2p+1)} & y_m \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p-1,\nu} = V_\nu\, \Delta(x).$$

F_{p+1} ist die von den Kegelspitzen gebildete Kurve der Ebene $x = 0$:

$$x = 0; \quad y : z : \sqrt{-1} = \psi_2 : \psi_3 : \psi_4.$$

F_{-p-1} ist der zur x Achse parallele Zylinder; seine Mantellinien sind:

$$y : z : \sqrt{-1} = V_2 : V_3 : V_4.$$

Die Schmiegungsebenen der Kurven u in den Punkten einer Kurve v von F_p gehen durch zwei konsekutive Punkte der Kurve F_{p+1}, bilden also ein Büschel, dessen Träger eine Tangente von F_{p+1} ist.

Dualer Satz: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p} entsprechen, liegen auf einer Geraden, nämlich einer Mantellinie v des Zylinders F_{-p-1}.

Die Ebenen, welche F_p längs einer Kurve v berühren, sind die Schmiegungsebenen der Kurven u auf F_{p-1} in den Punkten einer Kurve v. Diese gehen also durch einen festen Punkt, nämlich durch die Spitze des Kegels, welcher F_p längs der Kurve v berührt.

Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p+1} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p+1} entsprechen, liegen in einer Ebene, die den Zylinder F_{-p-1} berührt.

9. III. Typus. $q = p + 2;\ s = 0;\ t = 4.$

Die tetrazyklischen Koordinaten der Kugelpunkte sind:

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(p+2)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p+2)} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Dabei ist $m = 2p + 3$.

Wie bei I. und II. ergeben p Transformationen nach beiden Seiten:

$$\theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(2p+2)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+2)} \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 & y_1' & y_1'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m & y_m' & y_m'' \end{vmatrix}.$$

Dabei sind $\theta_{p,\nu}$ die homogenen Punktkoordinaten von F_p und Ebenenkoordinaten von F_{-p}; $\theta_{-p,\nu}$ die Punktkoordinaten von F_{-p} und Ebenenkoordinaten von F_p.

Bezeichnet man wieder mit v_ν die adjungierten Funktionen der V_ν, definiert also v_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) durch die 3 Gleichungen:

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v_\nu V'_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v_\nu V''_\nu = 0,$$

aus denen durch Differentiation folgende zwei erhalten werden:

$$\sum_1^4{}^\nu v'_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v'_\nu V'_\nu = 0,$$

so ist auch

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu \theta_{-p,\nu} = 0,$$

also: Auf F_{-p} liegen die Kurven v in Ebenen; diese umhüllen eine abwickelbare Fläche; F_p wird längs der Kurven v von Kegeln berührt, die Spitzen erfüllen eine Raumkurve.

Eine weitere Transformation ergibt:

$$\theta_{p+1,\nu} = \begin{vmatrix} V_\nu & V'_\nu & \ldots & V_\nu^{(2p+3)} \\ y_1 & y'_1 & \ldots & y_1^{(2p+3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y'_m & \ldots & y_m^{(2p+3)} \end{vmatrix} = \psi_\nu(v); \quad \theta_{-p-1,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & V_\nu & V'_\nu \\ x_1 & x'_1 & \ldots & x_1^{(2p+1)} & y_1 & y'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x'_m & \ldots & x_m^{(2p+1)} & y_m & y'_m \end{vmatrix}$$

Jetzt ist

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu \theta_{-p-1,\nu} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v'_\nu \theta_{-p-1,\nu} = 0.$$

Also ist in Punktkoordinaten F_{-p-1} die von den Geraden gebildete Regelfläche, in denen die Ebenen der Kurven v von F_{-p} von den ∞ benachbarten geschnitten werden, d. h. F_{-p-1} ist die von den Ebenen der Kurven v von F_{-p} umhüllte abwickelbare Regelfläche.

Dual: F_{p+1} ist die von den Spitzen der F_p in den Kurven v berührenden Kegel gebildete Raumkurve.

Ihre Punktkoordinaten gibt $\theta_{p+1,\nu}$:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4.$$

Das sind zugleich die Ebenenkoordinaten von F_{-p-1}.

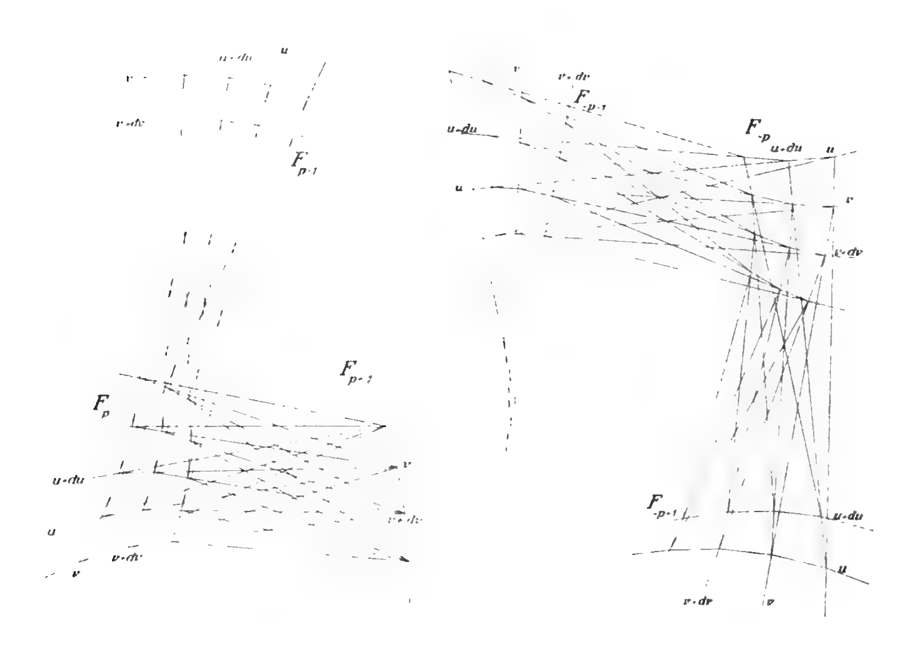
Unter Verwendung des Punktes als Raumelement läßt F_{-p-1} noch eine Transformation zu:

$$\theta_{-p-2,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & V_\nu \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(2p+2)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(2p+2)} & y_m \end{vmatrix} = V_\nu \Delta(x).$$

F_{-p-2} ist die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche F_{-p-1}; ihre Punktkoordinaten sind:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4.$$

Die Schmiegungsebenen der Kurven u von F_p längs einer Kurve v enthalten je eine Mantellinie zweier konsekutiver Kegel; sie bilden also ein Büschel, dessen Träger durch zwei konsekutive Kegelspitzen geht, mithin eine Tangente von F_{p+1} ist.



Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p} entsprechen, erfüllen eine Gerade, nämlich eine Erzeugende v der abwickelbaren Fläche F_{-p-1}.

Die Schmiegungsebenen der Kurven u von F_{p-1} längs einer Kurve v sind die Tangentialebenen von F_p längs einer Kurve v, bilden also einen Kegel; die Spitzen der Kegel v erfüllen die Raumkurve F_{p+1}.

Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p+1} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p+1} entsprechen, erfüllen die ebene Kurve v von F_{-p}; die Ebenen bilden die abwickelbare Fläche F_{-p-1}.

Es ist bemerkenswert, daß die Typen I. und II. geometrisch als Spezialfälle von III. erscheinen, während sie das analytisch nicht sind.

10. Der Aufstellung der einfachsten Orthogonalsysteme der Kugel, welche den 3 Typen angehören, seien einige geometrisch evidente Sätze über Kurvensysteme auf der Kugel vorausgeschickt:

A) Wenn die Schmiegungsebenen der Kurven u der Kugel in den Schnittpunkten mit einer Kurve v einen Kegel bilden, so schneiden die Schmiegungskreise der Kurven u den Berührkreis des Rotationskegels, der von gleicher Spitze aus berührend an die Kugel gelegt werden kann, senkrecht, gehören also einem Kreisnetz an.

B) Dual: Wenn die Punkte der Rückkehrkanten der die Kugel längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Schnittpunkten mit einer Kurve v entsprechen, in einer Ebene E liegen, so gehen die Ebenen der Schmiegungskreise der Kurven u durch den Pol dieser Ebene, bilden also einen Kegel; die Schmiegungskreise gehören folglich einem Netz an, dessen Grundkreis der Schnittkreis der Kugel mit der Polarebene der Kegelspitze, also der Ebene E ist.

C) Wenn die Schmiegungsebenen der Kurven u der Kugel in den Schnittpunkten mit einer Kurve v ein Büschel bilden, so bilden die Schmiegungskreise ein Kreisbüschel durch die beiden Punkte, in denen der Träger des Ebenenbüschels die Kugel trifft.

D) Dual: Wenn die Punkte der Rückkehrkanten der die Kugel längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Schnittpunkten mit einer Kurve v entsprechen, auf einer Geraden g liegen, so gehen die Schmiegungsebenen der Kurven u durch die konjugierte Gerade h. Die Schmiegungskreise bilden also ein Büschel durch die beiden Punkte, in denen h die Kugel trifft; die Nullkreise des Büschels sind die Schnittpunkte von g mit der Kugel.

11. Es folgt nun eine Besprechung der einfachsten Orthogonalsysteme; von jedem Typus werden die beiden ersten der zugehörigen Reihe behandelt. Charakterisiert man ein Kurvensystem durch Zusammenstellung der beiden Rangzahlen $\{r_1, r_2\}$, so bezieht sich die Aufzählung auf folgende Fälle:

$$\text{I. } \{1,1\} \text{ und } \{2,2\}; \quad \text{II. } \{1,2\} \text{ und } \{2,3\};$$
$$\text{III. } \{1,3\} \text{ und } \{2,4\}.$$

I. Typus; $\{1, 1\}$; $p = q = 0$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} U_2 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_3 = \begin{vmatrix} 0 & V_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_4 = \begin{vmatrix} 0 & V_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel F_0 identisch; es ergeben sich die bekannten Eigenschaften der **orthogonalen Kreisbüschel**. Die Kurven u sind eben, also Kreise, und liegen in den Ebenen eines Büschels mit der Z Achse als Träger; längs dieser Kreise u wird die Kugel von Kreiszylindern berührt, deren Mantellinien der XY Ebene parallel sind. Längs der Kurven v, die Kreise in Ebenen parallel zur XY Ebene sind, wird die Kugel von Kegeln berührt, deren Spitzen die Z Achse erfüllen. Eine projektive Transfor-

mation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt, gibt die allgemeinsten orthogonalen Kreisbüschel; auf den Grenzfall der berührenden Büschel sei nicht näher eingegangen.

I. Typus; $\{2, 2\}$; $p = q = 1$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_{1,2} = \begin{vmatrix} U_{1,2} & U'_{1,2} & 0 & 0 \\ x_1 & x'_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & x'_2 & y_2 & y'_2 \\ x_3 & x'_3 & y_3 & y'_3 \end{vmatrix}; \quad \theta_{3,4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_{3,4} & V'_{3,4} \\ x_1 & x'_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & x'_2 & y_2 & y'_2 \\ x_3 & x'_3 & y_3 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch. Die Schmiegungsebenen der Kurven u in den Punkten einer Kurve v bilden einen Kegel, dessen Spitze auf der Z Achse liegt. Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören also einem Netz an, dessen Grundkreis in einer Parallelebene zur XY Ebene liegt. Ebenso gehören die Schmiegungskreise der Kurven v in den Punkten einer Kurve u einem Netz an, dessen Grundkreis ein größter Kreis ist, der von einer durch die Z Achse gehenden Ebene auf der Kugel ausgeschnitten wird.

Durch eine projektive Transformation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt, ergibt sich ein etwas allgemeineres Orthogonalsystem: die Grundkreise der beiden Scharen von Kreisnetzen bilden allgemeine orthogonale Kreisbüschel.

II. Typus; $\{1, 2\}$; $p = 0$; $q = 1$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & y'_2 \end{vmatrix}; \quad \theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V'_\nu \\ x_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & y'_2 \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Kurven v sind Kreise. Ihre Ebenen bilden einen Zylinder mit zur X Achse parallelen Mantellinien; die Spitzen

der Kegel, welche die Kugel in den Kreisen v berühren, bilden eine Kurve in der YZ Ebene. Unter den Kurven u befindet sich ein Kreis, nämlich der in der YZ Ebene liegende Hauptkreis; er ist (bei der projektiven Umformung) Grundkreis eines Netzes, dem die Kreise v angehören. Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, dem der Grundkreis des Netzes angehört.

II. Typus; $\{2, 3\}$; $p = 1$; $q = 2$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & U' & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' \\ . & . & . & . & . \\ x_4 & x_4' & y_4 & y_4' & y_4'' \end{vmatrix}; \quad \theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' \\ . & . & . & . & . \\ x_4 & x_4' & y_4 & y_4' & y_4'' \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Schmiegungskreise der Kurven u längs einer Kurve v gehören einem Netz an, dessen Grundkreis in einer auf der YZ Ebene senkrechten Ebene liegt. Die Grundkreise dieser Netze v gehören also selbst einem Netz an, dessen Grundkreis der in der YZ Ebene liegende Hauptkreis ist.

III. Typus; $\{1, 3\}$; $p = 0$; $q = 2$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & y_1 & y_1' & y_1'' \\ x_2 & y_2 & y_2' & y_2'' \\ x_3 & y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel identisch.

Die Kurven v sind Kreise, deren Ebenen an keine Bedingung geknüpft sind. Die Schmiegungskreise der

Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, das dadurch bestimmt ist, daß es außer dem Kreis v auch noch seinen benachbarten senkrecht schneidet.

III. Typus; $\{2, 4\}$; $p = 1$; $q = 3$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' & V_\nu''' \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' & y_1''' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5 & x_5' & y_5 & y_5' & y_5'' & y_5''' \end{vmatrix} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an.

12. Bei der stereographischen Projektion der Kugel in die Ebene bleiben Kreise, Büschel, Netze erhalten; die Schmiegungskreise gehen in Krümmungskreise über. — Die Aufzählung soll in der Weise erfolgen, daß die drei Typen ineinander eingereiht werden. Die Rangzahlen r_1 werden der Größe nach geordnet, ebenso die zu jedem r_1 möglichen Rangzahlen r_2; also in folgender Reihenfolge:

$$\{1, 1\};\ \{1, 2\};\ \{1, 3\};\ \{2, 2\};\ \{2, 3\};\ \{2, 4\};\ \ldots$$

Dann ergeben sich für die aufgezählten Klassen von Orthogonalsystemen folgende Eigenschaften:

$\{1, 1\}$: Die Kurven v bilden ein Kreisbüschel, die Kurven u das dazu orthogonale Kreisbüschel.

$\{1, 2\}$: Die Kurven v sind Kreise, die einem Netz angehören; die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, dem der Grundkreis des Netzes angehört.

$\{1, 3\}$: Die Kurven v sind Kreise; die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel.

$\{2, 2\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an, ebenso die Krümmungs-

kreise der Kurven v in den Punkten einer Kurve u; die Grundkreise der beiden Scharen von Kreisnetzen bilden orthogonale Kreisbüschel.

$\{2, 3\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u längs einer Kurve v gehören einem Netz an; die Grundkreise dieser Netze gehören selbst einem Netz an.

$\{2, 4\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an.

Die Isothermensysteme treten bei dieser Aufzählung nicht als eine geschlossene Klasse auf, sondern verteilen sich auf sämtliche Klassen des I. Typus. Mit Ausnahme der Klasse $\{1, 1\}$, die nur ein einziges und zwar isothermes Orthogonalsystem enthält, gehört jedoch zu jeder Klasse des I. Typus neben Isothermensystemen eine überwiegende Anzahl von nicht isothermen Orthogonalsystemen.

Binäre kubische Formen und Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene.

Von F. Lindemann.

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1919.

In seiner bekannten Programmschrift[1]) hatte sich F. Klein auch mit der Darstellung einer binären kubischen Form und ihrer Kovarianten auf der Kugelfläche beschäftigt. Während der Zeit, wo ich in Erlangen mit ihm zusammen arbeitete (1873 und 74), war die Frage nach der invarianten-theoretishen Bedeutung der sogenannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks (insbesondere der Brocardschen Punkte) für die kubischen Formen wiederholt Gegenstand unserer Unterhaltung; es schien eine einfache Beantwortung sich nicht zu bieten. Es freut mich, nun endlich die Lösung der Aufgabe in befriedigend einfacher Weise Klein zu seinem siebenzigsten Geburtstage mitteilen zu können.

Es handelt sich erstens um Auffindung der zusammengehörigen Nullpunkte einer Form des Büschels $\varkappa f^2 R + \lambda Q^2$ und zweitens um die Konstruktion der ersten und der zweiten Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf die durch die Ecken des Dreiecks dargestellte binäre kubische Form.

---

[1]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen.

§ I. Homogene Koordinaten in der komplexen Ebene.

Bedeuten a_i die Winkel, welche die Normalen zu den Seiten des gegebenen Dreiecks mit der X-Axe bilden, und p_i die Längen der Normalen, so sind die Größen

$$(1) \qquad x_i = -(x \cos a_i + y \sin a_i - p_i) \text{ für } i = 1, 2, 3$$

die Abstände des Punktes x, y von den Seiten des Dreiecks und können als homogene Koordinaten desselben in Anspruch genommen werden. Liegt der Anfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ im Innern des Dreiecks, so sind die x_i positiv für einen inneren Punkt. Bei passender Lage des Axensystems sind dann die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 des Dreiecks durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} \pi = \varphi_1 + a_3 - a_2 = \varphi_2 + a_1 + 2\pi - a_3 = \varphi_3 + a_2 - a_1 \\ \varphi_1 = a_2 - a_3 + \pi, \quad \varphi_2 = a_3 - a_1 - \pi, \quad \varphi_3 = a_1 - a_2 + \pi \end{aligned}$$

gegeben. Die Auflösungen der Gleichungen (1) lauten:

$$(3) \qquad x = \frac{A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3}{A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3}, \quad y = \frac{A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3}{A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3},$$

wo nun:

$$\begin{gathered} A_{11} = p_2 \sin a_3 - p_3 \sin a_2, \quad A_{22} = p_1 \cos a_3 - p_3 \cos a_1, \\ A_{33} = \sin(a_2 - a_1) = \sin \varphi_3, \\ A_{12} = p_3 \cos a_2 - p_2 \cos a_3, \quad A_{13} = \sin \varphi_1, \quad A_{23} = \sin \varphi_2, \\ A_{21} = p_3 \sin a_1 - p_2 \sin a_3, \quad A_{31} = p_3 \cos a_1 - p_1 \cos a_3, \\ A_{32} = p_2 \cos a_3 - p_1 \cos a_2. \end{gathered}$$

Setzen wir also, wie im folgenden immer:

$$(4) \qquad s_k = \sin \varphi_k, \quad A_k = e^{i a_k} \text{ für } k = 1, 2, 3; \quad i = \sqrt{-1},$$

so folgt aus (3)

$$(5) \qquad (x + iy)(s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) = -i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

wobei die zweite Klammer der linken Seite bekanntlich dem Inhalte des Dreiecks proportional und gleich einer Konstanten ist.

Die komplexen Koordinaten der Ecken des Dreiecks sind folglich:

$$z_1 = x_1 + i y_1 = -\frac{i}{s_1}(p_2 A_3 - p_3 A_2),$$

6) $$z_2 = x_2 + i y_2 = -\frac{i}{s_2}(p_3 A_1 - p_1 A_3),$$

$$z_3 = x_3 + i y_3 = -\frac{i}{s_3}(p_1 A_2 - p_2 A_1).$$

In Veränderlichen X, Y stellt die Gleichung

$$Z - z = 0 \quad \text{oder} \quad X + iY - (x + iy) = 0$$

diejenige imaginäre Linie dar, welche den Punkt $x + iy$ mit dem einen der beiden imaginären Kreispunkte verbindet[1]); in homogenen Koordinaten wird diese Gleichung nach (15):

$$(XpA)\, s_x - (xpA)\, s_x = 0,$$

wenn dem Punkte Z der Punkt X_1, X_2, X_3 entspricht und wenn

$$(xpA) = \sum \pm x_1 p_2 A_3 \quad \text{und} \quad s_x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3$$

gesetzt wird. Nun ist identisch:

$$(XpA)\, s_x - (Xpx)\, s_A + (XAx)\, s_p - (pAx)\, s_X = 0.$$

Hier ist aber $s_A = 0$, denn nach (5) ist $s_x = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden und A_1, A_2, A_3 sind die Koordinaten des einen der beiden (auf dieser Geraden liegenden) imaginären Kreispunkte. Mittelst der Gleichungen (2) und (4) läßt sich die Gleichung $s_A = 0$ auch leicht direkt bestätigen. Die Gleichung der geraden Linie, welche den imaginären Kreispunkt A mit dem Punkt x verbindet, ist daher:

(7) $$(XxA) = 0;$$

und für zwei verschiedene Punkte Z, z besteht die Identität:

(8) $$Z - z = \frac{-i}{s_X s_x} \cdot (XxA)\, s_p.$$

[1]) Vgl. meine Darstellung dieser Beziehungen in Bd. II der Vorlesungen über Geometrie nach Clebsch, S. 621 ff., 1891.

Das Doppelverhältnis σ von vier Punkten z, z', z'', z''' der komplexen Ebenen ist bekanntlich

$$(9)\qquad \sigma = \frac{z - z''}{z - z'''} \cdot \frac{z' - z'''}{z' - z''}.$$

In homogenen Koordinaten wird dieses Doppelverhältnis nach (8)

$$(10)\qquad \sigma = \frac{(x\,x''\,A)}{(x\,x'''\,A)} \cdot \frac{(x'\,x'''\,A)}{(x'\,x''\,A)},$$

wenn den Punkten z, z', z'', z''' bzw. die homogenen Koordinaten x_i, x_i', x_i'', x_i''' zukommen.

Besonders ausgezeichnet ist der Fall eines reellen Doppelverhältnisses. Lassen wir die Punkte x', x'', x''' mit den Ecken des Dreiecks, also bzw. mit den Punkten

$$(11)\qquad 1, 00;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1$$

zusammenfallen, so wird

$$(12)\qquad \sigma = \frac{x_1 A_3 - x_3 A_1}{x_2 A_1 - x_1 A_2} \cdot \frac{-A_2}{A_3}.$$

Soll dasselbe reell sein, so erhält man durch einfache Umformungen die Bedingung:

$$s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2 = 0;$$

das ist also die Gleichung des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, wie vorauszusehen war.

Ausgezeichnet und für die Gestalt des Dreiecks charakteristisch ist das Doppelverhältnis seiner drei Ecken mit dem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene. Setzen wir in (9) $z = \infty$, so wird nach (5) und (8) das Doppelverhältnis von drei Punkten mit dem unendlich fernen Punkte:

$$\sigma = \frac{z' - z'''}{z' - z''} = \frac{(x'\,x'''\,A)}{(x'\,x''\,A)} \cdot \frac{s_{x''}}{s_{x'''}}.$$

Ersetzen wir x', x'', x''' bzw. durch die Ecken (11) des Dreiecks, so wird

$$\sigma = -\frac{s_2}{s_3} e^{(a_2 - a_3) i} = \frac{s_2}{s_3} e^{\varphi_1 i},$$

$$(13) \qquad 1 - \sigma = \frac{z''' - z''}{z' - z''} = \frac{s_1}{s_2} e^{-\varphi_2 i},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma - 1} = \frac{z' - z'''}{z'' - z'''} = \frac{s_2}{s_1} e^{-\varphi_3 i}.$$

Ist also eines dieser Doppelverhältnisse reell, so liegen die Ecken des Dreiecks in gerader Linie; ist eines derselben rein imaginär, so ist das Dreieck rechtwinklig; hat eines derselben den absoluten Betrag 1, so ist das Dreieck gleichschenklich; ist eines derselben äquianharmonisch, so ist das Dreieck gleichseitig; hat eines derselben einen negativen reellen Teil, so ist das Dreieck stumpfwinklig.

§ 2. Systeme assoziierter Punkte.

Faßt man die Ecken des Dreiecks als Grundpunkte einer binären Form f dritter Ordnung auf, so ordnen sich alle Punkte der komplexen Ebene in Gruppen zu je sechs, welche die Grundpunkte einer Kovariante $\varkappa R f^2 + \lambda Q^2$ bilden, wo R (in Clebschs Bezeichnungsweise) die Dicriminante, Q die kubische Kovariante von f bezeichnet. Je sechs so zusammengehörige Punkte bilden mit den Grundpunkten (Ecken des Dreiecks) die Doppelverhältnisse

$$\sigma, \; \frac{1}{\sigma}, \; 1 - \sigma, \; \frac{1}{1 - \sigma}, \; \frac{\sigma}{\sigma - 1}, \; \frac{\sigma - 1}{\sigma},$$

wenn σ für einen dieser Punkte das betreffende Doppelverhältnis bezeichnet. Wir wollen solche Punkte im Folgenden als einander assoziiert bezeichnen.

Im metrischen Sinne ausgezeichnet (d. h. merkwürdig) sind vor allem die dem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene assoziierten Punkte, deren Aufsuchung uns jetzt be-

schäftigen soll. Unter Berücksichtigung der Relationen (2) läßt sich die Gleichung (12) in folgender Weise schreiben:

$$(14)\qquad \sigma = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}}.$$

Setzen wir für σ zuerst den reziproken Wert des durch die erste Gleichung (13) definierten Doppelverhältnisses ein, so wird:

$$\frac{s_3}{s_2} e^{-\varphi_1 i} = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}}$$

oder, indem man die Nenner fortschafft:

$$x_1 [s_3 (c_1 - i s_1) - s_2] + x_2 s_3 [\cos(\varphi_3 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_3 - \varphi_1)] - x_3 s_2 (c_2 - i s_2) = 0,$$

wo $c_i = \cos\varphi_i$, also z. B. $s_2 = c_1 s_3 + c_3 s_1$,

also auch:

$$x_1 s_1 c_3 - x_2 s_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + x_3 s_2 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 - x_2 s_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - x_3 s_2^2 = 0,$$

und hieraus ergibt sich:

$$(15)\qquad \varrho x_1 = 2 s_2 s_3 c_1, \quad \varrho x_2 = s_2 s_1, \quad \varrho x_3 = s_3 s_1.$$

Ersetzt man die linke Seite von (14) durch den dritten Wert (13), so kommt ebenso:

$$s_2 (x_1 e^{-\varphi_3 i} + x_2) = (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}) s_1,$$

oder:

$$x_1 s_3 c_2 - x_2 s_2 + x_3 s_1 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_3 - x_3 s_1 = 0,$$

also:

$$(16)\qquad \varrho x_1 = s_1 s_2, \quad \varrho x_2 = 2 s_3 s_1 c_2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_2.$$

Drittens ersetzen wir die linke Seite von (14) durch den zweiten der Werte (13) und finden:

$$(x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) s_1 = s_3 (x_1 e^{\varphi_2 i} + x_3),$$

und hieraus:

$$(17)\qquad \varrho x_1 = s_1 s_3, \quad \varrho x_2 = s_2 s_3, \quad \varrho x_3 = 2 s_1 s_2 c_3.$$

Die drei Punkte (15), (16) und (17) liegen bzw. auf den Geraden:

$$(18) \quad s_3 x_2 - s_2 x_3 = 0, \quad s_1 x_3 - s_3 x_1 = 0, \quad s_2 x_1 - s_1 x_2 = 0,$$

den vierten harmonischen Geraden zu den Tangenten des Umkreises in den Ecken, welche sich bekanntlich im Grebeschen (Lemoineschen) Punkte schneiden. Die gefundenen drei Punkte scheinen sonst nicht weiter beachtet zu sein.

Viertens ersetzen wir die linke Seite von (14) durch den reziproken Wert des dritten Doppelverhältnisses (13) und finden:

$$s_1 (x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_2 (x_1 e^{-\varphi_3 i} - x_3 e^{\varphi_1 i})$$

und hieraus:

$$x_1 s_3 c_2 + x_2 s_1 c_3 + x_3 s_2 c_1 = 0,$$
$$x_1 s_2 s_3 + x_2 s_1 s_3 + x_3 s_2 s_1 = 0,$$

also:

$$(18) \quad \varrho x_1 = s_1 s_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1), \quad \varrho x_2 = s_2 s_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varrho x_3 = s_3 s_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Gehen wir endlich von dem reziproken Werte des zweiten Doppelverhältnisses (13) aus, so ergibt sich

$$s_3 (x_1 e^{\varphi_2 i} - x_2 e^{-\varphi_1 i}) = s_1 (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i})$$

oder:

$$(19) \quad \begin{aligned} x_1 s_2 c_3 + x_2 s_3 c_1 + x_3 s_1 c_2 &= 0, \\ x_1 s_2 s_3 + x_2 s_3 s_1 + x_3 s_1 s_2 &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$(20) \quad \varrho x_1 = s_1 s_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varrho x_2 = s_2 s_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \quad \varrho x_3 = s_3 s_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Die beiden Punkte (18) und (20) liegen auf der Lemoineschen Geraden, d. h. auf der Kordalen des Büschels von Kreisen, welche die drei Apollonischen Kreise orthogonal schneiden[1]). Auf ihre sonstige Bedeutung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

---

[1]) Vgl. hier und im folgenden meine Darstellung der Dreieckgeometrie in den „Vorlesungen über Geometrie nach Clebsch", Bd. I, 2. Aufl., S. 312 ff., 1906. Die dort gemachten Literaturangaben seien ergänzt durch den Hinweis auf die Königsberger Inauguraldissertation von Berkhan: Zur projektivischen Behandlung der Dreieckslehre, Leipzig 1905.

§ 3. Die dem Mittelpunkte des Umkreises assoziierten Punkte.

Metrisch ausgezeichnet sind ferner diejenigen sechs einander assoziierten Punkte, welche mit den Ecken des Dreiecks Doppelverhältnisse bilden, die zu den im vorigen Paragraphen betrachteten Doppelverhältnissen konjugiert imaginär sind. Bekanntlich haben zwei Punkte konjugiert imaginäre Doppelverhältnisse, wenn sie auseinander durch eine Transformation mit reziproken Radien an dem Umkreise des Dreiecks hervorgehen.

Dem unendlich fernen Punkte entspricht so der Mittelpunkt des Umkreises; die homogenen Koordinaten des letztern sind bekanntlich c_1, c_2, c_3; und aus (14) ergibt sich in der Tat:

$$\frac{c_1 + c_3 e^{-\varphi_2 i}}{c_1 + c_2 e^{\varphi_3 i}} = \frac{c_1 + c_3 (c_2 - i s_2)}{c_1 + c_2 (c_3 + i s_3)} = \frac{s_2}{s_3} e^{-\varphi_1 i},$$

d. h. konjugiert imaginär zu dem ersten Werte (13). Der Punkt x, welcher dem reziproken Werte entspricht, ergibt sich aus

$$s_2 (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}) = s_3 e^{\varphi_1 i} (x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_3 (x_1 e^{\varphi_1 i} - x_2 e^{-\varphi_2 i})$$

oder:

$$x_1 [s_2 - s_3 c_1 - i s_3 s_1] + x_2 (s_3 c_2 - i s_3 s_2) + x_3 (s_2 c_2 - i s_2^2) = 0,$$

also:

$$x_1 s_1 c_3 + x_2 s_3 c_2 + x_3 s_2 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 + x_2 s_3 s_2 + x_3 s_2^2 = 0$$

und somit:

$$(21) \qquad \varrho x_1 = 0, \quad \varrho x_2 = s_2, \quad \varrho_3 = - s_3.$$

Der zum dritten Werte (13) konjugierte Wert führt ebenso zu den Gleichungen

$$x_1 s_3 c_1 + x_2 s_2 c_3 + x_3 s_1 c_1 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 + x_2 s_2 s_3 + x_3 s_1^2 = 0, \quad \text{also:}$$

$$(22) \qquad \varrho x_1 = s_1, \quad \varrho x_2 = 0, \quad \varrho x_3 = - s_3.$$

Das zum zweiten Werte (13) konjugierte Doppelverhältnis ergibt:

$$s_1 (x_1 e^{\varphi_2 i} - x_2 e^{-\varphi_1 i}) = s_3 (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}),$$

oder: $x_1(s_3 - s_1 c_2) + x_2 s_1 c_1 + x_3 s_3 c_2 = 0,$

$$x_1 s_1 s_2 + x_2 s_1^2 + x_3 s_2 s_3 = 0, \text{ also:}$$

(23) $$\varrho x_1 = s_1, \quad \varrho x_2 = -s_2, \quad \varrho x_3 = 0.$$

Nehmen wir endlich den konjugierten Wert zum reziproken Werte des zweiten Doppelverhältnisses (13), so wird:

$$s_3(x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_1(x_1 e^{\varphi_2 i} + x_3),$$

oder: $x_1(s_3 - s_1 c_2) + x_2 s_3 c_3 - x_3 s_1 = 0,$

$$x_1 s_1 s_2 - x_2 s_3^2 = 0,$$

und hieraus

(24) $$\varrho x_1 = s_1 s_3^2, \quad \varrho x_2 = s_2 s_1^2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_2^2$$

und ebenso ergibt der konjugierte Wert des reziproken Wertes zum dritten Doppelverhältnisse (13):

$$\frac{s_1}{s_2} e^{-\varphi_3 i} = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_2 i}}$$

und somit

(25) $$\varrho x_1 = s_1 s_2^2, \quad \varrho x_2 = s_2 s_3^2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_1^2.$$

Die Werte (21), (22) und (23) sind bekanntlich die Koordinaten der Mittelpunkte der drei Apollonischen Kreise, und in (24), (25) haben wir die Koordinaten der beiden Brocardschen Punkte gefunden[1]). Diese Punkte erscheinen also als simultane Kovarianten der Ecken des Dreiecks und des unendlich fernen Punktes.

Dem Mittelpunkt des Umkreises sind daher in obigem Sinne assoziiert: die beiden Brocardschen Punkte und die Mittelpunkte der drei Apollonischen Kreise.

Damit ist auch die Bedeutung der im vorigen Paragraphen gefundenen ausgezeichneten Punkte klar gestellt: Die fünf Punkte (15), (16), (17), (18) und (20), die dem unendlich fernen Punkte assoziert sind, findet man durch eine Transformation reziproker Radien in Bezug auf den

[1]) Vgl. „Vorlesungen", a. a. O., S. 318 und S. 322 f.

Umkreis aus den Zentren der drei Apollonischen Kreise und aus den beiden Brocardschen Punkten.

Beiläufig ergibt sich hier der Satz: Der Kreis, welcher durch diese Transformation der reziproken Radien aus der Lemoineschen Geraden entsteht, geht durch die beiden Brocardschen Punkte.

Da ferner die drei Punkte (21), (22), (23) auf der Lemoineschen Geraden liegen, so folgt weiter:

Die drei dem unendlich fernen Punkte assoziierten Punkte (15), (16), (17) liegen auf dem Kreise, welcher aus der Lemoineschen Geraden durch die erwähnte Transformation hervorgeht, sind also Schnittpunkte dieses Kreises mit den drei Kreisen, welche man mittels derselben Transformation aus den Seiten des Grunddreiecks erhält, und zugleich Schnittpunkte dieses Kreises mit den Linien (18).

Die einem beliebigen Punkte der Ebene assoziierten Punkte lassen sich nun leicht finden, indem man den Mittelpunkt des Umkreises durch eine die Grundform f ungeändert lassende lineare Transformation an eine beliebige Stelle der Ebene bringt.

Die hier dargelegten Beziehungen kann man auch dahin aussprechen, daß die sechs einander assoziierten Punkte sich untereinander vertauschen, wenn man durch lineare Transformation der Variabeln z die Ecken des Dreiecks ineinander über-

---

[1]) Das Doppelverhältnis von vier Punkten bestimmt die Gestalt des Fußpunktdreiecks eines dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck der drei anderen. Die nahe Beziehung zwischen dem Zentrum des Umkreises und den beiden Brocardschen Punkten macht sich deshalb auch bei Untersuchung der Fußpunktdreiecke bemerkbar; vgl. Schick, Isogonalzentrik und Invariantentheorie, diese Sitzungsberichte, Bd. 30, 1900, S. 259 f.; für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks bemerkt sie auch Godt: Über einige merkwürdige Punkte des Dreiecks, II, Programm des Katharineums zu Lübeck, 1903. Man kann allerdings jedes Dreieck in ein gleichseitiges transformieren (wie es auch Klein in seinem Programm von 1872 tut), dadurch legt man aber das Doppelverhältnis des unendlich fernen Punktes als ein äquianharmonisches fest und verdeckt die allgemeinen Beziehungen.

führt. Allen sechs Punkten kommen also im Sinne der Invariantentheorie wesentlich die gleichen Eigenschaften zu. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der einem beliebigen Punkte P assoziierten fünf Punkte in folgender Weise:

Die Ecken des Dreiecks seien mit E_1, E_2, E_3 bezeichnet. Man lege dann den Kreis $P - E_1 - E_2$ durch P, E_1 und E_2, ebenso den Kreis $P - E_2 - E_3$ und den Kreis $P - E_3 - E_1$; ferner konstruiere man einen Kreis K_1, der durch E_2 und E_3 geht und $P - E_3 - E_1$ in E_3 berührt, dann einen Kreis K_2 durch E_3 und E_1, der $P - E_1 - E_2$ in E_1 berührt, und einen Kreis K_3 durch E_1 und E_2, den $P - E_2 - E_3$ in E_2 berührt; diese Kreise K_1, K_2, K_3 schneiden sich dann in einem der fünf zu P assoziierten Punkte, und zwar in demjenigen, welcher mit E_1, E_2, E_3 das Doppelverhältnis $(1 - a)^{-1}$, oder in demjenigen, der mit E_1, E_2, E_3 das Doppelverhältnis $(a - 1)\,a^{-1}$ bildet, wenn a dem Doppelverhältnisse der Punkte P, E_1, E_2, E_3 konjugiert ist. Die anderen drei assoziierten Punkte ergeben sich dann leicht.

Legen wir z. B. P in einen Brocardschen Punkt, etwa in den Punkt (24) und ist σ der zu dem Doppelverhältnisse des unendlich fernen Punktes konjugierte Wert (d. h. gleich dem Doppelverhältnisse des Zentrums des Umkreises), so ist nach obigem $a = (1 - \sigma)^{-1}$, also $(1 - a)^{-1} = (\sigma - 1)\,\sigma^{-1}$; d. h. die konstruierten drei Kreise schneiden sich in dem andern Brocardschen Punkte. Wählt man dagegen die Konstruktion der Kreise K_1, K_2, K_3 von P aus im anderen Sinne, so wird $(a - 1)\,a^{-1} = (\sigma - 1)\,\sigma^{-1}$, also $a = \sigma$, d. h. und die Kreise arten aus in die Seiten des Dreiecks.

§ 4. Die lineare Polare eines Punktes.

Bezeichnen wir die Grundpunkte der kubischen Form f wieder mit z', z'', z''', so genügt der Pol ζ eines Punktes z der Gleichung:

$$(26)\quad \begin{aligned}(\zeta - z')(z - z'')(z - z''') + (z - z')(\zeta - z'')(z - z''') \\ + (z - z')(z - z'')(\zeta - z''') = 0.\end{aligned}$$

Kommen dem Punkte z die homogenen Koordinaten x_i, dem Punkte ζ die Koordinaten ξ_i zu, so wird diese Gleichung infolge (8):

$$
\begin{aligned}
&(\xi_3 A_2 - \xi_2 A_3)(x_1 A_3 - x_3 A_1)(x_2 A_1 - x_1 A_2) \\
(27)\quad &+ (x_3 A_2 - x_2 A_3)(\xi_1 A_3 - \xi_3 A_1)(x_2 A_1 - x_1 A_2) \\
&+ (x_3 A_2 - x_2 A_3)(x_1 A_3 - x_3 A_1)(\xi_2 A_1 - \xi_1 A_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Wir legen den Punkt z in den unendlich fernen Punkt, dann wird Gleichung (26):

$$(\zeta - z') + (\zeta - z'') + (\zeta - z''') = 0,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, daß der lineare Pol des unendlich fernen Punktes mit dem Schnitte der Mittellinien zusammenfällt. Es wird dies durch folgende Rechnung bestätigt: Zufolge (27) ist, wenn z', z'', z''' wieder bzw. in den Ecken 1, 0, 0; 0, 1, 0 und 0, 0, 1 liegen:

$$
\begin{aligned}
s_2 s_3 (\xi_3 A_2 - \xi_2 A_3) + s_3 s_1 (\xi_1 A_3 - \xi_3 A_1) \\
+ s_1 s_2 (\xi_2 A_1 - \xi_1 A_2) = 0
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
&- s_2 s_3 (\xi_3 e^{\varphi_1 i} + \xi_2) \\
&+ s_3 s_1 (\xi_1 + \xi_3 e^{-\varphi_2 i}) - s_1 s_2 (\xi_2 e^{-\varphi_2 i} - \xi_1 e^{\varphi_1 i}) = 0;
\end{aligned}
$$

diese Gleichung zerfällt in die beiden:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 s_1 (s_3 + s_2 c_1) - \xi_2 s_2 (s_3 + s_1 c_2) - \xi_3 s_3 (s_2 c_1 - s_1 c_2) = 0 \\
&\xi_1 s_1^2 s_3 + \xi_2 s_2^2 s_1 - 2 \xi_3 s_1 s_2 s_3 = 0
\end{aligned}
$$

und hieraus ergeben sich die bekannten Koordinaten des Schnittpunktes der Mittellinien:

$$(28)\qquad \varrho \xi_1 = s_2 s_3, \quad \varrho \xi_2 = s_3 s_1, \quad \varrho \xi_3 = s_1 s_2.$$

Indem man den unendlich fernen Punkt durch lineare Transformation an eine beliebige andere Stelle P bringt, ergibt sich folgende allgemeine Konstruktion der linearen Polare von P:

Man lege durch P und je zwei Ecken des Dreiecks drei Kreise K_1, K_2, K_3; suche auf jedem den vierten harmonischen Punkt von P in Bezug auf die beiden Ecken, wodurch man

drei Punkte R_1, R_2, R_3 findet. Durch P, R_i und die i^{te} Ecke lege man einen Kreis K'_i. Diese drei Kreise K'_1, K'_2, K'_3 schneiden sich in einem weiteren Punkte, und dieser stellt die lineare Polare von P dar.

Die Berechnung der linearen Polare anderer ausgezeichneter Punkte scheint nicht zu einfachen Resultaten zu führen. Für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises (d. i. den Punkt 1, 1, 1) findet man z. B.

$$\varrho \xi_1 = c_2 - c_3, \quad \varrho \xi_2 = c_3 - c_1, \quad \varrho \xi_3 = c_1 - c_2.$$

Der Punkt liegt auf der Chordale ($\sum c_i x_i = 0$) des Kreisbüschels, das durch den Feuerbachschen Kreis und den Umkreis bestimmt wird.

Für die lineare Polare des Lemoineschen Punktes findet man:

$$\varrho \xi_1 s_1 = s_1^4 - s_2^2 s_3^2, \quad \varrho \xi_2 s_2 = s_2^4 - s_3^2 s_1^2, \quad \varrho \xi_3 s_3 = s_3^4 - s_1^2 s_2^2.$$

Es ist dies der Gegenbrennpunkt des Punktes, welcher der Perspektivitäts-Axe[1]) des Brocardschen und des Grunddreiecks als Pol in Bezug auf den imaginären Kegelschnitt $\sum x_i^2 = 0$ entspricht.

§ 5. Die quadratische Polare eines Punktes.

Ist ζ der gegebene Pol, so werden die beiden Punkte der quadratischen Polare durch die in z quadratische Gleichung (26) gegeben, oder in homogenen Koordinaten durch die Gleichung (27). Letztere stellt in Variabeln x_i das Linienpaar dar, das die besagten beiden Punkte der ersten Polare mit einem der imaginären Kreispunkte verbindet.

Wir wählen als Pol ζ den Schnittpunkt der Mittellinien; dann fällt in (26) das in z quadratische Glied aus und es bleibt eine lineare Gleichung, welche denjenigen Punkt bestimmt, der mit dem unendlich fernen Punkte zusammen die quadratische Polare von ζ darstellt; es ergibt sich indessen so kein übersichtliches Resultat.

---

1) Vgl. „Vorlesungen“, a. a. O., S. 323.

Die homogene Gleichung (27) wird hier:

$$(x_2 e^{a_3 i} - x_3 e^{a_2 i})(x_3 e^{a_1 i} - x_1 e^{a_3 i})(s_2 e^{a_2 i} - s_1 e^{a_1 i}) s_3$$
$$+ (x_3 e^{a_1 i} - x_1 e^{a_3 i})(x_1 e^{a_2 i} - x_2 e^{a_1 i})(s_3 e^{a_3 i} - s_2 e^{a_2 i}) s_1$$
$$+ (x_1 e^{a_2 i} - x_2 e^{a_1 i})(x_2 e^{a_3 i} - x_3 e^{a_2 i})(s_1 e^{a_2 i} - s_3 e^{a_3 i}) s_2 = 0.$$

Die linke Seite muß in zwei lineare Faktoren zerfallen, deren einer bekannt ist, denn der eine muß, gleich Null gesetzt, die unendlich ferne Gerade darstellen. Die linke Seite der letzten Gleichung ist daher von der Form

$$(s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3).$$

Vergleicht man beiderseits die Koeffizienten von x_1^2, x_2^2, x_3^2, so ergibt sich

$$u_1 = -e^{(a_2+a_3)i}(s_3 e^{a_3 i} - s_2 e^{a_2 i})$$
$$u_2 = -e^{(a_3+a_2)i}(s_1 e^{a_1 i} - s_3 e^{a_3 i})$$
$$u_3 = -e^{(a_1+a_2)i}(s_2 e^{a_2 i} - s_1 e^{a_1 i}).$$

Nun ist:

$$s_3 e^{a_3 i} - s_2 e^{a_2 i} = \sin\varphi_3 \cos a_3 - \sin\varphi_2 \cos a_2$$
$$+ i(\sin\varphi_3 \sin a_3 - \sin\varphi_2 \sin a_2)$$

und hierin:

$$\sin\varphi_3 \cos a_3 - \sin\varphi_2 \cos a_2 = (\sin a_2 \cos a_1 - \cos a_2 \sin a_1)\cos a_3$$
$$- (\sin a_3 \cos a_1 - \cos a_3 \sin a_1)\cos a_2$$
$$= \cos a_1 \cdot \sin(a_2 - a_3) = -\cos a_1 \cdot s_1$$

$$\sin\varphi_3 \sin a_3 - \sin\varphi_2 \sin a_2 = -\sin a_1 \cdot s_1,$$

also:
$$s_3 e^{a_3 i} - s_2 e^{a_2 i} = -s_1 \cdot e^{a_1 i}.$$

Durch analoge Umformungen findet man:

$$\varrho u_1 = s_1, \quad \varrho u_2 = -s_2 e^{2\varphi_1 i}, \quad \varrho u_3 = -s_3 e^{-2\varphi_2 i}.$$

Der gesuchte Punkt x genügt also den beiden Gleichungen:

$$(29) \qquad \begin{aligned} x_1 s_1 - x_2 s_2 (c_3^2 - s_3^2) - x_3 s_3 (c_2^2 - s_2^2) &= 0, \\ -2 x_2 s_2 s_3 c_3 + 2 x_3 s_2 s_3 c_2 &= 0; \end{aligned}$$

es wird:

$$\varrho x_1 = c_2 s_2 (c_3^2 - s_3^2) + c_3 s_3 (c_2^2 - s_2^2)$$
$$= \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) = s_1 c_1$$
$$\varrho x_2 = s_1 c_2, \quad \varrho x_3 = s_1 c_3.$$

Die quadratische Polare des Schnittpunktes der Mittellinien besteht demnach aus dem unendlich fernen Punkte und dem Mittelpunkte des Umkreises. Hieraus folgt allgemein:

Die beiden Punkte der quadratischen Polare eines beliebigen Punktes liegen invers in Bezug auf den Umkreis.

Außerdem sind sie bekanntlich harmonisch zu den beiden isodynamischen Zentren (Schnittpunkten der drei Apollonischen Kreise), welche die Nullpunkte der Hesseschen Kovariante $\varDelta$ darstellen. Um ihre Konstruktion zu bewerkstelligen, gehen wir davon aus, daß der Schnittpunkt der Mittellinien auf der Eulerschen Geraden (die auch den Höhenschnittpunkt und das Zentrum des Umkreises enthält) liegt und daß diese Gerade der Ort der Mittelpunkte aller Kreise des Büschels

$$
\begin{aligned}
& s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2 + \lambda (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)(s_1 x_1 \\
(30) \qquad & \qquad + s_2 x_2 + s_3 x_3) = 0
\end{aligned}
$$

ist (mit der gemeinsamen Chordale $\sum c_i x_i = 0$). Diese Gerade schneidet also alle Kreise des Büschels und insbesondere den Umkreis ($\lambda = 0$) und den Polarkreis ($\lambda = 1$) des Dreiecks orthogonal. Macht man eine beliebige lineare Transformation von z, welche die binäre kubische Form (d. h. die Ecken des Dreiecks) ungeändert läßt, so bleiben die beiden erwähnten Kreise des Büschels ungeändert. Die Eulersche Gerade geht also in denjenigen Kreis K über, welcher diese beiden Kreise orthogonal schneidet und durch den beliebigen Punkt P geht, in welchen der Schnittpunkt der Mittellinien übergeführt werden mag. Auf letzterem Kreise liegen die beiden gesuchten Punkte der quadratischen Polare von M, und zwar invers zum Umkreise. Es sind also die beiden Punkte, welche gleichzeitig harmonisch liegen zu den Schnittpunkten des Kreises K mit dem Umkreise und zu den beiden isodynamischen Zentren (Punkten $\varDelta = 0$), und als solche sind sie in bekannter Weise zu konstruieren.



Isoplanatische Korrektion und Proportionalitäts-Bedingung.

(Zur Bedeutung der Abbeschen Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen endlicher Öffnung.)

Von **F. Staeble.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 17. Mai 1919.

Die von einem beliebigen Objektpunkt ausgehenden kugelförmigen Wellenflächen werden nach dem Durchgang durch ein beliebig zusammengesetztes, endlich geöffnetes optisches System in Wellenflächen deformiert, die im allgemeinen keine Kugelflächen mehr sind. Die Normalen zu dieser Wellenflächenschar erzeugen die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche; die Normalen sind die in den Bildraum austretenden Lichtstrahlen, die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche bilden die zum ursprünglichen Objektpunkt gehörende Brennfläche, die als sein optisches Bild zu betrachten ist.

Ist das optische System ein zu einer gemeinsamen optischen Achse zentriertes System von Rotationsflächen, so pflegt man die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche als die *tangentiale (meridionale)* und die *sagittale (äquatoreale)* Schale der Brennfläche zu bezeichnen.

Liegt ferner der Objektpunkt auf der optischen Achse, so degeneriert die sagittale Schale in ein Stück der optischen Achse, während die tangentiale Schale eine Rotationsfläche wird.

Im allgemeinen werden die beiden Schalen der bildseitigen Brennfläche ihre Form ändern, wenn man von einem axialen Objektpunkt zu einem unendlich benachbarten übergeht.

Unter *„isoplanatischer Korrektion“* oder *„Isoplanasie“* sei derjenige Korrektionszustand verstanden, bei welchem sich die *Form* der bildseitigen Brennfläche beim Übergang von einem axialen Objektpunkt zu einem unendlich benachbarten der nämlichen achsensenkrechten Objektebene nicht ändert, sondern wobei nur eine *Lagen*-Änderung eintritt; diese kann wegen der allseitigen Symmetrie nur in einer (unendlich kleinen) Drehung der Brennfläche um einen im Endlichen oder im Unendlichen gelegenen Punkt der optischen Achse *(„Dreh-Zentrum“)* bestehen. Bei der isoplanatischen Korrektion ist also eine *endliche Öffnung*, aber eine *unendlich kleine Hauptstrahlneigung* vorausgesetzt[1]).

[1]) Die Möglichkeit der oben definierten Isoplanasie ist von Herrn S. Finsterwalder schon im Jahre 1891 erkannt worden, wenigstens innerhalb des Bereiches der Näherung 3. Ordnung, wie sie durch die Seidelschen Formeln dargestellt wird. Sie tritt dann ein, wenn zwischen den 5 Ausdrücken, welche die Bildfehler innerhalb dieser Näherung darstellen, die Beziehung $S(1)\, S(3) - (S(2))^2 = 0$ bei $S(1) \neq 0$ besteht. Letztere Ungleichung sagt aus, daß der Kugelgestaltfehler in der Achse nicht gehoben ist. Es gilt dann der Satz, daß die Brennflächen, die zu leuchtenden Punkten einer zur optischen Achse senkrechten Objektebene gehören, kongruente Drehflächen mit einer Neilschen Parabel als Meridian sind, deren Spitzen auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt auf der optischen Achse liegen und deren Drehachsen nach einem bestimmten Punkt dieser Achse konvergieren, der der günstigste Blendenort (Austrittspupille) ist. Unter Voraussetzung einer kreisförmigen Blende an dieser Stelle sind die Brennflächen der verschiedenen leuchtenden Punkte der Objektebene auch in Bezug auf die Begrenzung kongruent. Kommen noch die Bedingungen $S(2) = 0$ (Sinusbedingung) und $S(4) = 0$ hinzu, so liegen die Spitzen der Brennflächen in einer Ebene. Mit $S(1) = 0$ arten die kongruenten Brennflächen in Punkte aus; es tritt dann eine scharfe, aber noch verzeichnete Abbildung der Objektebene auf. Vergleiche die Abhandlung von S. Finsterwalder „Die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder“. Abhandlungen der K. B. Akad. der Wiss., II. Kl., 17. Bd., 3. Abt., § 3. Der Unterschied in der Voraussetzung der soeben genannten und der vorliegenden Abhandlung besteht im Wesentlichen darin, daß in der ersten Öffnung und Gesichtsfeld von gleicher Größenordnung innerhalb der vernachlässigten Fehler 5. Ordnung vorausgesetzt werden, während in der andern die Öffnung endlich, das Gesichtsfeld unendlich klein ge-

Abgesehen von einigen wenigen Sonderfällen, die wegen der Unmöglichkeit, wichtige andere Bildfehler zu beheben, fast durchweg praktisch eine untergeordnete Bedeutung haben (z. B. Reflexion eines fernen Achsenpunktes an einem Rotationsparaboloid, Stellung des Objekts im Mittelpunkt oder aplanatischen Punkt einer brechenden Kugel u. dgl.) wird die sphärische Korrektion eines Achsenpunkts niemals eine mathematisch vollkommene sein, d. h. es wird fast allgemein eine Brennfläche entstehen. Eine Untersuchung, unter welchen Umständen beim Herausgehen aus der optischen Achse keine Formänderung der Brennfläche eintritt (die nur eine Bildverschlechterung gegenüber der Bildmitte mit sich bringen kann), wird daher praktisch von Wichtigkeit sein.

Das Objekt wird gewöhnlich als aberrationsfrei angenommen; da die Aberrationsfreiheit nur als ein spezieller Fall der isoplanatischen Korrektion, mit der Eintrittspupille als Dreh-Zentrum, zu betrachten ist, sei allgemein auch für das Objekt nicht Aberrationsfreiheit, sondern nur isoplanatische Korrektion vorausgesetzt, weil dies eine Vereinheitlichung der mathematischen Behandlung erlaubt.

Die vorliegende Arbeit untersucht die Bedingung dafür, daß auch die Korrektion des Bildraums isoplanatisch wird.

Zur optischen Abbildung (d. h. zur Abbildung auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes) des Objektraums in den Bildraum dient hiebei der für ein zentriertes System von Rotationsflächen giltige **Satz von Lippich**[1]):

Gegeben sei ein die optische Achse schneidender Strahl des Objektraums und ein zu diesem windschiefer, unendlich benachbarter Strahl. Projiziert man den letzteren auf den Tangential- und Sagittal-

dacht wird. In Bezug auf das Gesichtsfeld kommt nur die Gaußsche Näherung mit Vernachlässigung der Größen 3. Ordnung in Betracht.

[1]) F. Lippich, Über Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen, Wiener Denkschr. 1878, **38**, 163—192.

schnitt des ersteren und bestimmt man die optischen Bilder dieser Projektionen im Tangential- bzw. Sagittalschnitt des Bildraums, so sind diese Bilder die Projektionen des optischen Bildes des windschiefen Strahls.

Die optischen Bilder der Projektionen des windschiefen Strahls werden dabei durch Anwendung des Helmholtzschen Satzes auf den Tangential- und Sagittalschnitt bestimmt.

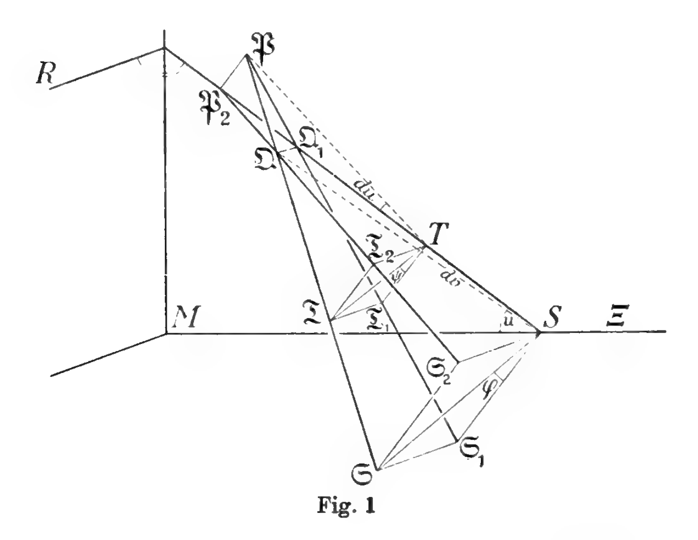


Fig. 1

In Fig. 1 sind die hiedurch eintretenden Verhältnisse dargestellt. Der die optische Achse $M\Xi$ unter dem endlichen Öffnungswinkel u schneidende Strahl TS ist zunächst mit seinem „Tangentialschnitt“ MTS in die Zeichenebene gelegt, der „Sagittalschnitt“ RTS ist hiezu senkrecht zu denken. T sei der *„tangentiale Bildpunkt“* auf dem Strahl TS, d. h. der Punkt, in welchem die Gerade TS die Meridiankurve der tangentialen Schale der Brennfläche berührt. S sei der *„sagittale Bildpunkt“* auf dem Strahl TS, d. h. der Punkt, in welchem die Gerade TS die degenerierte sagittale Schale der Brennfläche (optische Achse) schneidet.

Der unendlich benachbarte windschiefe Strahl $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ sei durch die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gegeben, in welchen er den Tangential- und Sagittalschnitt durchsetzt. Projiziert man diese Punkte nach $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_1$ auf den ursprünglichen Strahl TS, so erhält man die tangentiale Projektion $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1$ und die sagittale Projektion $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}$ des windschiefen Strahls.

In den Punkten T und S sind auf dem ursprünglichen Strahl senkrechte Ebenen errichtet und mit dem windschiefen Strahl und seinen Projektionen zum Schnitt gebracht. Es liegen also

die Punkte $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1\,TS$ auf dem ursprünglichen Strahl
" " $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ " " windschiefen "
" " $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{T}_1\mathfrak{S}_1$ auf der Tangentialprojektion des windschiefen Strahls
" " $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{T}_2\mathfrak{S}_2$ auf der Sagittalprojektion des windschiefen Strahls.

Ferner sei bezeichnet

$$T\mathfrak{T} = \delta\tau, \quad S\mathfrak{S} = \delta\sigma,$$
$$\sphericalangle\,\mathfrak{P}_2 T\mathfrak{P} = du, \quad \sphericalangle\,\mathfrak{Q}_1 S\mathfrak{Q} = dv,$$
$$\sphericalangle\,\mathfrak{T}T\mathfrak{T}_1 = \psi, \quad \sphericalangle\,\mathfrak{S}S\mathfrak{S}_1 = \varphi.$$

Dabei sind ψ und φ diejenigen endlichen Winkel, welche die windschiefen Lote $T\mathfrak{T}$ und $S\mathfrak{S}$ mit den im Tangentialschnitt (Meridianebene) der Brennfläche gelegenen Loten $T\mathfrak{T}_1$ und $S\mathfrak{S}_1$ bilden.

Die Verhältnisse im Bildraum (nach einer beliebigen Zahl von Brechungen an zentrierten Rotationsflächen) seien in gleicher Weise, nur mit gestrichenen Buchstaben dargestellt. Die Brechungsindizes des Objekt- und Bildraums seien n bzw. n'.

Dann ist nach dem Helmholtzschen Satz für den Tangentialschnitt

$$n \cdot \operatorname{arc}(\mathfrak{P}_2 T\mathfrak{P}) \cdot T\mathfrak{T}_1 = n' \cdot \operatorname{arc}(\mathfrak{P}_2' T'\mathfrak{P}') \cdot T'\mathfrak{T}_1'$$

oder $$n \cdot du \cdot (\delta\tau \cdot \cos\psi) = n' \cdot du' \cdot (\delta\tau' \cdot \cos\psi') \qquad (1)$$

Hiebei sei bemerkt, daß der gesamte Tangentialschnitt in einer ungebrochen durch das ganze System verlaufenden Ebene liegt.

Für den Sagittalschnitt hat man nach dem gleichen Satz

$$n \cdot \operatorname{arc}(\mathfrak{Q}_1 S \mathfrak{Q}) \cdot S \mathfrak{S}_2 = n' \cdot \operatorname{arc}(\mathfrak{Q}'_1 S' \mathfrak{Q}') \cdot S' \mathfrak{S}'_2$$

oder

$$n \cdot dv \cdot (\delta\sigma \cdot \sin\varphi) = n' \cdot dv' \cdot (\delta\sigma' \cdot \sin\varphi').$$

Da man die Änderungen dv bzw. dv' des sagittalen Öffnungswinkels als eine kleine Drehung um die optische Achse um einen für das ganze System gleichen Winkel $d\gamma$ auffassen kann, so muß sein

$$\mathfrak{Q}_1 S \cdot dv = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1 S \cdot \sin u \cdot d\gamma$$
$$\mathfrak{Q}'_1 S' \cdot dv' = \mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}'_1 = \mathfrak{Q}'_1 S'_1 \cdot \sin u' \cdot d\gamma$$

und hieraus

$$dv : dv' = \sin u : \sin u'.$$

Dann ergibt sich als Helmholtzsche Gleichung für den Sagittalschnitt

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta\sigma \cdot \sin\varphi) = n' \cdot \sin u' \cdot (\delta\sigma' \cdot \sin\varphi') \qquad (2)$$

Sind die Projektionen des Bildraums nach diesen Gleichungen (1) und (2) bestimmt, so ist nach dem Lippichschen Satz der windschiefe Strahl $\mathfrak{T}'\mathfrak{S}'$ des Bildraums das optische Bild des windschiefen Strahls $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ des Objektraums.

Es soll nun dem Tangentialschnitt MTS, der in Fig. 1 einer bequemeren Anschauung zuliebe in die Zeichenebene gedreht war, eine allgemeinere Lage gegeben werden. In Fig. 2 ist demgemäß als Zeichenebene die durch das ganze System ungebrochen verlaufende Schnittebene gewählt, in welcher die Drehung der Brennfläche des axialen Punkts zum unendlich benachbarten der nämlichen achsensenkrechten Ebene erfolgt; d. h. dieser neue Punkt ist hiebei — ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit — in die Zeichenebene gelegt. Als Koordinatenanfangspunkt ist im Objekt- und Bildraum das Dreh-Zentrum gewählt. Die Drehungswinkel in beiden Räumen sind mit $d\vartheta$ bzw. $d\vartheta'$ bezeichnet.

Der den Strahl TS enthaltende Tangentialschnitt MTS soll mit der Zeichenebene den endlichen Winkel α einschließen; der Sagittalschnitt RTS ist wieder senkrecht hierauf zu denken.

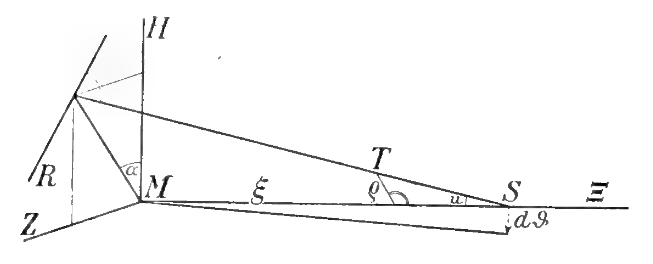


Fig. 2

Die Lote $T\mathfrak{T}_1$ und $S\mathfrak{S}_1$ liegen wieder im Tangentialschnitt MTS; die windschiefen Lote $T\mathfrak{T}$ und $S\mathfrak{S}$ liegen wieder in Normalebenen zu TS und bilden mit den Loten $T\mathfrak{T}_1$ und $S\mathfrak{S}_1$ die endlichen Winkel ψ und φ. Es sollen nun die Neigungswinkel $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$ bestimmt werden, welche das windschiefe Lot $T\mathfrak{T}$ (und später auch das Lot $S\mathfrak{S}$) gegen die Koordinatenachsen bildet.

Mit $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ seien zunächst die Neigungen der parallelen Strecken $T\mathfrak{T}_1$ und $S\mathfrak{S}_1$ gegen die Achsen bezeichnet, und in der Hilfsfigur 3a durch die Neigungen der Geraden AB dargestellt, wobei $AB \| T\mathfrak{T}_1 (\| S\mathfrak{S}_1)$ gezogen und $AB = 1$ gesetzt ist. Dann stellt ΔABB_{23} die Ebene des Tangentialschnitts MTS der Fig. 2 dar, es ist also

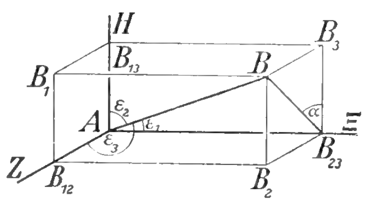


Fig. 3a

$$\sphericalangle BAB_{23} = \frac{\pi}{2} - u$$

und

$$\sphericalangle BB_{23}B_3 = \alpha$$

zu setzen. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varepsilon_1 &= AB_{23} = \sin u \\
\cos\varepsilon_2 &= AB_{13} = BB_{23}\cdot\cos\alpha = \sin\varepsilon_1\cos\alpha = \cos u\cos\alpha \\
\cos\varepsilon_3 &= AB_{12} = BB_{23}\cdot\sin\alpha = \sin\varepsilon_1\sin\alpha = \cos u\ \sin\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In ähnlicher Weise soll ein vom Punkt A ausgehender Parallelstrahl zum windschiefen Lot $T\mathfrak{T}$ dargestellt werden,

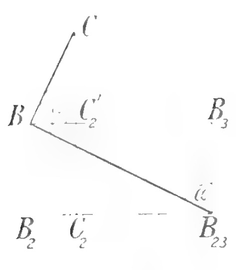


Fig. 3 b

der in einer zum Tangentialschnitt ABB_{23} längs AB senkrechten Ebene liegt und mit dem Parallelstrahl AB zu $T\mathfrak{T}_1$ den Winkel ψ einschließt. Dieser Strahl treffe die Ebene BB_3B_{23} im Punkte C; die in dieser Ebene entstehenden Verhältnisse sind in der Hilfsfigur 3 b dargestellt.

Wegen $BC \perp BB_{23}$ wird

$$\sphericalangle CBB_3 = a.$$

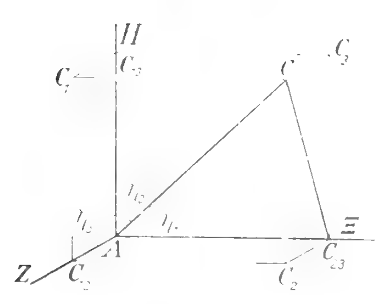


Fig. 3 c

Da $AB = 1$ gesetzt war, wird $BC = \operatorname{tg}\psi$

$$CC_2' = \sin a \operatorname{tg}\psi$$

$$B_2C_2 = \cos a \operatorname{tg}\psi.$$

Fig. 3c gibt die für den Punkt C entstehenden Verhältnisse an, wobei die Neigungen von AC gegen die Achsen die gesuchten Werte von $\eta_1\,\eta_2\,\eta_3$ sind.

Hiebei wird

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{1}{\cos\psi}$$

und

$$AC_{23} = AB_{23} = \cos\varepsilon_1$$

$$AC_{13} = AB_{13} + CC_2' = \cos\varepsilon_2 + \sin a \operatorname{tg}\psi$$

$$AC_{12} = AB_{12} - B_2C_2 = \cos\varepsilon_3 - \cos a \operatorname{tg}\psi,$$

also

$$\cos\eta_1 = \frac{AC_{23}}{AC} = \cos\varepsilon_1 \cos\psi$$

$$\cos\eta_2 = \frac{AC_{13}}{AC} = \cos\varepsilon_2 \cos\psi + \sin a \sin\psi$$

$$\cos\eta_3 = \frac{AC_{12}}{AC} = \cos\varepsilon_3 \cos\psi - \cos a \sin\psi$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} \cos\eta_1 &= \sin u \cos\psi \\ \cos\eta_2 &= \cos u \cos a \cos\psi + \sin a \sin\psi \\ \cos\eta_3 &= \cos u \sin a \cos\psi - \cos a \sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die tangentiale Schale der Brennfläche sei als Rotationsfläche durch die Gleichungen gegeben (vgl. hiezu Fig. 2)

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \xi(w)\\ \eta &= \varrho(w)\cdot\cos\alpha\\ \zeta &= \varrho(w)\cdot\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wobei die Abszisse ξ und der Radius ϱ beliebige Funktionen eines Parameters w sind.

Bezeichnet man abkürzend

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dw} &= \xi^*\\ \frac{d\varrho}{dw} &= \varrho^*\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so wird für die Tangente an die Meridiankurve

$$\operatorname{tg}(-u) = \frac{\varrho^*}{\xi^*},$$

also
$$\left.\begin{aligned}\sin u &= \frac{-\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}}\\ \cos u &= \frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$
und

Mithin erhält man schließlich

$$\left.\begin{aligned}\cos\eta_1 &= -\varrho^*\cdot\frac{\cos\psi}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}}\\ \cos\eta_2 &= (\xi^*\cos\alpha + \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\sin\alpha\operatorname{tg}\psi)\cdot\frac{\cos\psi}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}}\\ \cos\eta_3 &= (\xi^*\sin\alpha - \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cos\alpha\operatorname{tg}\psi)\cdot\frac{\cos\psi}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dieses sind also die Achsenneigungen des windschiefen Lotes $T\mathfrak{T}$, welches in einer Normalebene zum Strahl TS verläuft und mit dem Tangentialschnitt MTS (und daher auch mit der Meridian-Normalen $T\mathfrak{T}_1$) einen Winkel ψ einschließt. Die Achsenneigungen des windschiefen Lotes $S\mathfrak{S}$ erhält man durch Vertauschung von ψ mit φ.

Für die Anwendbarkeit des Helmholtzschen Satzes ist notwendige und hinreichende Voraussetzung, daß die Strecke $\delta\tau = T\mathfrak{T}$ als kleines Objekt aufgefaßt werden kann, das heißt, daß nicht nur der Punkt T, sondern auch der Punkt $\mathfrak{T}$ Objektpunkte sind. Es muß daher bei isoplanatischer Korrektion der Punkt $\mathfrak{T}$ auf der gedrehten objektseitigen Brennfläche liegen, und der windschiefe Strahl $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ eine Erzeugende dieser gedrehten Brennfläche sein. Die nämlichen Überlegungen (mit gestrichenen Buchstaben) gelten für den Bildraum.

Für jede Neigung ψ ist ein Punkt $\mathfrak{T}$ als unendlich naher Durchstoßpunkt des vom Punkte T unter den Neigungen $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$ ausgehenden Strahls mit der gedrehten Brennfläche bestimmt, oder: zu jeder Neigung ψ gehört eine Erzeugende der gedrehten Brennfläche, die als der unendlich benachbarte windschiefe Strahl $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ aufzufassen ist.

Wie groß diese Neigung ψ gewählt werden muß, bleibe vorerst dahingestellt; denkt man sich dem Winkel ψ alle möglichen Werte erteilt, so ist die richtige Neigung ψ, und daher auch der richtige windschiefe Strahl $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ mit Sicherheit darunter. Es ist also zunächst $\delta\tau = T\mathfrak{T}$ als Funktion von ψ darzustellen.

Der Punkt T der ursprünglichen Brennfläche sei gemäß (5) durch gewisse Parameterwerte w und a gegeben; der unendlich benachbarte Punkt $\mathfrak{T}$ auf der gedrehten Brennfläche muß dann die Parameterwerte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w} &= w + dw \\ \mathfrak{a} &= a + da \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

haben. Der Koordinatenanfangspunkt ist gemäß Fig. 2 in das Dreh-Zentrum gelegt; der Drehungswinkel ist mit $d\vartheta$ bezeichnet.

Bei Drehung um die Z-Achse hat die gedrehte Brennfläche die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi + \eta\, d\vartheta = \xi + \varrho \cos a\, \delta\vartheta \\ \mathfrak{y} &= \eta - \xi\, d\vartheta = \varrho \cos a - \xi\, d\vartheta \\ \mathfrak{z} &= \zeta = \varrho \sin a, \end{aligned}$$

also der Punkt $\mathfrak{T}$ mit den Parameterwerten $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{a}$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \xi(\mathfrak{w}) + \varrho(\mathfrak{w}) \cos \mathfrak{a}\, d\vartheta \\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \varrho(\mathfrak{w}) \cos \mathfrak{a} - \xi(\mathfrak{w})\, d\vartheta \\ \mathfrak{z}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \varrho(\mathfrak{w}) \sin \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Setzt man für $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{a}$ die Werte aus (9) ein, und entwickelt nach dem Taylorschen Satz, so hat man, wenn man wieder die Bezeichnungen ξ^* und ϱ^* aus Gleichung (6) einführt, und statt $\xi(w)$ und $\varrho(w)$ abkürzend ξ und ϱ schreibt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= (\xi + \xi^* dw) + (\varrho + \varrho^* dw)(\cos a - \sin a\, da)\, d\vartheta \\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= (\varrho + \varrho^* dw)(\cos a - \sin a\, da) - (\xi + \xi^* dw)\, d\vartheta \\ \mathfrak{z}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= (\varrho + \varrho^* dw)(\sin a + \cos a\, da) \end{aligned}$$

und nach Vernachlässigung höherer Glieder

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \xi + \xi^* dw + \varrho \cos a\, d\vartheta \\ \mathfrak{y}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \varrho \cos a + \varrho^* \cos a\, dw - \varrho \sin a\, da - \xi\, \delta\vartheta \\ \mathfrak{z}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} &= \varrho \sin a + \varrho^* \sin a\, dw + \varrho \cos a\, da; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi &= \mathfrak{x}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} - \xi_{w,a} = \xi^* dw + \varrho \cos a\, d\vartheta \\ \delta\eta &= \mathfrak{y}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} - \eta_{w,a} = \varrho^* \cos a\, dw - \varrho \sin a\, da - \xi\, d\vartheta \\ \delta\zeta &= \mathfrak{z}_{\mathfrak{w},\mathfrak{a}} - \zeta_{w,a} = \varrho^* \sin a\, dw + \varrho \cos a\, da \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und

$$\left.\begin{aligned} (T\mathfrak{T})^2 = \delta\tau^2 &= \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 \\ &= (\xi^{*2} + \varrho^{*2})\, dw^2 - 2(\xi\varrho^* - \varrho\xi^*) \cos a\, dw\, \delta\vartheta \\ &+ (\varrho^2 \cos^2 a + \xi^2)\, d\vartheta^2 + 2\varrho\xi \sin a\, da\, d\vartheta + \varrho^2 da^2 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wenn man noch in Analogie zu (6) die Bezeichnungen einführt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dw} &= \vartheta^* \\ \frac{da}{dw} &= a^* \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

so erhält man schließlich

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi &= (\xi^* + \vartheta^* \cdot \varrho\cos a)\cdot dw\\ \delta\eta &= (\varrho^*\cdot\cos a - a^*\cdot\varrho\sin a - \vartheta^*\cdot\xi)\cdot dw\\ \delta\zeta &= (\varrho^*\cdot\sin a + a^*\cdot\varrho\cos a)\cdot dw\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Damit diese Größen die Koordinatenänderungen zwischen T und $\mathfrak{T}$ sind, müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{\delta\xi}{\cos\eta_1} = \frac{\delta\eta}{\cos\eta_2} = \frac{\delta\zeta}{\cos\eta_3} \qquad (14)$$

Hieraus sind die Werte dw und da als Funktionen von ψ und $d\vartheta$ zu bestimmen.

Durch Substitution von (8) und (13) in (14) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi^* + \vartheta^*\cdot\varrho\cos a}{-\varrho^*} &= \frac{\varrho^*\cdot\cos a - a^*\cdot\varrho\sin a - \vartheta^*\cdot\xi}{\xi^*\cdot\cos a + \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\sin a\,\mathrm{tg}\,\psi}\\ &= \frac{\varrho^*\cdot\sin a + a^*\cdot\varrho\cos a}{\xi^*\cdot\sin a - \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\cos a\,\mathrm{tg}\,\psi}\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst als erste Bedingungsgleichung für die Werte ϑ^* und a^* unter Berücksichtigung des 1. und 3. Ausdrucks

$$\xi^{*2}\cdot\sin a - \xi^*\cdot\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\cos a\,\mathrm{tg}\,\psi + \xi^*\vartheta^*\cdot\varrho\sin a\cos a$$
$$-\vartheta^*\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\varrho\cos^2 a\,\mathrm{tg}\,\psi + \varrho^{*2}\cdot\sin a + a^*\varrho^*\cdot\varrho\cos a = 0$$

oder

$$\vartheta^*\cdot(\xi^*\cdot\sin a - \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\cos a\,\mathrm{tg}\,\psi)\cdot\varrho\cos a + a^*\varrho^*\cdot\varrho\cos a$$
$$= \xi^*\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\cos a\,\mathrm{tg}\,\psi - (\xi^{*2}+\varrho^{*2})\sin a$$

oder schließlich

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta^*\cdot(\xi^*\cdot\sin a - \sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\cos a\,\mathrm{tg}\,\psi) + a^*\varrho^*\\ &= \frac{\xi^*\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}\cdot\mathrm{tg}\,\psi}{\varrho} - \frac{(\xi^{*2}+\varrho^{*2})\cdot\mathrm{tg}\,a}{\varrho}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Als zweite Bedingungsgleichung für die Werte ϑ^* und a^* erhält man unter Berücksichtigung des 2. und 3. Ausdrucks in den Gleichungen (15)

$$\xi^* \varrho^* \cdot \sin a \cos a - \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos^2 a \operatorname{tg} \psi$$
$$- a^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \varrho \sin a$$
$$- \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \xi$$
$$- \xi^* \varrho^* \cdot \sin a \cos a - \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \sin^2 a \operatorname{tg} \psi$$
$$- a^* (\xi^* \cdot \cos a + \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \sin a \operatorname{tg} \psi) \cdot \varrho \cos a = 0$$

oder
$$- \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi - a^* \xi^* \cdot \varrho$$
$$- \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \xi = 0$$

oder schließlich

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) + a^* \cdot \frac{\xi^* \varrho}{\xi} \\ = - \frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Schreibt man abkürzend

$$\Theta^* = \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \quad (18)$$

so heißen die beiden Bedingungsgleichungen (16) und (17)

$$\Theta^* + a^* \cdot \varrho^* = \frac{\xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \operatorname{tg} a}{\varrho} \quad (19)$$

und

$$\Theta^* + a^* \cdot \frac{\xi^* \varrho}{\xi} = - \frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} \quad (20)$$

Berechnet man hieraus Θ^* und a^*, so erhält man

$$\Theta^* \cdot \left(\frac{\xi^* \varrho}{\xi} - \varrho^* \right) = \frac{\xi^{*2} \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \xi^* \cdot \operatorname{tg} a}{\xi}$$
$$+ \frac{\varrho^{*2} \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} = - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) (\xi^* \operatorname{tg} a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \operatorname{tg} \psi)}{\xi}$$

oder

$$\vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cos a \operatorname{tg} \psi) (\xi^* \varrho - \varrho^* \xi)$$
$$= - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi)}{\cos a}$$

Hieraus ergibt sich nach Weglassung des konstanten Faktors in der Klammer

$$\frac{d\vartheta}{dw} = \vartheta^* = -\frac{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \cos a}$$

und schließlich als Wert für dw

$$dw = \frac{(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*) \cos a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot d\vartheta. \qquad (21)$$

Ebenso erhält man aus (19) und (20) für a^*

$$a^* \cdot \left(\frac{\xi^* \varrho}{\xi} - \varrho^*\right) = -\frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi}$$

$$-\frac{\xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} + \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \operatorname{tg} a}{\varrho}$$

oder

$$a^* \cdot (\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) = -\frac{\varrho \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho}$$

$$-\frac{\xi \xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} + \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \xi \operatorname{tg} a}{\varrho};$$

hieraus

$$\frac{da}{dw} = a^* = -\frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \left(\frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a\right)}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \varrho}.$$

Nun war

$$\frac{d\vartheta}{dw} = -\frac{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \cos a},$$

also erhält man als Wert für da

$$da = \left(\frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a\right) \cdot \frac{\cos a}{\varrho} \cdot d\vartheta \qquad (22)$$

Durch (21) und (22) sind die Parameterwerte

$$\mathfrak{w} = w + dw$$
$$\mathfrak{a} = a + da$$

für Gleichung (9) gefunden; die Werte für dw und da sind somit in Gleichung (11) einzusetzen.

Man erhält

$$\left(\frac{\delta \tau}{d\vartheta}\right)^2 = (\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \frac{(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{(\xi^{*2} + \varrho^{*2})^2}$$

$$- 2(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*)^2 \cdot \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + (\varrho^2 \cos^2 a + \xi^2)$$

$$+ 2 \varrho \xi \sin a \cdot \left(\frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \operatorname{tg} a\right) \cdot \frac{\cos a}{\varrho}$$

$$+ \left(\frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a\right)^2 \cdot \cos^2 a$$

$$= - \frac{(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + \varrho^2 \cos^2 a + \xi^2$$

$$+ \frac{2 \xi (\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi \sin a \cos a$$

$$- 2 \xi^2 \sin^2 a + \frac{(\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi \cos^2 a$$

$$- \frac{2 \xi (\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi \sin a \cos a + \xi^2 \sin^2 a$$

$$= - \frac{(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + \varrho^2 \cos^2 a + \xi^2 \cos^2 a$$

$$+ \frac{(\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi \cos^2 a$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot [- \xi^2 \varrho^{*2} + 2 \xi \xi^* \varrho \varrho^* - \varrho^2 \xi^{*2} + \varrho^2 \xi^{*2}$$

$$+ \varrho^2 \varrho^{*2} + \xi^2 \xi^{*2} + \xi^2 \varrho^{*2} + (\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi]$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot (\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{(\xi \xi^* + \varrho \varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}$$

und hieraus

$$\delta \tau \cdot \cos \psi = \frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \cos a \cdot d\vartheta \qquad (23)$$

Der Wert $\delta \tau$ ist hiebei das in Gleichung (1) auftretende windschiefe Lot $T\mathfrak{T}$ des Objektraums, dessen Größe bei iso-

planatischer Korrektion hiedurch in ihrer Abhängigkeit von der Neigung ψ bestimmt ist. Da seine tangentiale Projektion $\delta\tau \cdot \cos\psi$ von der Neigung ψ unabhängig wird, so erhält man also für alle Neigungen ψ den nämlichen Wert der Tangentialprojektion, d. h.: für die Anwendung der Gleichung (1) bleibt die Wahl des Winkels ψ ohne jeden Einfluß.

Es sollen nun die Werte ξ, ξ^*, ϱ, ϱ^* der Meridiankurve der tangentialen Brennfläche durch die Werte der sphärischen Aberration ausgedrückt werden. In Fig. 4 ist aus Gründen der Anschaulichkeit die Meridiankurve der Fig. 2 in die Zeichenebene gelegt. Im tangentialen Bildpunkt T (Punkt der Meridiankurve bzw. der Brennfläche) schneiden sich die konsekutiven Strahlen mit den Neigungen u und $u + du$. Sein Fußpunkt sei T_0; dann ist $MT_0 = \xi$ und $TT_0 = \varrho$.

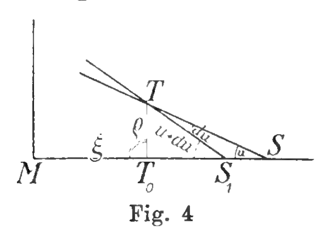


Fig. 4

Die Achsenschnittpunkte der beiden konsekutiven Erzeugenden seien S und S_1. Bezeichnet man den Abstand des Punktes S vom Drehpunkt M mit $\mathfrak{A}$, so ist $MS = \mathfrak{A}$ und $MS_1 = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$. (In der Fig. 4 ist $S_1 S = - d\mathfrak{A}$ zu setzen.)

Dann folgt aus dem Dreieck TSS_1 nach dem trigonometrischen Sinus-Satz

$$TS = -\frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin u$$

und die Gleichung der Meridiankurve der tangentialen Brennflächen-Schale wird

$$\xi = \mathfrak{A} - TS \cdot \cos u$$
$$\varrho = TS \cdot \sin u$$

oder unter Berücksichtigung des Wertes für TS

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin u \cos u \\ \varrho &= -\frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin^2 u \end{aligned}\right| \qquad (24)$$

Nach Gleichung (7) hatte man für die Meridiankurve

$$\frac{\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}} = -\sin u$$
$$\frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2}+\varrho^{*2}}} = \cos u.$$

Setzt man diese Werte und die Werte für ξ und ϱ aus Gleichung (24) in Gleichung (23) ein, so erhält man

$$\delta\tau\cdot\cos\psi = \left[\mathfrak{A}\cos u + \frac{d\mathfrak{A}}{du}\sin u\cos^2 u + \frac{d\mathfrak{A}}{du}\sin^3 u\right]\cdot\cos a\cdot d\vartheta$$
$$= \left[\mathfrak{A}\cos u + \frac{d\mathfrak{A}}{du}\sin u\right]\cdot\cos a\cdot d\vartheta = \frac{d[\mathfrak{A}\sin u]}{du}\cdot\cos a\cdot d\vartheta.$$

Dann wird die linke Seite der Gleichung (1)

$$n\cdot du\cdot(\delta\tau\cdot\cos\psi) = n\cos a\cdot d[\mathfrak{A}\sin u]\cdot d\vartheta \qquad (25)$$

Dies ist die Invariante der Helmholtzschen Gleichung für den Fall der isoplanatischen Korrektion des *Tangentialschnittes.*

Für den *Sagittalschnitt* erhält man als Gleichung der Meridiankurve $\varrho = 0$, $\varrho^* = 0$, daher wird Gleichung (10)

$$\delta\xi = \xi^* dw$$
$$\delta\eta = -\xi\, d\vartheta$$
$$\delta\zeta = 0,$$

also nach Gleichung (14)

$$\cos\eta_3 = 0,$$

woraus sich nach Gleichung (4), da bei der sagittalen Schale φ statt ψ zu setzen ist,

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos u \operatorname{tg} a \qquad (26)$$

ergibt. Dann erhält man aus Gleichung (4)

$$\cos\eta_1 = \frac{\sin u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\sin u}{\sqrt{1+\cos^2 u\operatorname{tg}^2 a}}$$

$$\cos\eta_2 = \frac{\cos u\cos a + \cos u\sin a\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\cos^2 u\operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\cos u}{\cos a\cdot\sqrt{1+\cos^2 u\operatorname{tg}^2 a}}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (14) ergibt sich

$$\frac{\xi^* \cdot dw}{\sin u} \cdot \sqrt{1+\cos^2 u \operatorname{tg}^2 a} = \frac{-\xi \cdot d\vartheta}{\cos u} \cdot \cos a \cdot \sqrt{1+\cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}$$

und hieraus

$$dw = -\frac{\xi}{\xi^*} \cdot \operatorname{tg} u \cos a \cdot d\vartheta.$$

Dann wird

$$\begin{aligned}(S\mathfrak{S})^2 = \delta\sigma^2 &= \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 \\ &= \xi^2 \operatorname{tg}^2 u \cos^2 a \cdot d\vartheta^2 + \xi^2 \cdot d\vartheta^2 \\ &= \xi^2 (1 + \operatorname{tg}^2 u \cos^2 a) \cdot d\vartheta^2.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß wegen Gleichung (26)

$$\sin\varphi = \frac{\cos u \operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}}$$

wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta\sigma \cdot \sin\varphi &= \xi \cdot \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2 u \cos^2 a}{1+\cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}} \cdot \cos u \operatorname{tg} a \cdot d\vartheta \\ &= \xi \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 a}{\cos^2 a + \cos^2 u \sin^2 a}} \cdot \sin a \cdot d\vartheta \\ &= \xi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin^2 u \sin^2 a}{1 - \sin^2 a \sin^2 u}} \cdot \sin a \cdot d\vartheta\end{aligned}$$

oder

$$\delta\sigma \cdot \sin\varphi = \xi \sin a \cdot d\vartheta \tag{27}$$

Aus der Form dieser Gleichung für den Sagittalschnitt folgt auf Grund analoger Überlegungen wie bei Gleichung (23), daß für die Anwendung der Gleichung (2) die Wahl des Winkels φ ohne jeden Einfluß ist.

Um auch hier die Werte der sphärischen Aberration einzuführen, ist zu bedenken, daß für die sagittale Schale der Brennfläche $\xi = \mathfrak{A}$ wird.

Dann ist die linke Seite der Gleichung (2)

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta\sigma \cdot \sin\varphi) = n \cdot \sin u \cdot \mathfrak{A} \sin a \cdot d\vartheta$$

oder

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta\sigma \cdot \sin\varphi) = n \sin a \cdot [\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta \tag{28}$$

Dies ist die Invariante der Helmholtzschen Gleichung für den Fall der isoplanatischen Korrektion des *Sagittalschnittes.*

Die nämlichen Gleichungen (25) und (28), nur mit gestrichenen Buchstaben, gelten bei isoplanatischer Korrektion des Bildraums auch für diesen.

Soll nun die vermöge der Helmholtzschen Gleichung (d. h. auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes) vermittelte Abbildung für beide Schalen der Brennfläche isoplanatisch sein, so ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) unter Weglassung der konstanten Faktoren $\cos\alpha$ bzw. $\sin\alpha$

$$\left.\begin{aligned} n \cdot d\,[\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta &= n' \cdot d\,[\mathfrak{A}' \sin u'] \cdot d\vartheta' \\ n \cdot [\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta &= n' \cdot [\mathfrak{A}' \sin u'] \cdot d\vartheta' \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Das optische Bild einer der gedrehten objektseitigen Brennfläche angehörenden Erzeugenden (von der Neigung u und der vom Drehpunkt gemessenen Schnittweite $\mathfrak{A}$) wird eine der gedrehten bildseitigen Brennfläche angehörende Erzeugende (von der Neigung u' und der vom Drehpunkt gemessenen Schnittweite $\mathfrak{A}'$), wenn beide Gleichungen (29) erfüllt sind. Es muß also sein

$$\frac{d\,[\mathfrak{A} \sin u]}{\mathfrak{A} \sin u} = \frac{d\,[\mathfrak{A}' \sin u']}{\mathfrak{A}' \sin u'}$$

Soll diese Beziehung für *alle* Erzeugenden gelten, so ist zu integrieren, wodurch sich

$$\frac{\mathfrak{A}' \sin u'}{\mathfrak{A} \sin u} = \text{const.} \qquad (30)$$

ergibt. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient die Überlegung, daß Gleichung (30) auch für die paraxialen Werte Giltigkeit haben muß. Bezeichnet man

$$\lim_{u'=0} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' \text{ und } \lim_{u=0} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

(wobei zum Unterschied von den fett gedruckten, mit Aberrationen behafteten Werten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die paraxialen Grenzwerte durch gewöhnlichen Druck gekennzeichnet sind) und

berücksichtigt man, daß die paraxialen Öffnungswinkel du und du' werden, so folgt

$$\lim_{u=u'=0}\left[\frac{\mathfrak{A}'\sin u'}{\mathfrak{A}\sin u}\right]=\frac{\mathfrak{A}'\,du'}{\mathfrak{A}\,du}=\text{const.}$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen in die beiden identisch gewordenen Gleichungen (29)

$$n\cdot\mathfrak{A}\,du\cdot d\vartheta=n'\cdot\mathfrak{A}'\,du'\cdot d\vartheta'$$

oder

$$n\cdot dr\cdot d\vartheta=n'\cdot dr'\cdot d\vartheta' \tag{31}$$

wobei $dr=\mathfrak{A}\,du$ und $dr'=\mathfrak{A}'\,du'$ die paraxialen Blenden-halbmesser in den Dreh-Zentren M und M' sind.

Gleichung (31) ist nichts anderes als der Helmholtzsche Satz für Paraxial-Strahlen; sämtliche darin vorkommenden Größen sind daher als optisch konjugiert aufzufassen. Da das objektseitige Dreh-Zentrum M als Eintritts-Pupille des Systems vorausgesetzt wurde, muß das bildseitige Dreh-Zentrum M' die Austritts-Pupille sein.

Die wichtigen paraxialen Größen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, welche mithin die paraxialen Entfernungen eines Objekt- oder Bildpunktes von der zugehörigen Pupille angeben, sollen als (objektseitige bzw. bildseitige) *„Strahlungsweite“* bezeichnet werden.

Das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{A}'\,du'}{\mathfrak{A}\,du}=\frac{dr'}{dr} \tag{32}$$

gibt die Linear-Vergrößerung in den Pupillen an, wodurch die Integrations-Konstante bestimmt ist. Dann lautet die Bedingungs-Gleichung (30)

$$\frac{\mathfrak{A}'\sin u'}{\mathfrak{A}\sin u}=\frac{dr'}{dr}=\text{const.} \tag{33}$$

Dabei stellen die Größen $\mathfrak{A}\sin u$ bzw. $\mathfrak{A}'\sin u'$ die Lote dar, die aus den Pupillenmitten auf einander optisch konjugierte, endlich geneigte Strahlen gefällt sind. Diese Lotlängen sollen als *„Pupillenlote“* bezeichnet werden.

Sind Objekt- und Bildpunkt sphärisch korrigiert, so geht Gleichung (33) in die Abbesche Sinusbedingung über.

Die Bedingungs-Gleichung (33) läßt sich in folgendem Satz aussprechen:

Proportionalitäts-Bedingung (1. Form)

„Eine zur Eintritts-Pupille isoplanatische Korrektion des Objektraums wird im Bildraum zur Austritts-Pupille für eine beliebige endliche Öffnung isoplanatisch, wenn die Pupillenlote optisch konjugierter Strahlen für alle dazwischen liegenden Öffnungen konstantes Verhältnis, nämlich gleich der Linear-Vergrößerung in den Pupillen, besitzen."

Da bei der isoplanatischen Korrektion der durch die Spitze der Brennfläche gehende Strahl nach der Drehung stets wieder nach der nämlichen Pupille hinzielt, so müssen gemäß der Definition der Koma die isoplanatischen Pupillen endlicher Öffnung zugleich die komafreien Pupillen kleiner Öffnungen und schwacher Neigungen sein. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ sind zugleich auch die *„komafreien Strahlungsweiten"*. Ist also die Proportionalitäts-Bedingung für *endliche* Öffnungen nicht erfüllt, so gestattet wenigstens der Grenzwert für kleine Öffnungen die Berechnung der *komafreien Strahlungsweiten* und *-Pupillen.*

Die Bedeutung der Proportionalitäts-Bedingung ruht darin, daß sie sich nur auf die Korrektion eines Achsen*punktes* bezieht, die Isoplanasie dagegen auf die Korrektion einer kleinen achsen-senkrechten *Ebene.*

Aus der obigen (ersten) Form der Proportionalitäts-Bedingung ist auch das zugrunde liegende allgemeine optische Gesetz klar ersichtlich.

Denkt man sich einesteils $\mathfrak{A}$ als beliebige Funktion von u und andernteils $\mathfrak{A}'$ als beliebige Funktion von u' gegeben, so ist durch diese Funktionen die Form der objektseitigen und bildseitigen Brennfläche vollständig bestimmt. Greift man im Bildraum einen Strahl von der Neigung u' heraus, so ist dem hiezu gehörenden Pupillenlot vermöge der Proportionalitäts-

Bedingung eine bestimmte Lotlänge im Objektraum und dadurch eine bestimmte Neigung u im Objektraum zugeordnet. Da mit dem Strahlenkegel des Objektraums zugleich auch die Energiewerte der objektseitigen Strahlung gegeben zu denken sind, *so fordert die Proportionalitäts-Bedingung einen bestimmten Zusammenhang zwischen der Strahlendichte auf den Wellenflächen des Objektraums mit der Strahlendichte auf den Wellenflächen des Bildraums, und ist somit* eine *rein energetische Bedingung.* Die Proportionalitäts-Bedingung macht also über die *Form* der Wellen- und Brennflächen keinerlei Vorschrift.

Um die Proportionalitäts-Bedingung auf eine für die Durchrechnung bequemere Form zu bringen, führt man statt der von den Pupillen gemessenen „Strahlungsweiten" $\mathfrak{A}$, $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{A}'$, $\boldsymbol{\mathfrak{A}}'$ die auf den ersten und letzten Linsenscheitel bezogenen „Schnittweiten" s, $\boldsymbol{s}$ bzw. s', $\boldsymbol{s}'$ ein, wobei wieder die schwach gedruckten Buchstaben die paraxialen Werte, die fett gedruckten die zu endlichen Öffnungen gehörenden, mit Aberrationen behafteten Werte vorstellen sollen.

Drückt man die sphärische Längsaberration durch beide Arten von Größen aus, so ergibt sich

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A} = \boldsymbol{s} - s \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\mathfrak{A}}' - \mathfrak{A}' = \boldsymbol{s}' - s'$$

und hieraus
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\mathfrak{A}} &= \mathfrak{A} + (\boldsymbol{s} - s) \\ \boldsymbol{\mathfrak{A}}' &= \mathfrak{A}' + (\boldsymbol{s}' - s') \end{aligned}\right\} \tag{34}$$
sowie

Als Wert für die Linearvergrößerung in den Pupillen erhält man nach bekannten Formeln

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{\mathfrak{A}'\,du'}{\mathfrak{A}\,du} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{s}{\mathfrak{f}_s'} \tag{35}$$

Dabei ist abkürzend

$$\mathfrak{f}_s' = \frac{s_1' \cdot s_2' \cdot s_3' \cdots s_{k-1}'}{s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \cdots s_k} \cdot s_k' \tag{36}$$

gesetzt, wobei

$s_1, s_2, s_3 \ldots s_k$ die paraxialen Schnittweiten vor den Brechungen
$s_1', s_2', s_3' \ldots s_k'$ „ „ „ nach „ „

sind. Da bisher die Flächen-Indizes unterdrückt waren, ist s_1 mit s und s'_k mit s' identisch. Die Größe $\mathfrak{f}'_s$ sei wegen der Ähnlichkeit der Formel (36) mit der Brennweitenformel als „*Pseudobrennweite*" bezeichnet.

Dann wird Gleichung (33) unter Berücksichtigung der Gleichungen (34), (35) und (36)

$$\frac{[\mathfrak{A}' + (\boldsymbol{s}' - s')] \sin u'}{[\mathfrak{A} + (\boldsymbol{s} - s)] \sin u} = \frac{\mathfrak{A}' \cdot s}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{f}'_s};$$

hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' (\mathfrak{f}'_s \sin u' - s \sin u) + \mathfrak{A} (\boldsymbol{s}' - s') \mathfrak{f}'_s \sin u' - \mathfrak{A}' (\boldsymbol{s} - s) s \sin u = 0$$

oder
$$\frac{(\boldsymbol{s}' - s') \mathfrak{f}'_s \sin u'}{\mathfrak{A}'} = \frac{(\boldsymbol{s} - s) s \sin u}{\mathfrak{A}} + (s \sin u - \mathfrak{f}'_s \sin u')$$

und
$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{f}'_s} = \frac{\boldsymbol{s}' - s'}{\dfrac{s \sin u}{\sin u'} - \mathfrak{f}'_s + \dfrac{\boldsymbol{s} - s}{\mathfrak{A}} \cdot \dfrac{s \sin u}{\sin u'}}$$

oder schließlich

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{f}'_s} = \frac{\boldsymbol{s}' - s'}{\dfrac{s \sin u}{\sin u'} \cdot \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{s} - s}{\mathfrak{A}}\right) - \mathfrak{f}'_s} \tag{37}$$

Hiebei sind $\boldsymbol{s} - s$ und $\boldsymbol{s}' - s'$ die sphärischen Längsaberrationen des Objekt- bzw. Bildraums;

$$\frac{s \sin u}{\sin u'} - \mathfrak{f}'_s$$

ist der Fehler gegen die Abbesche Sinusbedingung *(„Fehler gegen die Pseudobrennweite")* bei aberrationsfreiem Objekt in einer rechnerisch bequemen Form.

Die Formel (37) enthält den Blendenort nicht explizit, da er auf der rechten Seite noch im Nenner eingeht. Bildet man sich jedoch verschiedene konjugierte Wertepaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so lassen sich (unter Berücksichtigung kleinerer Offnungen) durch eine rasch zum Ziel führende Näherung in einfachster Weise zunächst die komafreien Strahlungsweiten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ finden; es ist

dann noch zu untersuchen, inwieweit bei diesen Werten der Proportionalitäts-Bedingung für endliche Öffnungen Genüge geleistet wird.

Es liegt nahe, den Nenner

$$\frac{s \sin u}{\sin u'}\left(1+\frac{s-s}{\mathfrak{A}}\right)-\mathfrak{f}'_s$$

als *„Fehler gegen die Sinusbedingung (Fehler gegen die Pseudobrennweite) bei isoplanatischer Korrektion des Objektpunktes“* zu definieren, und die rechte Seite der Gleichung (37) als *„Fehlerverhältnis“* zu bezeichnen. Für die linke Seite der Gleichung (37) war in einem früheren Aufsatz[1]) der Ausdruck *„Blendenfaktor“* eingeführt worden. Die Proportionalitäts-Bedingung läßt sich dann in folgende, für *numerische Rechnung* bequeme Form fassen:

---

[1]) F. Staeble, Über den Zusammenhang von Koma und Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen, Zeitschr. f. Instr. **27**, S. 173, 1907. In diesem Aufsatz kommt der Verfasser unter Voraussetzung eines aberrationsfreien Objekts zu einem für das Seidelsche Gebiet giltigen Ergebnis, das sich mit dem zweiten Satz der Proportionalitäts-Bedingung (2. Form) durchaus deckt. Ferner ergibt sich aus den dort entwickelten Beziehungen folgende, innerhalb des Seidelschen Gebietes giltige Transformations-Formel:

Setzt man analog der obigen Formel (36) für $\mathfrak{f}'_s$

$$\mathfrak{f}'_x=\frac{x'_1\cdot x'_2\cdot x'_3\cdots x'_{k-1}}{x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdots x_k}\cdot x'_k$$

(wobei die $x_i\, x'_i$ die Schnittweiten eines beliebig gewählten Blendenorts sind), und führt man die abgekürzten Bezeichnungen ein

$$\mathrm{Sph}=\sum\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^4 Q^2_{\nu s}\,\varDelta\frac{1}{ns}=-\frac{2n'}{\mathfrak{f}'^2_s(su)^2}\{s'-s'\}$$

$$\mathrm{Sinb}=-\frac{2n'}{\mathfrak{f}'^2_s(su)^2}\left\{\frac{s\sin u}{\sin u'}-\mathfrak{f}'_s\right\}$$

$$\mathrm{Kom}=\sum\left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3\frac{y_\nu}{y_1}Q_{\nu s}Q_{\nu x}\,\varDelta\frac{1}{ns},$$

wobei von den Reihenentwicklungen in den geschwungenen Klammern nur die quadratischen Glieder $(su)^2$ mitzunehmen sind, so folgt unter Berücksichtigung der Seidelschen Eliminationsformel

Proportionalitäts-Bedingung (2. Form).

„Die Isoplanasie des Objektraums bleibt im Bildraum bis zu solchen Öffnungen erhalten, als das Fehlerverhältnis konstant bleibt. Der Grenzwert des Fehlerverhältnisses für kleine Öffnungen ergibt (auch bei Nichterfüllung der isoplanatischen Korrektion größerer Öffnungen) den Blendenfaktor der komafreien Austrittspupille, wodurch die letztere bestimmt ist.“

Gleichung (37) läßt sich auch in der Form schreiben

$$\frac{s'-s'}{\mathfrak{A}'} = \frac{\frac{s \sin u}{\sin u'}\left(1 + \frac{s-s}{\mathfrak{A}}\right) - \mathfrak{f}_s'}{\mathfrak{f}_s'} \tag{38}$$

Das gibt in Worten die

Proportionalitäts-Bedingung (3. Form).

„Die Isoplanasie des Objektraums bleibt im Bildraum bis zu solchen Öffnungen erhalten, als die sphärische Abweichung in Prozenten der Strahlungsweite gleich dem Fehler gegen die Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite ist. Findet diese Übereinstimmung nur für kleine Öffnungen statt, so sind die zugehörigen Pupillen die komafreien Pupillen.“

Die Einführung der „Pseudobrennweite“ ist für rechnerische Zwecke sehr bequem, immerhin ermangelt diese Größe einer physikalischen Bedeutung. Führt man die von den Haupt-

---

$$Q_{1x} - Q_{1s} = \frac{h_k}{h_1} \cdot \frac{y_k}{y_1} \cdot (Q_{kx} - Q_{ks})$$

nach Einsetzen in die dortige Gleichung (**17**) die für jeden beliebigen Objekts- und Blendenort giltige *Transformationsformel*

$$\mathfrak{f}_x' \cdot \text{Kom} = \mathfrak{f}_s' \cdot \text{Sph} - \mathfrak{A}' \cdot \text{Sinb}$$

Dabei sind die Summen Sph und Sinb vom Blendenort, der nur in die Komma-Summe, sowie in die Koeffizienten $\mathfrak{f}_x'$ und $\mathfrak{A}'$ eingeht, vollständig unabhängig.

ebenen gerechneten Gaußschen Objekt- und Bildweiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ ein, so besteht die Beziehung

$$\frac{du'}{du} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}'},$$

daher ist wegen Gleichung (35)

$$\frac{s}{\mathfrak{f}_s'} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}'} \tag{39}$$

zu setzen. Dann läßt sich Gleichung (38) auch schreiben

$$\frac{s' - s'}{\mathfrak{A}'} = \frac{\frac{\mathfrak{X} \sin u}{\sin u'}\left(1 + \frac{s - s}{\mathfrak{A}}\right) - \mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}'} \tag{40}$$

Der Zähler des zweiten Bruches stellt dabei die Abbesche Sinusbedingung als „*Fehler gegen die* (Gaußsche) *Bildweite*" dar; dieser Fehler gegen die Bildweite in Prozenten der Bildweite ist numerisch gleich dem Fehler gegen die Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite. Statt des „Fehlers gegen die Schnittweite" $s' - s'$ könnte auch der numerisch gleiche „*Fehler gegen die Strahlungsweite*" $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}'$ eingeführt werden.

Dann läßt sich die Proportionalitäts-Bedingung in folgender, für *graphische Darstellungen* vorteilhaften Form ausdrücken:

Proportionalitäts-Bedingung (4. Form).

„Die sphärische Abweichung (Fehler gegen die Strahlungsweite) ist in Prozenten der Strahlungsweite, der Fehler gegen die Bildweite in Prozenten der Bildweite darzustellen, (wobei der prozentuale Fehler gegen die Bildweite zahlenmäßig gleich dem prozentualen Fehler gegen die Pseudobrennweite ist). Aus dem Zusammenfallen beider Kurven für kleine Öffnungen ersieht man die Komakorrektion für schwache Neigungen; aus dem Zusammenfallen beider Kurven für große Öffnungen die isoplanatische Korrektion des Bildes, falls das Objekt für die entsprechende Eintritts-Pupille isoplanatisch korrigiert war."

Spezial-Fälle.

a) Ist der Objektpunkt *aberrationsfrei*, so wird in dem Ausdruck für den Fehler gegen die Sinusbedingung in Gleichung (37), (38) und (40) der in Klammern stehende Faktor

$$1 + \frac{\mathbf{s} - s}{\mathfrak{A}} = 1$$

und die komafreie Austritts-Pupille ergibt sich explizit.

b) Liegt das Objekt im *Unendlichen*, so wird

$$s \sin u = h$$

gleich der Einfallshöhe h, während die Pseudobrennweite, Gaußsche Bildweite und bildseitige Brennweite identisch werden. Es wird also dann

$$\mathfrak{f}_s' = \mathfrak{X}' = f'.$$

Die Brennweite des Objektraums ist dabei noch beliebig, d. h. die Brechungs-Indizes im Objekt- und Bildraum können verschieden sein; durch Gleichsetzen der beiden tritt keine weitere Vereinfachung ein.

Dem „*Blendenfaktor*" $\mathfrak{A}' / \mathfrak{f}_s'$ liegt im allgemeinen keine physikalische Bedeutung zugrunde; nach Gleichung (35) wird er jedoch mit der Linearvergrößerung in den Pupillen identisch, wenn

$$\mathfrak{A} = s$$

d. h. wenn die Eintritts-Pupille im ersten Linsenscheitel, oder wenn das Objekt im Unendlichen liegt.

Auf eine merkwürdige Ähnlichkeit der Proportionalitäts-Bedingung mit der Aufhebung der *chromatischen Vergrößerungs-Differenz* sei an dieser Stelle hingewiesen: In Fig. 5 sei M' die Austritts-Pupille des Systems, S' der axiale Bildpunkt und S_λ' der entsprechende Punkt für eine zweite Farbe. Ebenso seien P' und P_λ' unendlich benachbarte außeraxiale Bildpunkte, welche zur Neigung

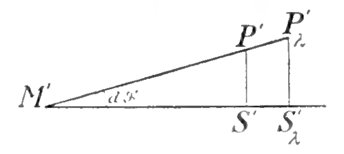


Fig. 5

$d\vartheta'$ des Bildraums gehören. Die Austritts-Pupille sei für beide Farben als fest angenommen, während für die Eintritts-Pupille die hiedurch bedingte chromatische Aberration bestehen soll.

Die chromatische Vergrößerungs-Differenz ist dann behoben, wenn die Punkte P' und P'_λ von M' aus gesehen auf einer Geraden liegen. Führt man wieder die paraxialen Strahlungsweiten $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'_\lambda$ ein und bezeichnet man die unendlich kleinen Bildhöhen mit H' bzw. H'_λ, so ist

$$M'S' = \mathfrak{A}', \quad M'S'_\lambda = \mathfrak{A}'_\lambda$$
$$S'P' = H', \quad S'P'_\lambda = H'_\lambda$$

zu setzen. Soll die Vergrößerungs-Differenz behoben sein, so muß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke die Beziehung bestehen

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{H'_\lambda}{H'} \tag{41}$$

Nun ist bekanntlich die Linearvergrößerung des Bildes gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{H'}{H} &= \frac{n}{n'} \cdot \frac{\mathfrak{f}'_s}{s} \\ \frac{H'_\lambda}{H_\lambda} &= \frac{n_\lambda}{n'_\lambda} \cdot \frac{(\mathfrak{f}'_s)_\lambda}{s_\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Dann wird Gleichung (41)

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{n_\lambda}{n'_\lambda} \cdot \frac{s}{s_\lambda} \cdot \frac{H_\lambda}{H} \cdot \frac{(\mathfrak{f}'_s)_\lambda}{\mathfrak{f}'_s}$$

Ist das Objekt aberrationsfrei, so wird

$$s = s_\lambda \text{ und } H = H_\lambda,$$

während für die Eintritts-Pupille gegenüber der als fest angenommenen Austritts-Pupille chromatische Aberration bestehen kann. Ferner sei hier die Voraussetzung gemacht, daß Objekt- und Bildraum gleichen Brechungs-Index haben sollen. Dann wird

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{(\mathfrak{f}'_s)_\lambda}{\mathfrak{f}'_s}$$

oder
$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'} = \frac{(\mathfrak{f}'_s)_\lambda - \mathfrak{f}'_s}{\mathfrak{f}'_s} \tag{43}$$
das ergibt in Worten die

Proportionalitäts-Bedingung für die chromatische Korrektion:

„Zur Aufhebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz für eine zweite Farbe muß hiefür die chromatische Längsaberration in Prozenten der Strahlungsweite gleich dem chromatischen Fehler der Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite sein."

Die Bedingung für Aufhebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz wird also unter den angegebenen Voraussetzungen (aberrationsfreies Objekt, gleicher Brechungs-Index im Objekt- und Bildraum) der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung analog. Für den praktisch wichtigsten Fall (fernes Objekt) tritt auch die Analogie mit der 4. Form ein.

Eine Gegenüberstellung zweier einfacher Beispiele diene zur Erläuterung der Proportionalitäts-Bedingung.

1. Einzelne brechende Kugelfläche: Hier muß die komafreie Pupille im Kugelmittelpunkt liegen, weil durch ihn (und nur durch ihn) alle, die kaustische Spitze tragenden Strahlen gehen. Da für diese Pupille jede zur brechenden Kugelfläche konzentrische Objektfläche in eine ebensolche Bildfläche abgebildet wird, und da hiebei die Form der Brennfläche stets die nämliche bleibt, so muß für diese Pupille auch ein achsensenkrechtes Objekt*element* ohne Formänderung der Brennfläche in ein achsensenkrechtes Bild*element* abgebildet werden. Der Kugelmittelpunkt ist also nicht nur *komafreie* Pupille, sondern nach unserer Definition auch *isoplanatische* Pupille; es muß also für ihn die Proportionalitäts-Bedingung in allen angegebenen Formulierungen erfüllt sein, und zwar gleichgiltig, ob das Objekt aberrationsfrei ist oder nicht. Es müssen daher sowohl die Pupillenlote konstantes Verhältnis

besitzen, als auch das Verhältnis der sphärischen Abweichung zur Sinusbedingung für die ganze Öffnung konstant sein.

Es ist also wegen

$$\mathfrak{A} = s - r, \quad \mathfrak{A}' = s' - r, \quad \mathfrak{f}_s' = s'$$

nach Gleichung (37) stets

$$\frac{s' - s'}{\dfrac{s \sin u}{\sin u'}\left(1 + \dfrac{s - s}{s - r}\right) - s'} = \text{const.} = \frac{s' - r}{s'} = \frac{n(s-r)}{n' s}$$

oder

$$\frac{s' - s'}{\dfrac{s \sin u}{\sin u'} \cdot \dfrac{s - r}{s - r} - s'} = \text{const.} = \frac{s' - r}{s'} = \frac{n(s-r)}{n' s} \tag{44}$$

Diese Formel kann auch als Kontroll-Formel bei der trigonometrischen Durchrechnung an jeder beliebigen sphärischen Fläche benützt werden, bietet jedoch nur scheinbar eine erhöhte Genauigkeit.

Während sich ein direkter Beweis für diese Gleichung (44) auf Grund der Durchrechnungsformeln leicht ergibt, ersieht man für die Pupillenlote (Proportionalitäts-Bedingung 1. Form) ohne weiteres, daß diese bezüglich des Einfalls- und Brechungswinkels die gegenüberliegenden Katheten über dem Kugelradius als Hypotenuse sind. Die Pupillenlote verhalten sich daher für jede beliebige Öffnung (bei sphärisch beliebig korrigiertem Objektpunkt) wie die Sinusse der brechenden Winkel oder umgekehrt wie die Brechungsindizes, womit die Proportionalitäts-Bedingung in ihrer ersten Form bewiesen ist.

Liegt das Objekt aberrationsfrei im Unendlichen, so gilt die Proportionalitäts-Bedingung streng auch für jede Plankonvex- (oder Konkav-)Linse beliebiger Dicke, die dem fernen Objekt die Planseite zukehrt.

Faßt man das zum Kugelmittelpunkt isoplanatische Bild wieder als Objekt für die Brechung an einer zweiten (dritten usw.) konzentrischen Kugelfläche auf, so folgt in gleicher Weise, daß die Isoplanasie bei beliebig vielen brechenden (oder spiegelnden) konzentrischen Kugelflächen bezüglich des gemein-

samen Mittelpunktes als Pupille erhalten bleiben muß. Von dieser Eigenschaft hat z. B. Sutton[1]) mit seiner *Panoramic lens* und F. Jentzsch[2]) mit seinem *konzentrischen Kondensor* Gebrauch gemacht. Rechnerisch kommt diese Beziehung bei all diesen Systemen in der Weise zum Ausdruck, daß der Fehler gegen die Sinusbedingung streng proportional der sphärischen Längsaberration wird.

2. Spiegelung an einem Rotations-Paraboloid: Hiebei schneiden sich parallel zur optischen Achse auftreffende (also von einem aberrationsfreien fernen Achsenpunkt ausgehende) Strahlen nach der Spiegelung streng im Brennpunkt; die sphärische Längsaberration ist also streng behoben. Denkt man sich die erzeugende Parabel in Polarkoordinaten bezüglich des Brennpunkts durch die bekannte Gleichung gegeben

$$r = \frac{p}{1 + \cos u'},$$

wobei u' die Achsenneigung des gespiegelten Strahls ist, so ersieht man unmittelbar, daß wegen

$$h = s \sin u = r \sin u'$$

und

$$\mathfrak{f}_s' = s' = \frac{p}{2}$$

der Fehler gegen die Sinusbedingung

$$\frac{h}{\sin u'} - \mathfrak{f}_s' = r - \frac{p}{2} > 0$$

und daher die Sinusbedingung nicht korrigiert sein kann. Als komafreie Strahlungsweite ergibt sich nach (37) $\mathfrak{A}' = 0$, die komafreie Austritts-Pupille fällt mit dem Bild zusammen, so daß das scharfe (isoplanatische) Bild nur die Größe Null besitzt.

---

[1]) M. v. Rohr, Theorie und Geschichte des phot. Objektivs. Berlin, J. Springer, 1899, S. 171.

[2]) F. Jentzsch, Über Dunkelfeldbeleuchtung. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, XII. Jahrgang, Nr. 22, S. 981.

Im Zusammenhalt mit der bekannten Koma-Summe

$$\text{Kom} = \sum \left(\frac{h_\nu}{h_1}\right)^3 \frac{y_\nu}{y_1} Q_{\nu s} Q_{\nu x} \Delta \frac{1}{ns}$$

darf es nicht Wunder nehmen, daß beim ersten Beispiel die komafreie Pupille im Krümmungsmittelpunkt, beim zweiten dagegen in der Entfernung des halben Krümmungsradius (Brennpunkt) liegt, während in die Koma-Summe nur der Radius eingeht. Die Erklärung liegt darin, daß es sich bei der Parabel um eine nicht-sphärische Fläche handelt, während jene Koma-Summe für sphärische Flächen hergeleitet ist.

Zusammenfassend sei zum Schlusse Folgendes bemerkt:

Die Korrektur der Proportionalitäts-Bedingung ist für eine gleichmäßige Ausdehnung der Bildschärfe die *allerwichtigste Forderung.* Fehler gegen diese Bedingung sind es hauptsächlich, welche — trotz guter sphärischer Korrektion und günstig scheinender Erfüllung der Sinusbedingung — der brauchbaren Öffnung ein Ziel setzen. Zu Gunsten der Proportionalitäts-Bedingung muß daher unter Umständen auf die Korrektur der Sinusbedingung Verzicht geleistet werden. Eine Behebung der sogenannten „Brennweitenfehler“ (gleichgiltig, ob der sphärischen oder chromatischen) ist für die Ausdehnung des brauchbaren Bildes stets schädlich, wenn die (sphärischen oder chromatischen) Längsaberrationen nicht behoben sind. Eine Ausnahme ergibt sich — auf Grund der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung — nur für den Fall, daß die Austritts-Pupille ins Unendliche rückt, ein Fall, der z. B. durch die Wirkung der Feldlinse bei Okularen nahezu verwirklicht wird. Hiebei ist also auf die Korrektur der Längsaberrationen (falls diese nicht außerdem möglich ist) zu Gunsten der Behebung der „Brennweitenfehler“ zu verzichten.

Ebenso folgt z. B. aus der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung für photographische Objektive mit Vorderblende (sogenannte Landschaftslinsen), daß die Sinusbedingung kleinere Fehler als die sphärische Abweichung besitzen soll, während für sogenannte Teleobjektive die entgegengesetzte Korrektions-

vorschrift eintritt; denn beide Objektivtypen verhalten sich gegensätzlich bezüglich der Lage der Hauptpunkte zur Blende. Bei Doppelobjektiven liegt die Blende stets nahe bei den Hauptpunkten, so daß hiefür — und *nur* hiefür — die empirische Konstruktionsregel, sphärische Abweichung und Sinusbedingung auf gleiche Fehlergrößen zu korrigieren, Giltigkeit hat.

Die vorliegende Untersuchung war auf ein zentriertes System von Rotationsflächen beschränkt. Läßt man die Beschränkung auf Rotationsflächen fallen, setzt jedoch voraus, daß für alle brechenden Flächen beide Koordinaten-Ebenen Symmetrie-Ebenen sein sollen (was z. B. bei zylindrischen und torischen Flächen der Fall ist), so gilt die Proportionalitäts-Bedingung mit ihren verschiedenen Formulierungen auch für jeden dieser beiden ebenen Hauptschnitte.

In der vorliegenden Arbeit wurden alle Entwicklungen *räumlich*, also für die Brenn*fläche* (Rotationsfläche) durchgeführt. Beschränkt man sich von Anfang an darauf, nur die Verhältnisse innerhalb einer Meridian-*Ebene* dieser Brennfläche, also für eine ebene Brenn*kurve* zu betrachten, so läßt sich naturgemäß die Herleitung der Proportionalitäts-Bedingung entsprechend den einfacheren Voraussetzungen bedeutend vereinfachen.[1])

München, Optisches Werk Dr. Staeble & Co., Januar 1919.

---

[1]) Die vorliegende Arbeit geht auf Überlegungen zurück, welche ich gemeinsam mit unserm damaligen wissenschaftlichen Mitarbeiter Herrn Carl Stein im Jahre 1916 angestellt habe; für seine Anregungen sage ich ihm an dieser Stelle wärmsten Dank; im Juli 1916 lag die Arbeit, allerdings in einer wenig übersichtlichen Form, fertig vor. Im Januar 1919 habe ich sie einer Überarbeitung unterzogen und am 11. Februar 1919 Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. S. Finsterwalder mit der Bitte um Vorlage bei der bayer. Akademie der Wissenschaften eingereicht, nachdem ich sie am 3. Februar 1919 der Zeitschr. f. Instr. angeboten, aber wegen des in Aussicht gestellten späten Erscheinungstermins nicht zum Abdruck gegeben hatte.

Mit Schreiben vom 12. Februar 1919, das ich wenige Tage nach der Einreichung meiner Arbeit erhielt, teilte mir Herr Dr. Lihotzky

von Wien aus mit, daß er in den ersten Tagen des Februar einen Beweis für eine Verallgemeinerung der Sinusbedingung (entsprechend meiner Proportionalitäts-Bedingung in der 2. Form bei Beschränkung auf die Ebene und aberrationsfreies Objekt. D. Verf.) gefunden, und später, daß er ihn am 20. Februar bei der Wiener Akademie der Wissenschaften eingereicht habe.

Beide Arbeiten sind somit durchaus unabhängig von einander entstanden. Durch die hiesigen politischen Wirren hat sich die Vorlage meiner Arbeit in der Akademie-Sitzung bis 17. Mai verzögert, während die Lihotzkysche Arbeit bereits am 6. März 1919 der Wiener Akademie vorgelegt wurde; sie wird im 1. Heft 1919 der dortigen Sitzungsberichte (mathem.-naturw. Klasse) erscheinen.

München, im Juni 1919. D. Verf.

Berichtigung: In der Fußnote auf S. 164 ist das Wort (Sinusbedingung) hinter $S(2) = 0$ zu streichen.

Über die Bahn der von Donner begleiteten Feuerkugel vom 8. April 1916, $12^h 45^m$ MEZ.

Von **Cuno Hoffmeister,** Sonneberg (S.-M.).

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 17. Mai 1919.

Das Sichtbarkeitsgebiet der in der Nacht vom 8. zum 9. April 1916 erschienenen großen Feuerkugel umfaßt Südwestdeutschland und den nordöstlichen Teil der Schweiz. In den Vorarlberger und Allgäuer Alpen sowie im Bodenseegebiet war die Erscheinung von starkem Donner gefolgt, der von der Bevölkerung trotz der späten Stunde vielfach wahrgenommen worden ist und im Verein mit der voraufgegangenen blendend hellen Beleuchtung den Anlaß für das Zusammenkommen einer größeren Reihe von Beobachtungsberichten bildete. Die Mehrzahl der letzteren erhielt ich unmittelbar von den Beobachtern infolge von Aufforderungen, die ich durch einige große Zeitungen hatte verbreiten lassen. Einzelheiten, insbesondere hinsichtlich der scheinbaren Bahn, wurden meist erst im Briefwechsel mit den Beobachtern klargestellt. Für Unterstützung beim Einsammeln der Berichte bin ich den Herren Dr. Kritzinger in Berlin, R. Schindler in Luzern und Prof. Dr. Wegener in Marburg zu Dank verpflichtet.

Bei der Berechnung bin ich im allgemeinen nach den Vorschriften v. Niessls[1]) verfahren, die sich bereits bei meinen früheren Arbeiten als sehr zweckmäßig erwiesen haben. Bei

[1]) G. v. Niessl, Die Berechnung der Meteorbahnen im Sonnensystem, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften VI 2, 10.

der Wiedergabe der Beobachtungen wurde darauf geachtet, daß neben allen auf die scheinbaren Bahnen bezüglichen Angaben auch die Beschreibungen der Lichterscheinung in größtmöglicher Vollständigkeit erhalten blieben. Einige Berichte sind zum Teil wörtlich angeführt; im übrigen ist der Wortlaut zwecks Herbeiführung von Kürzungen und Beseitigung von Unebenheiten vielfach geändert, doch sind wenigstens die von den Beobachtern gebrauchten kennzeichnenden Ausdrücke in den meisten Fällen beibehalten worden. Einige Ausführlichkeit auch hinsichtlich der Nebenumstände erschien angebracht mit Rücksicht auf etwaige spätere Gesamtbearbeitungen solcher Gegenstände. — Die Längenangaben in nachstehender Zusammenstellung und den späteren Abschnitten sind auf Greenwich bezogen, die Zeiten nach MEZ gegeben. Die Azimute sind astronomisch, von Süd über West, gezählt.

Beobachtungen.

1. Lörrach ($\lambda = 7^0\ 39'$; $\varphi = +\ 47^0\ 36'$). „In der Nacht vom Sonnabend auf den Sonntag war im badischen Oberlande ein Meteor von seltener Größe und Leuchtkraft zu beobachten. Das Meteor, das um 12 Uhr 44 Min. am Himmel erschien, nahm seinen Lauf von Südwest nach Nordost. Ein intensiv feuergoldenes, ins Rötliche gehendes Licht, das sich hinter dem eigentlichen Körper des Meteors in langer Garbe ergoß, erleuchtete die tiefe Dunkelheit. Etwa 1 bis 2 Minuten nach dem Fall hörte man, wie verschiedene Zeugen der „Konstanzer Zeitung“ berichten, einen dumpfen Knall.“ (Neue Zürcher Ztg.)

2. Balsthal ($7^0\ 42'$; $+\ 47^0\ 19'$). Um $12^h\ 45^m$ gewaltiges Meteor mit langem und breitem Schweif. Der Kopf leuchtete violett und rot. Kein Geräusch. (Neue Zürcher Ztg.)

3. Luzern ($8^0\ 18'$; $+\ 47^0\ 3'$). „Um $12^3/_4{}^h$ fiel über dem Raume des hiesigen Bahnhofs ein Sternkörper nieder, und der ganze Umkreis wurde davon verschiedenartig blendend beleuchtet.“ Anblick einer funkensprühenden Rakete mit farbigen Strahlen; bunte Farbe; kein Geräusch. (Luzerner Tagblatt.)

4. Zürich ($8^0 33'$; $+47^0 22'$). Aus verschiedenen Mitteilungen in der „Neuen Zürcher Zeitung“ läßt sich auf Grund der Ortsbeschreibungen entnehmen, daß die Feuerkugel etwa im Azimut 230^0 erloschen sein muß. Die Dauer der hellen Beleuchtung wird zu 3^s angegeben. Das Meteor erschien zuerst als Sternschnuppe, wurde immer heller und strahlte schließlich einen blendenden, „ausgeprägt violetten“ Glanz aus. Von anderer Seite wird das Meteor beschrieben als „hell aufleuchtende, gelbliche Kugel, die von einem grünen Kranz umgeben war und aus einem in feurigem Rot erglänzenden, sich nach rückwärts verjüngenden Rohr geschossen schien.“ Als Zeitangaben finden sich $12^h 45^m 50^s$ und $12^h 46^m$. Donner war nicht hörbar.

5. Oberndorf ($8^0 34'$; $+48^0 18'$). Gelb leuchtende Kugel am südlichen Himmel. Die Erscheinung dauerte etwa 2^s.

(Schwarzwälder Bote.)

6. Winterthur ($8^0 44'$; $+47^0 30'$). Um $12^h 45^m$ wurde in dieser Gegend ein prächtig leuchtendes Meteor beobachtet, das in Süd-Nordrichtung dahinfuhr und die Nacht augenblicklich taghell erleuchtete. Etwa 2 Min. nach seinem Verschwinden wurde ein kräftiger Knall vernommen.

(Zeitung „Vaterland“.)

7. Wetzikon ($8^0 48'$; $+47^0 20'$). Taghelle Beleuchtung, kein Knall. (Neue Zürcher Zeitung.)

8. Konstanz ($9^0 10'$; $+47^0 40'$). „Gegen $12^h 45^m$ war bei schönem Sternhimmel ein prächtiges, von Südwesten nach Nordosten ziehendes Meteor sichtbar. Der Himmel war wie von einer großen Leuchtrakete plötzlich weiß erhellt. Der spitz ansetzende und breit auslaufende, ziemlich wagerechte Schweif des Meteors war intensiv feuergolden, jedoch etwas schattiert. Beim Abfallen des würfelartigen Meteors zeigten sich Zacken am Schweifende. Danach war ein dumpfes Rollen von 1 bis 2 Min. Dauer zu hören.“ (Zeitungsnachricht.) — Nach anderer Angabe erschien das Meteor $12^h 44^m$ und zog in 2 bis 3^s von β Serpentis nach α Lyrae. Farbe bläulich; nach 2 bis 3 Min.

fernes Donnerrollen, das 20 bis 25^s dauerte. — Die Koordinaten der angegebenen Bahn sind:

$$\alpha_1 = 235^0\,35'\ \delta_1 = +\,15^0\,41'\ \alpha_2 = 278^0\,32'\ \delta_2 = +\,38^0\,42'.$$

9. St. Gallen ($9^0\,24'$; $+\,47^0\,26'$). „Die Erscheinung begann fast senkrecht über unserer Gegend und beschrieb eine nordwestliche Bahn. Der heftige, mehr als zwei Minuten später hörbare Knall mit donnerähnlichem Nachhall läßt auf eine Mindestentfernung von 50 km schließen. Das Meteor mag sich demnach über der Gegend von Singen-Radolfszell aufgelöst haben.“ (Zeitungsnachricht.)

10. Friedrichshafen ($9^0\,29'$; $+\,47^0\,39'$). „In der Nacht vom Samstag zum Sonntag gegen 1 Uhr früh wurde in der ganzen Bodenseegegend bis hinauf nach Wangen im Allgäu ein überaus starker Donnerschlag wahrgenommen, der zunächst auf eine heftige Explosion schließen ließ. Ihm folgte ein etwa eine Minute dauerndes unheimliches Rollen, während dessen die Nacht taghell erleuchtet war. Wie wir erfahren, ist diese seltene Naturerscheinung auf das Explodieren eines Meteors zurückzuführen. Das furchtbare Getöse, das die Explosion begleitete, die meilenweite Entfernung, in der es wahrgenommen wurde, sowie die überaus große Helligkeit des Meteors lassen auf einen selten großen Körper schließen.“ (Schwarzwälder Bote.)

Die Mitteilung ist insofern unrichtig, als die Lichterscheinung selbstverständlich dem Donner vorausging.

11. Rankweil-Valduna ($9^0\,39'$; $+\,47^0\,16'$). Herr Irrenarzt Dr. Längle teilt mit, daß um die betreffende Stunde eine starke Detonation von mehreren Angestellten und Insassen der Landesirrenanstalt Valduna gehört wurde.

12. Lindau ($9^0\,41'$; $+\,47^0\,33'$). Zeit $12^h\,45^m$. Nach einer vom Beobachter angefertigten Zeichnung erfolgte das Erlöschen im Azimut 160^0, etwa 32^0 hoch. Die Bahn war etwas gegen die Senkrechte geneigt, wobei sich das Meteor von rechts nach links bewegte. Es besaß einen langen, in allen Farben glänzenden Schweif. „Nach 85 bis 90 Sek. folgte ein starker, kanonenschußähnlicher Knall, wie ihn nur ein ganz schweres

Geschütz hervorzubringen vermag, mit 8 Sekunden langem Nachrollen." (Hans Ahler.)

Die scheinbare Neigung der Bahn gegen den Horizont wurde zu 75° angenommen. — Nach einer Zeitungsnachricht vom gleichen Orte erfolgte das Erlöschen in NNW. Die Farben waren „grün, gelb und besonders blau."

13. Weiler (9° 55′; + 47° 35′). a) Viele Bewohner wurden durch einen heftigen Knall, der sich wie ein Kanonenschuß anhörte, aus dem Schlafe geschreckt. (Allgäuer Anzeigeblatt.)

b) Das Meteor fiel um 12^h 45^m langsam in der Richtung gegen das Bodenseegebiet und zog einen langen Schweif nach sich. Der Lichtschein war bläulich grün. Nach 1 bis 1½ Min. folgte donnerähnliches Geräusch, einer dumpfen Explosion vergleichbar, der sich ein starkes Rollen anschloß. (Theodor Seicht.)

c) Der Beobachter sah, durch einen weißen Lichtschein aufmerksam gemacht, eine grünblaue Kugel in nördlicher Richtung niedergehen. Nach 165 Schritten = 2 Min. „kam ein Schuß hoch in der Luft, ganz klar im Ton und kräftig wie der Schall einer Kanone. Hierauf war noch ein starkes Donnerrollen zu hören, das anscheinend gar nicht aufhören wollte und dann, immer schwächer werdend, gleichmäßig ohne Stoß verhallte." (Joseph Fitz, Glasermeister und Nachtwächter.)

14. Röthenbach (9° 57′; + 47° 37′). Ein Bauer aus der Gegend von Röthenbach machte dem Berichterstatter folgende Angaben: Das rotblau leuchtende Meteor hatte eiförmige Gestalt und bewegte sich in nordwestlicher Richtung gegen Ravensburg. Die Zwischenzeit vom Licht zum Schall ergab sich durch Abschreiten der vom Beobachter zurückgelegten Strecke zu etwa 125^s. „Es konnten etwa 15 bis 20^s mehr gewesen sein." Das Donnerrollen hielt 10^s an. (Carl Wachter aus Ellhofen.)

15. Würzburg (9° 57′; + 49° 27′). Ein Meteor von hellgrüner Farbe in südlicher Richtung erleuchtete die ganze Gegend während 2 bis 3 Minuten [?] taghell. (Bamberger Neueste Nachr.)

16. Ellhofen (9° 58′; + 47° 39′). Der Donner folgte dem Lichtschein nach 1½ bis 2 Minuten. (Carl Wachter.)

17. Schnelldorf (10° 9′; + 49° 11′). Der Berichterstatter führte einen Güterzug von Nürnberg nach Crailsheim. Kurz nach Verlassen der Station Schnelldorf bemerkte er den hellen Lichtschein des Meteors. Der Heizer Wegner, der nach der SW-Seite blickte, beschreibt das Meteor als feurigen Körper, der die Größe der Mondscheibe annahm, zuerst weiß war, dann sich rot und blau verfärbte und einen flammenartigen Streifen nach sich zog. Die Bewegungsrichtung war von Ost nach Südwest gegen Crailsheim zu. Die Feuerkugel verschwand hinter den bewaldeten Bergen. Etwaiger Donner wurde durch das Rollen des Zuges übertönt.

(Ludwig Schröck, Oberlokomotivführer aus Nürnberg.)

18. Immenstadt (10° 14′; + 47° 34′). Der Berichterstatter hat 12 Augenzeugen ausgefragt mit nachstehendem Ergebnis: Die Zeit der Erscheinung war etwa $12^h\ 45^m$, die Dauer betrug 6 bis 7^s. Das Meteor ging in schräger Linie von links nach rechts im Nordwesten nieder, etwa in der Richtung gegen den Schwarzen Grat und Isny. Die Farben waren rötlich-gelb-weiß. Nach der Erscheinung folgte „Donner und kanonenschußähnlicher Knall, der in hohen Lagen Bauernleute aus dem Mitternachtsschlafe riß.“ — Fabriknachtwächter Stich machte folgende Angaben: Zeit $12^h\ 50^m$, greller, buntfarbiger Lichtschein von 10 bis 15^s Dauer. „Eine gute Minute“ später donnerähnlicher Knall. Endpunkt im NW hinter dem Hornberg; Neigung der Bahn gegen den Horizont 50 bis 60°.

(Bezirksoberlehrer K. Dietmann.)

Als Azimut des Endpunkts wurde auf Grund der Ortsbeschreibung 138° angenommen. Eine Zeichnung des Neigungswinkels ergab 63° am Endpunkt der Bahn.

19. Blaichach (10° 15′; + 47° 33′). Zeit $12^h\ 48^m$ bis 49^m. Das Meteor zeigte blendende Helligkeit und zog einen roten Schweif nach sich, der sich etwas verbreiterte. Nach einer Zeichnung erfolgte das Erlöschen im Azimut 143°. Nach 2 bis $2^1/_2$ Minuten wurde einmaliger Donner gehört. Der Beobachter hatte zwischen Licht und Schall 220 bis 240 Schritte zurückgelegt. (Betriebsleiter J. Notz.)

20. Oberstdorf (10° 17′; + 47° 24′). a) Die Beobachter sahen um $12^3/_4{}^h$ am südwestlichen Himmel einen überaus grellen Lichtschein, der sich nach Westen zu bewegen schien. Die Beleuchtung dauerte etwa 3^s. Nach etwa 3 Minuten „folgte ein Schlag, als ob etwa aus einem leichten Geschütz ein Schuß in weiter Ferne abgegeben worden wäre.“ Die Beobachter glaubten zunächst, daß der Knall von einer militärischen Übung auf dem Nebelhorn herrührte.

(Gend.-Wachtmeister Sänger, Sgt. Hahn, Nachtwächter Fischer.)

b) Der Beobachter bemerkte um $12^h\ 40^m$ vor seinem nach Süden gerichteten Fenster ein sehr helles, grünlich gelbes Licht und hörte etwa 8 bis 10 Minuten [?] später einen schwachen, etwa 1^s dauernden Donner. (Dr. Heuberg-Jörgens.)

21. Sonthofen (10° 17′; + 47° 31′). Gegen $^3/_4$1 Uhr sah der Unterzeichnete den Lichtschein der Feuerkugel und hörte nach „vielleicht 1 bis $1^1/_2$ Minuten“ einen Knall, ähnlich einem Kanonenschuß, mit anschließendem Rollen, das er für Echo hielt. (Karl Keller.)

22. Halblech (10° 50′; + 47° 35′). Der Beobachter und seine Frau befanden sich auf einer nächtlichen Wanderung in der Nähe der Ortschaft Halblech, $2^1/_2$ Stunden östlich von Füssen. Die Zeit der Erscheinung war $12^h\ 43^m$, die Dauer betrug $2^s.5$. Der Beschreibung ist folgendes entnommen: „Da wir zufällig den in Betracht kommenden Teil des Sternhimmels beobachteten, konnten wir die Erscheinung fast von demselben Augenblick an verfolgen, in dem sie sichtbar wurde. Der Ausgangspunkt des Meteors war das Sternbild des gr. Löwen; die Fallrichtung war fast die genaue Richtung auf den untergehenden Mond zu: nach Zurücklegung von etwa $^2/_3$ dieses Weges (Löwe-Mond) zersprang und erlosch die Erscheinung.“

(J. Eckart, Präparandenlehrer aus Markt Oberdorf.)

Auf einer Zeichnung beginnt die Bahn bei $\alpha = 153^0\ \delta = +22^0$ und endet etwa bei $\alpha = 112^0\ \delta = +26^0$, in Übereinstimmung mit der Beschreibung.

23. Augsburg (10° 54′; + 48° 22′). a) Zeit $12^h 35^m$ [?]. Der Beobachter wurde durch den hellen Lichtschein aufmerksam gemacht und „sah am südwestlichen Himmel einen sinkenden, grell leuchtenden Körper, dem Auge in der Größe eines Drittels des Mondes erscheinend. Die Lichtstärke war größer als die des Mondes. Die Fall-Linie war leicht von links nach rechts gerichtet und von ziemlicher Höhe am Firmament ausgehend.“ Dauer 3^s, kein Donner. (Hans Thanner.)

b) Gegen ½1 Uhr: Bewegung von W nach N. Das Meteor besaß Tropfengestalt mit anhängendem Schweif und war auf der Vorderseite weniger hell als etwas weiter rückwärts. Es erleuchtete die Gegend während mindestens 2^s taghell.“

(Albert Storch.)

24. Forchheim (11° 3′; + 49° 43′). Herr Medizinalrat Dr. Würschmidt bemerkte um $12^h 40^m$ eine starke Erleuchtung des Zimmers, die ihren Ausgang vom SW-Himmel nahm und 2 bis 3^s dauerte.

25. Garmisch (11° 5′; + 47° 30′). a) Der Beobachter bemerkte gegen $12^3/_4{}^h$ eine sekundenlange, auffallend helle Beleuchtung und sah beim Aufblicken das sehr große Meteor in nördlicher bis nordwestlicher Richtung hinter dem Kramerberg verschwinden. Von einem nachfolgenden Donner war in Garmisch nichts zu hören. (Urban Knittl, kgl. Zolloberkontrolleur.)

b) Der Unterzeichnete und zwei Begleiter sahen das Meteor während einer Wanderung zur Alpspitze um $12^h 38^m$ „unter starkem Zischen vorbeifliegen.“ Die Richtung war von Südost nach Nordwest. Die Farbe war blauweiß, das Licht äußerst stark. Dem Meteor schloß sich ein Funkenzug an.

(Hugo Jäger, Chemiker aus München.)

26. Beuerberg (11° 25′; + 47° 48′). Der Beobachter stand als Posten im Gefangenenlager Beuerberg. Der Himmel war wenig bewölkt und ziemlich stark vom Mond erleuchtet. Um $12^h 48^m$ verbreitete sich ein helles, grünblaues Licht, und der Beobachter sah das Meteor sich in einem „Halbbogen“ dem Horizont nähern. Die Bewegung war von S nach NW. Es

scheint demnach, daß die Bahn zuerst horizontal verlief, am Ende aber, einer Zeichnung zufolge, eine Neigung von etwa 40° gegen den Horizont besaß. Der Endpunkt ist etwa im W anzunehmen. Ein sicherer Wert für sein Azimut geht aus den Aufzeichnungen nicht hervor. Das Meteor zog einen langen, büschelartigen Schweif nach sich. (Karl Hofmann.)

27. München (11° 34′; + 48° 9′). Zeit $12^h\ 45^m$. Das Meteor kam vom südöstlichen Himmel und zog bis nach WSW. „Seine Größe war etwa 1/5 der Mondscheibe. Man konnte deutlich einen intensiv glänzenden Kern wahrnehmen, dem ein etwa 6 bis 7 Mondbreiten langer Schweif folgte. Dieser leuchtete im ersten Drittel beinahe ebenso hell wie der Kopf, während der übrige Teil einer Feuergarbe glich. Die Erscheinung dauerte 3 bis 4^s. Das Licht war ungemein hell, grünlich blau und so intensiv, daß es das Bogenlampenlicht überstrahlte.“ (Ingenieur Robert W. Rödel.)

Belanglose Mitteilungen liegen außerdem vor aus Berg (Württemb.), Oberstaufen, Wyl, Rorschach und Wangen (Allgäu). Als Zeitpunkt der Erscheinung wurde im Mittel aus 14 Angaben angenommen: $12^h\ 45^m.2$ MEZ.

Ermittelung der Lage und Höhe des Endpunkts.

Zur Bestimmung des Punktes der Erdoberfläche, in dessen Zenit die Feuerkugel erlosch, liegende folgende Azimutangaben vor:

Zürich	230°	Immenstadt	138°
Konstanz	249.5	Blaichach	143
Lindau a	160	Halblech	109.6
„ b	157.5	München	67.5
Röthenbach	135		

Die Beobachtungen aus Immenstadt und Blaichach wurden vereinigt mit den Koordinaten 10° 14′ + 47° 34′ und $A = 140.^\circ5$. Konstanz und Halblech, die den Endpunkt nach Gestirnen angegeben hatten, erhielten Gewicht 5; der für Lindau anzunehmende Mittelwert $158.^\circ7$ wurde mit Gewicht 2 belegt. Die

Eintragung der Richtungsstrahlen in die Landkarte ergab für den Endpunkt der Feuerkugel die Koordinaten $\lambda = 9^\circ\ 40'$ $\varphi = +47^\circ\ 50'$. Die Auflösung der zur Verbesserung dieses vorläufigen Ortes eingeführten 7 Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab als endgültige Werte mit Hinzufügung ihrer mittleren Fehler:

$$\lambda = 9^\circ\ 37'.3 \pm 3'.9$$
$$\varphi = +47\ \ 49.0 \pm 2.3$$

Folgende Tafel enthält die beobachteten Azimute A_B mit ihren Gewichten p, die aus den verbesserten Koordinaten des Endpunkts berechneten Azimute A_R und die Darstellung der beobachteten Werte im Sinne $R - B$

	A_B	p	A_R	$\Delta A_{(R-B)}$
Zürich	230°.0	1	237° 42′	+ 7°.7
Konstanz	249.5	5	243 42	— 5.8
Lindau	158.7	2	172 0	+ 13.3
Röthenbach	135.0	1	132 17	— 2.7
Immenstadt-Blaichach	140.5	1	121 30	— 19.0
Halblech	109.6	5	106 25	— 3.2
München	67.5	1	77 3	+ 9.5

Die scheinbare Höhe h des Endpunkts wird nur an 3 Orten angegeben. Die Beobachtungen aus Konstanz und Halblech, die den Endpunkt nach Sternen bezeichnen, erhielten gegenüber der unsicheren Angabe aus Lindau fünffaches Gewicht. Das nachstehende Täfelchen enthält ferner die Verbesserungen Δh der Beobachtungen und die berechneten scheinbaren Höhen h_R und wahren Höhen H mit ihren Gewichten P. Letztere sind unter Berücksichtigung der verschiedenen Entfernung der Beobachtungsorte vom Endpunkt der Meteorbahn abgeleitet.

	h_B	p	h_R	$\Delta h_{(R-B)}$	H	P
Konstanz	36° 0′	5	35° 22′	— 0°.6	27.84 km	1.5
Lindau	32 0	1	42 23	+ 10.4	18.62 „	0.3
Halblech	17 35	5	15 41	— 1.9	30.65 „	0.5

Der Mittelwert der berechneten wahren Höhen ist mit Berücksichtigung der Gewichte P:

$$H = 27.2 \text{ km} \pm 4.7 \text{ km}.$$

Die Fehler der Beobachtungen übersteigen nicht das gewöhnliche Maß. Auch den bei der Rechnung nicht benutzten Beobachtungen wird in der Mehrzahl befriedigend Genüge geleistet. Für Würzburg erfolgte das Erlöschen des Meteors wenig westlich von S, für Schnelldorf in SSW, Augsburg in SW, Beuerberg fast genau in W usw. Die gefundene Endhöhe liegt nahe dem Mittelwert 31 km für Meteore mit Donner. Der Endpunkt lag obiger Bestimmung zufolge etwa über dem Ort Weingarten bei Ravensburg nördlich des Bodensees.

Bestimmung des scheinbaren Strahlungspunkts.

Auch hierzu müssen vor allem die Beobachtungen aus Konstanz und Halblech herangezogen werden, die in ihrer Sicherheit allen anderen weit überlegen sind. Ferner wurden benutzt die Berichte aus Lindau, Immenstadt und Beuerberg, die zwar nicht einen ersten Bahnpunkt unmittelbar bezeichnen, dafür aber die Neigung der Bahn gegen den Horizont entnehmen lassen, so daß unter Zurückführung der Neigung auf den Stundenkreis des Endpunkts ein erster Bahnpunkt in einem der beiden Äquatorknoten gewonnen werden konnte. Als zweiter Bahnpunkt ist überall der scheinbare Ort des verbesserten Endpunkts eingeführt.

Es ergaben sich auf diese Weise die folgenden scheinbaren Bahnen mit ihren Gewichten p:

	α_1	δ_1	α_2	δ_2	p
Konstanz	235° 35′	+ 15° 41′	282° 50′	+ 42° 10′	5
Lindau	223 43	0 0	73 23	+ 82 21	1
Immenstadt	221 29	0 0	110 18	+ 40 16	1
Halblech	153 0	+ 22 0	112 53	+ 22 32	5
Beuerberg	193 20	0 0	120 53	+ 9 0	1

Die Beobachtungen zeigen gute innere Übereinstimmung und ergaben unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate als Ort des scheinbaren Radianten:

$$\alpha = 221^\circ\!.0 \pm 2^\circ\!.1$$
$$\delta = -0.4 \pm 1.5$$

Die beobachteten scheinbaren Bahnen erhalten folgende Verbesserungen:

a) Bahnpunkte		b) Neigungen	
Konstanz	— 1°0	Lindau	— 2°8
Halblech	— 0.2	Immenstadt	— 0.6
		Beuerberg	+ 4.1

Die Verbesserungen der Anfangspunkte sind positiv, wenn der ausgeglichene Radiant im nördlichen Polraum der zugehörigen beobachteten Bahn liegt. Die Verbesserungen der Neigungen sind positiv, wenn die ausgeglichene Bahn sich dem Vertikal mehr nähert als die beobachtete Bahn.

Der gefundene Strahlungspunkt liegt nahe der Grenze der Sternbilder Virgo und Libra.

Von dem Punkt der Erdoberfläche gesehen, der das Meteor beim Erlöschen im Zenit hatte, besaß der Radiant im Augenblick des Meteorfalls die horizontalen Koordinaten

$$A = 336^\circ\ 14' \quad h = 39^\circ\ 15'$$

Diese stellen zugleich die Richtung der Bewegung des Meteors gegen den Horizont des Endpunkts dar.

Unter den nicht benutzten Beobachtungen steht die Mitteilung aus St. Gallen im Widerspruch mit unserem Ergebnis, da das Meteor unmöglich senkrecht über diese Gegend hinweg gezogen sein kann. Auch erfolgte das Erlöschen nicht in der Richtung Singen-Radolfszell, also nordwestlich, sondern nordnordöstlich. Wahrscheinlich ist die falsche Richtungsangabe der Zeitungsnachricht erst nachträglich beigefügt worden auf Grund der Bemerkung des Beobachters, daß das Meteor eine „nordwestliche Bahn“ beschrieben habe. Solche Angaben beziehen sich aber in der Regel nicht auf die Himmelsrichtung

des Endpunkts, sondern auf den absteigenden Horizontalknoten. Dieser Auffassung wird auch durch die Bahnbestimmung vollauf genügt. — In Augsburg lag der Punkt des Erlöschens etwa 13°, der Punkt des Aufleuchtens wenigstens 30° über dem Horizont. Das Meteor bewegte sich in geneigter Bahn von links nach rechts in Übereinstimmung mit der nicht ganz klaren Darstellung des eingangs wiedergegebenen Berichts.

Bahnlänge, Anfangspunkt, Geschwindigkeit, verbesserter Radiant.

Bei der Berechnung der Bahnlänge konnten wieder nur die Beobachtungen aus Konstanz und Halblech mit Vorteil benutzt werden. Alle anderen Mitteilungen sind zu unbestimmt gehalten, um zahlenmäßige Verwertung finden zu können. Aus der Länge l der beobachteten scheinbaren Bahnen wurde zunächst auf die zugehörigen wahren Bahnlängen L geschlossen. Mittels der oben gefundenen Bahnneigung ergaben sich dann die geographischen Koordinaten λ, φ und die Höhe über der Erdoberfläche H für die Punkte der Bahn, in denen das Meteor von den Beobachtern zuerst erblickt wurde.

	l	L	λ	φ	H
Konstanz	48° 15′	95.7 km	10° 1′	+ 47° 12.′5	88.2 km
Halblech	37 1	63.6 „	9 53	+ 47 25	67.6 „

Die Dauer der Erscheinung wurde an beiden Orten zu 2.ˢ5 geschätzt. Für die Geschwindigkeit v ergeben sich daher die Werte:

Konstanz 38.3 km/sek, Halblech 25.4 km/sek.

Das Mittel beider Werte ist

$$v = 31.8 \text{ km/sek}$$

und muß in Ermangelung einer zuverlässigeren Bestimmung der weiteren Rechnung zugrunde gelegt werden.

Durch Befreiung vom Einfluß der Erdschwerkraft geht die Geschwindigkeit über in

$$v' = 29.9 \text{ km/sek}.$$

Die von der gleichen Einwirkung herrührende Zenitverschiebung des Radianten bestimmt sich zu

$$\zeta = 1^{0}\ 19',$$

so daß nach Anbringung dieses Wertes als verbesserter scheinbarer Radiant anzunehmen ist:

$$\alpha = 221^{0}\ 22' \quad \delta = -\ \ 1^{0}\ 40'.5$$
$$\lambda = 219\ \ 28 \quad \beta = +13\ \ 39.5$$

Die zugehörige Sonnenlänge ist 18⁰ 48′, die Länge des Zielpunkts der Erdbewegung 287⁰ 51′. Der Abstand des verbesserten scheinbaren Strahlungspunkts vom Apex war daher 69⁰ 1′.

Der geozentrischen Geschwindigkeit 29.9 km/sek entspricht dabei der heliozentrische Wert

$$v'' = 33.7 \text{ km/sek}$$

oder 1,138 in Einheiten der mittleren Erdgeschwindigkeit. Die Beobachtung aus Konstanz allein würde auf 37.9 km/sek führen. Beiden Werten entspricht eine elliptische Bahn. Eine Verminderung der in Konstanz beobachteten Dauer um 0ˢ5 würde dagegen für diese Beobachtung bereits auf eine Hyperbel führen. Es ist zu beachten, daß sich die ganze Nachweisung auf den letzten Teil einer offenbar viel längeren leuchtenden Bahn bezieht. Wenn auch der Beobachter in Halblech ausdrücklich bemerkt, daß er das Meteor fast von Anfang an verfolgt habe, so fehlt es doch nicht an Hinweisen, daß die ganze Dauer beträchtlich größer als 2ˢ5 gewesen ist und daß also auch die Bahn entsprechend länger war. Die für Halblech gefundene Anfangshöhe ist so gering, daß sie sich unmöglich auf den Beginn der leuchtenden Bahn beziehen kann. Berücksichtigt man die verhältnismäßig geringe Endhöhe des Meteors, so wird es sehr wohl gestattet sein, der Wirkung des Luftwiderstands eine Verminderung der wahren Geschwindigkeit des Meteors um etwa 25% zuzuschreiben, wodurch an die Stelle der elliptischen Bahn eine Hyperbel treten würde.

Lichterscheinungen.

Fast alle Beobachter heben die große Lichtstärke hervor. Die Beleuchtung wird vielfach als „taghell“ oder blendend bezeichnet. Hinsichtlich seiner Gestalt wird das Meteor meist als Kugel beschrieben; daneben finden sich die Angaben „würfelartig“ (Beob. Nr. 8), „eiförmig“ (14) und „tropfenförmig“ (23 b). In einer Reihe von Mitteilungen wird der Schweif besonders erwähnt, der anscheinend ungewöhnlich hell gewesen ist und mit der eigentlichen Kugel zu einem geschlossenen Leuchtkörper verbunden schien. Dies bestätigt die Beobachtung aus München (27), wonach der Schweif in seinem ersten Drittel beinahe ebenso hell wie der Kopf leuchtete, während sich unter Augsburg (23 b) sogar die Bemerkung findet, daß das Meteor auf der Vorderseite weniger hell gewesen sei als weiter rückwärts.

Für die Farbe des Kopfes finden sich folgende Angaben: (2) violett und rot; — (3) verschiedenartig, bunt; — (4 a) anfangs sternschnuppenartig, zuletzt ausgeprägt violett; — (4 b) hell aufleuchtende gelbliche Kugel mit grünem Kranz; — (5) gelb; — (8 a) weiß; — (8 b) bläulich; — (12) grün, gelb und bebesonders blau; — (13 b) bläulich grün; — (13 c) weißer Lichtschein, grünblaue Kugel; — (14) rotblau; — (15) hellgrün; — (17) zuerst weiß, dann rot und blau; — (18 a) rötlich-gelbweiß; — (18 b) buntfarbiger Lichtschein; — (20) grünlich gelb; — (25) blauweiß; — (26) grünblau; — (27) grünlich blau.

Der Schweif wird folgendermaßen beschrieben: (1) intensiv feuergoldenes, ins Rötliche gehendes Licht in langer Garbe; — (2) lang und breit; — (3) Funkensprühen; — (4) rot; — (8) spitz ansetzend und breit auslaufend; — (12) in allen Farben glänzend; — (17) flammenartiger Streifen; — (19) roter Streifen, der sich verbreiterte; — (25 b) Funkenzug; — (26) lang, büschelartig; — (27) 6 bis 7 Mondbreiten lang, Feuergarbe.

Hinsichtlich der Feuerkugel selbst zeigen die Angaben der Farbe die in ähnlichen Fällen oft festgestellten Widersprüche, die sowohl durch Auffassungsunterschiede und nachträgliche Entstellungen als durch das gleichzeitige Auftreten mehrerer

Farben, z. B. des roten Schweifs hinter der blaugrünen Feuerkugel veranlaßt sind. Immerhin kann man in den Berichten den normalen Verlauf des Farbenwechsels erkennen. Das Meteor war demnach zuerst sternschnuppenartig und gelblich bis rötlich, worauf es sich mit zunehmender Erhitzung über Weiß nach Blaugrün verfärbt hat. Die Farben Blau, Grün, Violett oder Weiß sind in 14 von 19 Berichten erwähnt. Wenn daneben wie bei (2), (14) und (17) noch Rot auftritt, so bezieht sich dies jedenfalls auf den Schweif. Ein auf das blaugrüne Licht folgender roter Zustand, wie ihn Wegener[1]) annimmt, ist nirgends erkennbar. Auch die Beobachtung unter (17) deute ich dahin, daß der Kopf des Meteors seine Farbe von Weiß nach Blau wechselte, während neben dem Blau das Rot des Schweifes erschien. Auch von der oft wahrnehmbaren Rotfärbung der nach der Hemmung sichtbar bleibenden, erkaltenden Rückstände ist nicht die Rede. Vielleicht wurden diese mit unter dem Begriff des Schweifes zusammengefaßt, zu dem sie ihrer Entstehung nach auch gehören. Nach der Mitteilung unter (22) ist das Meteor am Ende „zersprungen“, worunter wohl das mit der Hemmung verbundene starke Aufblitzen zu verstehen ist.

Die rote Farbe des Schweifes wird ziemlich übereinstimmend hervorgehoben. Es scheint, daß der Schweif alsbald nach seiner Entstehung eine Verbreiterung erfuhr, doch scheint er in der Sichtbarkeit den Kopf des Meteors nicht wesentlich überdauert zu haben. Von einem nach dem Erlöschen der Feuerkugel sichtbaren Streifen ist in den Berichten nicht die Rede.

Für den Durchmesser der Feuerkugel ergaben sich folgende Werte, die noch von dem seiner Größe nach unbekannten, jedenfalls sehr beträchtlichen Einfluß der Irradiation zu befreien sind:

(17)	Schnelldorf	☽ . . .	1425 m
(23a)	Augsburg	$^1/_3$ ☽ . . .	355 „
(27)	München	$^1/_5$ ☽ . . .	260 „

Der helle Schweifansatz war nach der auf 6 bis 7 Mondbreiten lautenden Schätzung aus (27) München 8,4 km lang.

[1]) A. Wegener, Der Farbenwechsel großer Meteore, Abh. d. Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturforscher, Bd. 106, Nr. 1, Halle 1918.

Art und Verbreitung des Donners.

Über den kurze Zeit nach dem Verschwinden der Feuerkugel wahrgenommenen Donner liegen nachstehende Berichte vor:

(1) Lörrach: im badischen Oberlande dumpfer Knall nach $1-2^m$.

(6) Winterthur: in dieser Gegend kräftiger Knall nach 2^m.

(8) Konstanz: a) dumpfes Rollen von $1-2^m$ Dauer; b) nach $2-3^m$ fernes Donnerrollen von $20-25^s$ Dauer.

(9) St. Gallen: nach mehr als 2^m heftiger Knall mit donnerähnlichem Nachhall.

(10) Friedrichshafen: überaus heftiger Donnerschlag mit 1^m dauerndem Nachhall bis nach Wangen im Allgäu.

(11) Rankweil-Valduna: starke Detonation.

(12) Lindau: starker, kanonenschußähnlicher Knall mit 8^s langem Nachrollen nach 85 bis 90^s.

(13) Weiler: a) heftiger Knall wie ein Kanonenschuß; b) nach 1 bis 1.5^m donnerähnliches Geräusch, dumpfe Explosion mit starkem Rollen; c) kräftiger Kanonenschuß nach 2^m, starkes, lang verhallendes Donnerrollen.

(14) Röthenbach: Donnerrollen von 10^s Dauer nach 125 bis 145^s.

(16) Ellhofen: Donner nach 1.5 bis 2^m.

(18) Immenstadt: Donner und kanonenschußähnlicher Knall nach „einer guten Minute".

(19) Blaichach: einmaliger Donner nach 2 bis 2.5^m.

(20) Oberstdorf: a) ferner Kanonenschuß nach 3^m; b) schwacher Donner von 1^s Dauer nach 8 bis 10^m.

(21) Sonthofen: nach etwa 1 bis 1.5^m Knall mit anschliessendem Rollen.

Die Beschreibungen stimmen völlig mit Erfahrungen an früheren Fällen überein: es erfolgte zuerst ein starker Knall, dem sich ein lang anhaltendes Rollen anschloß. Sehr anschaulich beschreibt dies der Beobachter aus Weiler (13 c). An weiter entfernten Orten wurde nur Donner von kurzer Dauer gehört.

Am stärksten war der Donner in den Orten, die unterhalb

und seitwärts des letzten, etwa 40 km langen Teils der Meteorbahn gelegen waren. Aus der Gegend nordwestlich vom Endpunkt der Bahn, dem schwäbischen Donaukreis und Hohenzollern, sind keine Berichte eingegangen. Dagegen wurde der Donner nach Südosten hin bis weit in die Allgäuer und Vorarlberger Alpen wahrgenommen, womit wieder die Erfahrung bestätigt wird, daß der Donner nicht erst am Endpunkt, sondern bereits in weit zurückliegenden Teilen der Bahn seinen Ursprung hat.

Die zwischen Licht und Schall verstrichene Zeit wird in 14 Berichten angegeben. Davon scheiden aus jene von Lörrach (1), Winterthur (6) und Oberstdorf (20 b), erstere, weil der Beobachtungsort nicht genau bezeichnet ist, letzterer wegen der viel zu großen Zwischenzeit, die im Verein mit den Umständen der Beobachtung die Vermutung nahelegt, daß der Donner gar nicht gehört wurde. Dagegen kann die Mitteilung vom gleichen Ort unter (20 a) als völlig sicher angenommen werden. Ob in Winterthur der Donner noch gehört wurde, ist wohl zweifelhaft. Vielleicht rühren die Berichte, die den Stoff zu der eingangs angeführten Zeitungsnachricht geliefert haben, aus dem schweizerischen Bodenseegebiet her.

Im folgenden werden die beobachteten Zwischenzeiten mit den unter Annahme einer Schallgeschwindigkeit von 20 km in 1^m berechneten verglichen, bezogen auf die Entfernung vom Beobachtungsort zum Endpunkt der Bahn (D_1, Δ_1) und zum nächstgelegenen Bahnpunkt (D_2, Δ_2). Infolge der Bahnneigung von fast 40^0 besteht nur geringer Unterschied zwischen beiden Abständen, sofern nicht überhaupt der Endpunkt gleichzeitig nächster Bahnpunkt ist. Die „Verbesserungen“ Δ_1, Δ_2 der beobachteten Zeiten im Sinne $R - B$ sind so angesetzt, daß sie angeben, um welchen Betrag der berechnete Wert außerhalb der vom Beobachter angegebenen Fehlergrenzen fällt. Lautet beispielsweise die Beobachtung auf „1 bis 2^m“ und ist der berechnete Wert größer als 2^m, so ist nicht das Mittel 1.5^m, sondern der Höchstbetrag 2^m mit der Rechnung verglichen worden. Die Angabe „eine gute Minute“ aus Immenstadt (18) wurde mit 1.5^m in Ansatz gebracht.

	beob. Zwischenzeit	D_1	D_2	Δ_1	Δ_2	p
(8b) Konstanz	2 bis 3^m	46 km	46 km	0.^m0	0.^m0	1
(9) St. Gallen	> 2	53 „	53 „	0.0	0.0	1
(12) Lindau	1.4 bis 1.5	42 „	42 „	+ 0.6	+ 0.6	2
(13b) Weiler	1 „ 1.5	43 „	42 „	+ 0.6	+ 0.6	1
(13c) „	2	43 „	42 „	+ 0.1	+ 0.1	2
(14) Röthenbach	2.1 bis 2.4	40 „	40 „	− 0.1	− 0.1	2
(16) Ellhofen	1.5 „ 2	40 „	40 „	0.0	0.0	1
(18) Immenstadt	1.5	59 „	57 „	+ 1.5	+ 1.3	1
(19) Blaichach	2 bis 2.5	60 „	58 „	+ 0.5	+ 0.4	1
(20a) Oberstdorf	3	73 „	68 „	+ 0.6	+ 0.4	1
(21) Sonthofen	1 bis 1.5	65 „	61 „	+ 1.7	+ 1.5	0

Wie zu erwarten war, ist die Darstellung für die zweite Annahme etwas besser als für die erste, was aber bei den geringen Unterschieden, die im vorliegenden Fall zwischen D_1 und D_2 bestehen, bedeutungslos ist. Auffällig ist das Überwiegen der positiven Vorzeichen in den Spalten für Δ. Der Schall wäre demnach an den meisten Beobachtungsorten früher eingetroffen, als die zugrunde gelegte Geschwindigkeit verlangt. Gibt man den einzelnen Bestimmungen die oben unter p angeführten Gewichte, und nimmt man als beobachtete Schallzeit das Mittel der von den Beobachtern in einigen Fällen angegebenen Grenzwerte, bezogen auf die Entfernung D_2 des nächst gelegenen Bahnpunkts vom Beobachtungsort, so ergibt sich eine

mittlere Schallgeschwindigkeit von 391 m in der Sekunde,

also ein wesentlich höherer Wert, als man ihn an der Erdoberfläche im allgemeinen beobachtet, wobei es zweifelhaft bleibt, ob die Ursache dafür in der Verdünnung der Luft oder dem Vorhandensein einer „Explosionswelle" zu suchen ist oder ob beide Ursachen zugleich wirksam sind.

Die größte Entfernung, in der der Donner noch sicher vernehmbar war, beträgt etwa 70 km. Eine Vergleichung mit den bekannten Erfahrungen am Kanonendonner ist nicht ohne weiteres zulässig, weil bei diesem die oftmalige Wiederholung

des gleichen Schalleindrucks die Auffassung auch noch bei sehr geringer Lautstärke, also aus großer Entfernung ermöglicht und weil beim Meteordonner gerade für die weiter entfernten Beobachtungsorte die geradlinigen Schallbahnen zum großen Teil in Räumen mit starker Luftverdünnung liegen, so daß der Donner eine entsprechende Dämpfung erleiden wird. Wenn man berücksichtigt, daß der Luftdruck in 27 km Höhe nur noch etwa 20 mm beträgt, und daß die Schallquellen in unserem Falle zum Teil noch wesentlich höher gelegen haben, so muß es wundernehmen, daß der Donner überhaupt in der beobachteten Stärke bis zur Erdoberfläche herabzudringen vermochte.

Aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacherschen Tianschan-Expeditionen.

Marines Oberkarbon im zentralen Tianschan.

Von **Kurt Leuchs.**

Mit 1 Tafel und 2 Abbildungen im Text.

Vorgelegt von E. Kayser in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Meeresablagerungen der jüngeren Karbonzeit haben im Tianschan ihre Hauptentwicklung am Südrande. Sie bestehen dort in dem Gebiete südlich des Kokschaalflusses, zwischen 78^0 und 80^0 östl. Länge von Gr., aus einer sehr mächtigen Schichtfolge. Die untere Abteilung wird von Schiefertonen, Sandsteinen, Mergelschiefern, Tonschiefern, Tonen, Quarziten, Konglomeraten und Kalksteinen mit Spirifer mosquensis-Fauna gebildet, die Mächtigkeit schwankt zwischen 500 und 2000 m. Darüber folgen als mittlere Abteilung, bis 400 m mächtig, Kalksteine mit Spirifer supramosquensis-Fauna und die obere, ähnlich der unteren Abteilung wieder aus verschiedenen Gesteinsarten bestehend, wird von 300 m mächtigen Tonschiefern, Sandsteinen, Quarziten mit eingeschalteten Kalkbänken mit Fusulinen aufgebaut.

Weiter nördlich, im Kokschaaltau liegen über dem Unterkarbon Schwagerinenkalksteine, darüber braune, graue und schwärzliche flyschähnliche Tonschiefer, welche durch Schwagerinenkalkstein in zwei Teile getrennt sind, und über ihnen folgen wieder Kalksteine mit Schwagerinen und reicher Brachiopodenfauna. Daran schließen sich nach Norden, den Hauptkamm des Kokschaaltau bildend, dunkle Tonschiefer und

Phyllite, welche für devonisch gehalten werden, da die Kalksteine des oberen Unterkarbons transgressiv über ihnen abgelagert sind.

Von einigen zu sicherer Bestimmung nicht ausreichenden Funden abgesehen (Kalksteine des unteren Oberkarbons? von Tschedschinbulak am Südrande der Tekesebene und vom Satl-Kasantal im Temurlyktau) ist marines Oberkarbon in kalkiger Fazies nur noch weit im Westen im oberen Naryngebiete[1]) bekannt.

Die übrigen Vorkommen von Oberkarbon beweisen entweder durch die Mischung von Meeres- und Festlandelementen das Verschwinden des Meeres oder sie bestehen überhaupt nur noch aus terrestrischen Bestandteilen. Zur ersten Art gehören die aus dem Westteile des dsungarischen Alatau bekannten Ablagerungen: über den Kalksteinen des oberen Unterkarbons liegen Schiefer und Tuffe mit Steinkohlen und Pflanzen, wobei gelegentlich auch marine Formen (Spirifer, Martinia, Rhynchonella u. a.) vorkommen. Diese noch unterkarbonischen Regressions-Bildungen gehen nach oben in oberkarbonische pflanzenführende Schiefer und Sandsteine über. Zur zweiten Art wären die oberkarbonischen Sandsteine mit Lepidodendron und Cordaites am Dunschanpaß südlich Urumtschi zu zählen.

Am Sartdscholpaß im zentralen Tianschan schließt das obere Unterkarbon ab mit gipsführenden Mergeln, jüngere marine Bildungen als Unterkarbon sind dort bisher nicht nachgewiesen.

Diese Beobachtungen zusammen mit der Feststellung, daß nördlich der Hauptkette des zentralen Tianschan weder durch Versteinerungen, noch durch die Lagerungsverhältnisse irgendwo Oberkarbon in mariner Ausbildung nachzuweisen war, führten zu der Annahme, daß nach der Regression des Meeres am Ende der Unterkarbonzeit das Meer auf das südliche Randgebiet beschränkt blieb und der Hauptteil des Tianschan schon damals endgiltig Festland wurde.

[1]) Vadasz, Paläontologische Studien aus Zentralasien. Jahrbuch Ung. geol. Reichsanst. 1911.

Durch die Bestimmung einiger von Keidel 1902 gesammelten Versteinerungen ergibt sich aber eine Einschränkung dieser Annahme insofern, als jetzt auch nördlich der zentralen Kette des mittleren Gebirgsteiles marines Oberkarbon sicher nachgewiesen ist.

In seiner Arbeit: „Ein geologisches Profil durch den nördlichen Teil des zentralen Tianschan“ sagt Keidel[1]), daß er einige undeutliche Reste von Conularien am Kaschkaturpasse in grau-blauem Tonschiefer gefunden habe, sowie einige noch nicht sicher bestimmte devonische Formen am Ischtykpasse.

Bei Durchsicht der Aufsammlungen Keidels in der bayerischen Staatssammlung in München fand ich nun zwar nicht die Conularienreste, wohl aber einige andere Versteinerungen, welche nach erfolgter Präparation trotz ihres schlechten Erhaltungszustandes wenigstens teilweise bestimmt werden konnten.

Da bei den Stücken als Fundort: „Kapkakpaß, rechte Seite des Sarydschaßtales“ bzw. „Kapkakpaß, Karkaratal“ angegeben war, zog ich eine im Besitze von Prof. Merzbacher befindliche Abschrift der Tagebücher Keidels zu Rate, wo ich folgendes fand:

„Der Kapkakpaß, der in das Kokdschartal hinunterführt, ist nichts weiter als eine flache, schutterfüllte Mulde innerhalb der Kalkkonglomerate, wie sie im Beginn des Karkaratales auftreten, und innerhalb blaugrauer, zum Teil dunkler, wahrscheinlich devonischer Schiefer, deren mächtige Serie durch einen Wasserriß unmittelbar westlich des Aufstieges vom Karkaratale im Beginn des Karkaratales angeschnitten ist (hellere, blaugraue, plattig-splitterig springende Schiefer unterhalb des Kalkabbruches auf der Südseite dieses Tales, mit Pterinea und anderen schlecht erhaltenen Versteinerungen, weil die Schiefer verquetscht sind).“

[1]) Abh. bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., Bd. 23, S. 105, 1906, dazu: Keidel, Einige Berichtigungen zu meinen Arbeiten über den Tianschan. Zentralbl. f. Min., Geol. u. Paläont. 1907, S. 271—275.

Diese Ausführungen sind begleitet von einem „Profil durch die gefalteten und gestauchten Devonschiefer mit Pterinea im oberen Karkaratale“ (Abb. 1).

Die Schiefer setzen sich nach Süden noch fort über die sumpfige Hochebene zum Kaschkaturpasse und stehen auch an dessen Südabfall gegen das Sarydschasstal an (s. Keidel l. c., S. 111, Abb. 6, hier: Abb. 2).

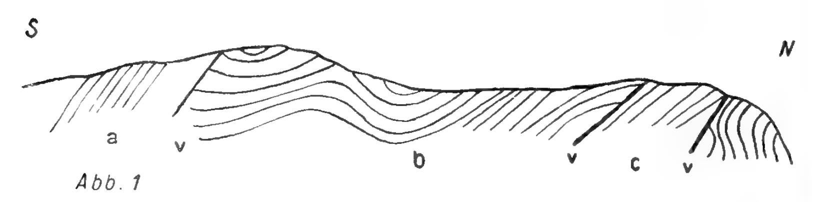


Abb. 1. Profil durch die Oberkarbon-Schiefer im oberen Karkaratale (aus dem Tagebuch Keidels). a dunkle Tonschiefer, b dünne plattige Schiefer mit dickeren Bänken wechselnd, c graue splittrige Schiefer mit Verst., v Verwerfung.

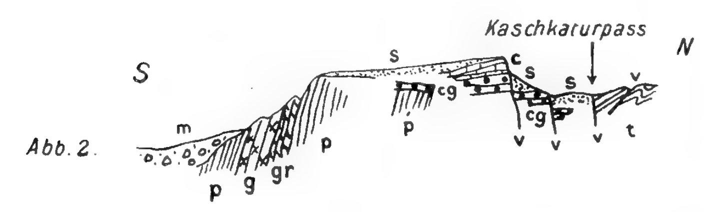


Abb. 2. Profil durch den rechten Talrand des Sarydschasstales am Kaschkaturpaß (aus Keidel, Ein geolog. Profil d. d nördl. Teil d. zentralen Tianschan, S. 111). p Phyllit, gr grauwackeähnliches Gestein, g Gneiss, cg Quarzitkonglomerat der Transgression, c Kalk mit Productus giganteus, t graublaue Tonschiefer, m alte Moräne, s Schutt, v Verwerfung.

Die angegebenen Fundortsbezeichnungen sind demnach dahin zu ergänzen bzw. zu ändern, daß sich die Bezeichnung „Kapkakpaß, Karkaratal“ auf die Westseite des Kapkakpasses, die Bezeichnung „Kapkakpaß, rechte Seite des Sarydschasstales“ auf die Südseite des Kaschkaturpasses bezieht. Offenbar hat Keidel bei der Ausarbeitung seiner Forschungen die beiden

orographisch wenig hervortretenden benachbarten Pässe verwechselt und die als Pterinea und Conularia bezeichneten Versteinerungen nicht mehr untersuchen können.

Die Fundpunkte liegen etwa in 79° 40' östl. Länge von Gr. und 42° 30' nördl. Breite, nach der Übersichtskarte Merzbachers[1]), 46 bzw. 49 km westnordwestlich vom Pik Nikolai Michailowitsch, dem Knotenpunkte des zentralen Tianschan.

Keidels an Ort und Stelle ausgeführte Bestimmung der einen Form als Pterinea kann nicht mit Sicherheit aufrecht erhalten werden. Die anderen Stücke, welche nur ganz undeutlich im Gestein sichtbar waren, ließen vor der Präparation nur schwache Spuren von parallelen Streifen erkennen. Dadurch, daß bei dem einen Stück die Schale zerbrochen ist und einzelne Schalenteile gegeneinander verschoben sind, entstand ein Bild, welches mit der Querstreifung von Conularia Ähnlichkeit hat.

Durch Präparation und Behandlung mit Salzsäure konnten an zweien der vorliegenden drei Stücke Teile von Lobenlinien freigelegt werden, welche eine Bestimmung dieser Ammonoideen ermöglichen.

Aviculide gen. indet.

Taf. 1, Abb. 1.

Der graublaue Tonschiefer des Kaschkaturpasses ist druckgeschiefert und zerfällt in dünne Blätter. In einem aus einigen solcher Blätter bestehenden Handstück ist ein Teil der linken Klappe einer Aviculide enthalten.

Die Schale ist, entsprechend der Blätterung des Tonschiefers, von mehreren Rissen durchsetzt und stark verdrückt. An einzelnen Stellen sind Teile der Schalenoberfläche abgesprungen, dadurch wird eine innere, glattere Schicht sichtbar.

In der Wirbelgegend läßt die äußere Schale 6—8 kräftige Radialrippen erkennen, welche sich in den tieferen Teilen des Mittelstückes durch Einschaltung weiterer Rippen bis auf etwa

[1]) Petermanns Geogr. Mitt., Ergänzungsheft 149, Taf. 1, 1904.

12 vermehren. In der Wirbelgegend liegen zwischen 2 Rippen je 4 niedrige und schmale Radialstreifen, im unteren Teil ist ihre Zahl nicht festzustellen. Doch sind die Radialstreifen auch auf der inneren Schicht vorhanden, während die Rippen hier fehlen.

Nur undeutlich sind feine konzentrische Streifen zu sehen. Dagegen treten auf der inneren Schicht des unteren Teiles breitere Anwachsstreifen deutlich hervor.

Das hintere Ohr ist abgebrochen, nur die Ansatzstelle ist noch vorhanden. Von dem vorderen Ohr ist ein kleines Stück erhalten, hat aber jede Skulptur verloren.

Die gewölbte Schale hat, ohne den abgebrochenen Unterrand, eine Höhe von 5 cm.

Nach seiner äußeren Form, auch nach den allerdings undeutlich erkennbaren Radialrippen und nach den in Resten erhaltenen beiden Ohren könnte das Stück ganz gut einer Pterinea entsprechen. Aber die starke Verdrückung und Schieferung läßt keine sicheren Feststellungen zu und es kann nur gesagt werden, daß es sich um Reste einer Aviculide handelt.

Für die Altersbestimmung der Tonschiefer muß dieses Stück somit ausscheiden.

Shumardites Keideli sp. n.

Taf. 1, Abb. 2—7.

Die 3 vorliegenden Stücke sind stark verdrückt und schlecht erhalten. Doch konnten an zweien Teile der Lobenlinien freigelegt werden, welche zwar ebenfalls durch die Verdrückung nicht mehr ganz ungestört geblieben sind, aber trotzdem eine Bestimmung der Stücke ermöglichen.

Es handelt sich um Angehörige des Genus Shumardites, welches J. P. Smith[1]) für an die Glyphioceratiden sich anschließende Formen aufgestellt hat und als deren Vertreter Shumardites Simondsi aus den Oberen Coal Measures der Ciscoformation von Texas von Smith beschrieben wurde.

[1]) The carboniferous Ammonoids of Amerika. Monographs U. S. Geol. Survey, Bd. 42, 1903.

Über die Form der Versteinerungen läßt sich nichts sicheres aussagen. Das eine Stück (Abb. 2) erscheint dickbauchig, mit gewölbter Seitenfläche und breit gerundeter Externseite, die beiden anderen Stücke lassen eher auf hochmündige, ziemlich flache Formen (Abb. 4, 5, 7) mit rundlicher Wölbung des Externteiles und der Seiten schließen. Doch sind die 2 letzteren Stücke Teile von größeren Individuen und besonders seitlich stark zusammengedrückt, so daß das dickbauchige Stück der ursprünglichen Form wohl noch näher steht.

Die Lobenlinie zeigt den zweispitzigen Mediansattel, den rundlichen Externsattel und den für Shumardites bezeichnenden dreigeteilten Laterallobus. Die Lobenlinie läßt sich am besten mit den von Smith für das Schistoceras-Stadium bzw. für das Ende des Jugend-Stadiums gegebenen Abbildungen (l. c., T. 3, Abb. 9, 10) vergleichen. Auch der Durchmesser des kugeligen Stückes (23 mm) stimmt damit überein.

Wieweit kleinere Verschiedenheiten der Sutur, wie das Fehlen der bei Sh. Simondsi deutlich ausgeprägten Rundung aller Extern- und Lateral-Sättel, sowie das Fehlen der Einschnürung dieser Sättel in ihrem unteren Teile als spezifische Eigenschaften angesehen werden können, möchte ich bei dem schlechten Erhaltungszustand der Stücke nicht entscheiden.

Deutliche Unterschiede gegenüber Sh. Simondsi zeigt dagegen die Schalenoberfläche. Während sie bei Sh. Simondsi, abgesehen von einigen Einschnürungen, glatt ist, besitzen die vorliegenden Stücke deutlich ausgeprägte Spiralstreifen, welche von feinen Anwachsstreifen gekreuzt werden (durch die Präparation mit Salzsäure ging die Schalenskulptur bei den beiden Exemplaren, Abb. 2 und 4, 5 verloren).

Auf Grund dieser Unterschiede möchte ich die vorliegenden Stücke einer neuen Art zuweisen, welche ich zu Ehren ihres Finders benenne.

Das Vorkommen von Shumardites beweist für die Tonschiefer des Kaschkatur- und Kapkakpasses oberkarbonisches Alter. Diese Schiefer wurden bisher für präkarbonisch gehalten, da sie anscheinend von dem Transgressionskonglomerat des oberen Unterkarbons diskordant überlagert sind (s. Profil Abb. 2). Mit Sicherheit läßt sich aber aus diesem Profile Keidels nur die Überlagerung des Phyllites feststellen, während der Kontakt zwischen dem Konglomerat und dem nördlich folgenden Tonschiefer durch eine Schuttzone verdeckt ist. Es liegt daher nahe, anzunehmen, daß die Tonschiefer von dem Konglomerat durch Störungen getrennt sind, wie ja auch die Tonschiefer von Verwerfungen durchsetzt werden. Keidel (l. c., S. 107) erwähnt, daß eine große Zahl von Längsverschiebungen Tonschiefer und Kalk in schmale Schollen zerschneiden, die sich von Nord nach Süd in Staffeln senken. Aus Keidels Beschreibung ergibt sich, daß die Lagerungsverhältnisse ziemlich verwickelt sein dürften, und es muß eine offene Frage bleiben, ob durch die tektonischen Vorgänge an der Grenze von Konglomerat und Schiefer lediglich ein Absinken der Schiefer gegenüber dem Konglomerat erfolgte, oder ob vielleicht das Konglomerat samt dem hangenden Kalkstein von Süden her über die Tonschiefer überschoben wurde.

Was nun die Beziehungen des Oberkarbons vom Kaschkatur- und Kapkakpasse zu anderen Vorkommen von Oberkarbon betrifft, so wäre, nach dem eingangs gesagten, am ersten an das im Kokschaaltau entwickelte Oberkarbon zu denken (Tonschiefer zwischen Schwagerinenkalkstein) und an die südlich sich daran schließenden Ablagerungen südlich des Kokschaalflusses (Tonschiefer und andere Gesteine, auch Kalksteine, getrennt durch eine mittlere, rein kalkige Abteilung).

Nähere Parallelisierung mit einem bestimmten Gliede dieser von Keidel[1]) und Gröber[2]) beschriebenen Schichtreihen läßt sich zur Zeit noch nicht ausführen, nach Analogie mit dem

[1]) Geologische Untersuchungen im südlichen Tianschan. N. Jahrb. f. Min., Geol., Paläont. Beil. Bd. 22, 1906.

[2]) Der südliche Tiënschan. Geogr. Abh., Bd. 10, 1914.

Auftreten von Shumardites im oberen Oberkarbon von Texas würde das Oberkarbon des zentralen Tianschan etwa mit dem Tonschiefer der oberen Abteilung des südlichen Tianschan zeitlich gleichzustellen sein.

Auf jeden Fall aber ist die bisher geltende Annahme[1], daß das Oberkarbonmeer nur noch die südlichen Randgebiete des Tianschan bedeckte, dahin abzuändern, daß von den Randgebieten aus das Meer noch in den zentralen Teil des Gebietes sich erstreckte. Ob es sich dabei nur um eine räumlich beschränkte Bucht handelte oder ob das Meer weitere Gebiete bedeckte und seine Grenzen etwa im Nordwesten im Dsungarischen Alatau, im Osten gegen den Dunschansattel zu hatte, läßt sich heute noch nicht feststellen.

Am Schlusse dieser Ausführungen ist es mir eine angenehme Pflicht, den Herren Geh. Rat Kayser und Professor Wedekind meinen herzlichen Dank, auch an dieser Stelle, auszusprechen für ihre liebenswürdige Unterstützung und Beratung bei Bestimmung der Fossilien.

Durch den Nachweis des oberkarbonischen Alters der Tonschiefer am Kaschkatur- und Kapkakpasse ist für einen kleinen Teil der Tonschiefer des zentralen Tianschan die Annahme devonischen Alters hinfällig geworden; daraus ergibt sich, daß auch für andere Tonschiefer, soferne nicht die Lagerung unzweifelhaft präkarbonisches, also wohl devonisches Alter beweist, immerhin mit der Möglichkeit jüngerer Entstehung gerechnet werden muß. Auf die Veränderungen, welche allein dieser eine Fundpunkt in unserem Bilde von der Verteilung von Land und Meer im Paläozoikum hervorzurufen imstande ist, habe ich schon hingewiesen.

---

[1]) Leuchs, Zentralasien. Handbuch der Regionalen Geologie, Bd. 5, Abt. 7, 1916.

Im Anschluß daran soll noch ein weiteres, von Keidel beschriebenes Vorkommen besprochen werden, welches zwar keine große, aber immerhin eine wichtige Veränderung jenes Bildes hervorzurufen vermag.

Es handelt sich um die schon erwähnten devonischen Formen am Ischtykpaß (etwa in 78° 20′ östl. L. v. Gr., 41° 30′ nördl. Breite).

In seiner zweiten Arbeit über den Tianschan sagt Keidel (l. c., S. 337):

„Zwischen dem Bedel- und Ischtykpasse trifft man nämlich auf eine breite Kalkzone, in deren nördlichem Saume der Ischtykpaß liegt. Der größte Teil dieser Zone besteht aus unterkarbonischem Kalk, worin Productus giganteus häufig ist; der südliche Rand wird dagegen von mitteldevonischem Kalk gebildet. Dieser Kalk enthält in zahlreichen Stücken Spirifer subcuspidatus, und sein Liegendes ist derselbe dunkle, fast schwarze Tonschiefer, wie er in dem oberen Teile des Bedeltales und in der Umgebung des Bedelpasses ansteht.“ Weiter sagt Keidel, daß das Gebiet nördlich des Bedelpasses in hohem Maße durch physikalische Verwitterung zerstört ist und die Kalke stark zertrümmert sind, so daß die Erkennung der Lagerungsverhältnisse außerordentlich erschwert sei. Es könne daher nicht entschieden werden, ob der mitteldevonische Kalk das wahre Hangende des Tonschiefers sei, ob der unterkarbonische Kalk transgressiv über Tonschiefer und devonischem Kalk liege, endlich ob vielleicht auch der mitteldevonische Kalk diskordant über dem Schiefer liege, welch letztere Möglichkeit Keidel als sehr wahrscheinlich bezeichnet.

Die Untersuchung der Stücke ergab nun, daß der für „subcuspidatus“ gehaltene Spirifer nicht zu dieser Art gehört, sondern zu Sp. distans. Die zahlreichen Stücke, welche am Ischtykpasse gesammelt wurden, stimmen in allen Einzelheiten so sehr mit von Davidson[1]) abgebildeten und beschriebenen Stücken überein und unterscheiden sich andererseits in ver-

[1]) British Carboniferous Brachiopoda 1858—63. Taf. 8.

schiedener Beziehung so sehr von Sp. subcuspidatus, daß diese Bestimmung nicht aufrecht erhalten werden kann.

Auch die Gesteinsbeschaffenheit liefert keinen Hinweis auf devonisches Alter des Spiriferen-führenden Kalksteins. Dieser ist zwar dunkelgrau, während die Kalksteine mit Productus giganteus hellgrau sind, aber auch an anderen Stellen im Tianschan (Chonochaital z. B.) ist eine solche Zweiteilung des oberen Unterkarbons in liegende dunkle und helle Kalksteine im Hangenden vorhanden.

Näheres über die noch einige andere Arten enthaltende Fauna des Ischtykpasses, welche somit vollständig zum oberen Unterkarbon gehört, wird in einer schon begonnenen Arbeit über das Karbon des Tianschan gebracht werden. Hier kam es mir nur darauf an, zu zeigen, daß am Ischtykpasse Devon bis jetzt paläontologisch nicht nachgewiesen werden kann, daß die Kalksteine insgesamt zum Karbon gehören und daß die von Keidel selbst als sehr wahrscheinlich bezeichnete diskordante Lagerung des Kalksteins über dem Schiefer tatsächlich vorhanden sein dürfte.

Es liegt nahe, die Schiefer an der Basis der Kalksteine dann als devonisch zu bezeichnen, wenn auch die Funde vom Kaschkatur- und Kapkakpasse in dieser Hinsicht zur Vorsicht mahnen.

In jener Arbeit soll auch die durch Gröber (l. c., S. 48) neuerdings besprochene Frage des Vorkommens von oberem Mitteldevon bei Tongitar (etwa in 76° 10′ östl. Länge v. Gr., 40° nördl. Br.) näher erörtert werden.

Gröber fand nämlich an der gleichen Stelle, wo Stoliczka das von Frech[1]) als Stringocephalus Burtini bestimmte Stück gefunden hat, unterkarbonische Versteinerungen (Spirifer striatus, Productus semireticulatus) und schloß daraus, daß der sehr schlecht erhaltene Stringocephalus ein Bruchstück eines Spirifer striatus sei.

---

[1]) In Suess, Beiträge zur Stratigraphie Zentralasiens. Denkschr. Wiener Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., Bd. 61, 1894.

In Richthofen, China, Bd. 5, 1911.

Damit würde ein weiteres, lange Zeit für sicher gehaltenes Vorkommen von Devon zu streichen sein. Stoliczka selbst hatte seinen Fund für triassisch gehalten.

Dagegen ist 30—40 km westlich des Tales von Tongitar, im Tojuntale nördlich Kaschgar, wo schon Bogdanowitsch und Stoliczka devonische Versteinerungen gesammelt haben, durch spätere Aufsammlung[1]) außer zahlreichen Korallen auch Uncites gryphus und Stringocephalus Burtini gefunden worden, wodurch das von Frech auf Grund der früheren Funde angenommene Alter der Schichten (Stringocephalenhorizont) bestätigt wird.

[1]) Tschernyschew, Bronnikow, Weber, Faas, Das Erdbeben von Andischan 1902. Abh. Geol. Komitée, St. Petersburg 1910.

Tafel-Erklärung.

Abb. 1. Aviculide gen. indet. Kaschkaturpaß Südseite.
„ 2.} Shumardites Keideli sp. n. Kaschkaturpaß Südseite.
„ 3.} Lobenlinie.
„ 4.} Shumardites Keideli sp. n. „ „
„ 5.} „ „ „ „
„ 6.} Lobenlinie.
„ 7. Shumardites Keideli sp. n. Kapkakpaß Westseite.

Alle Abbildungen in natürlicher Größe.

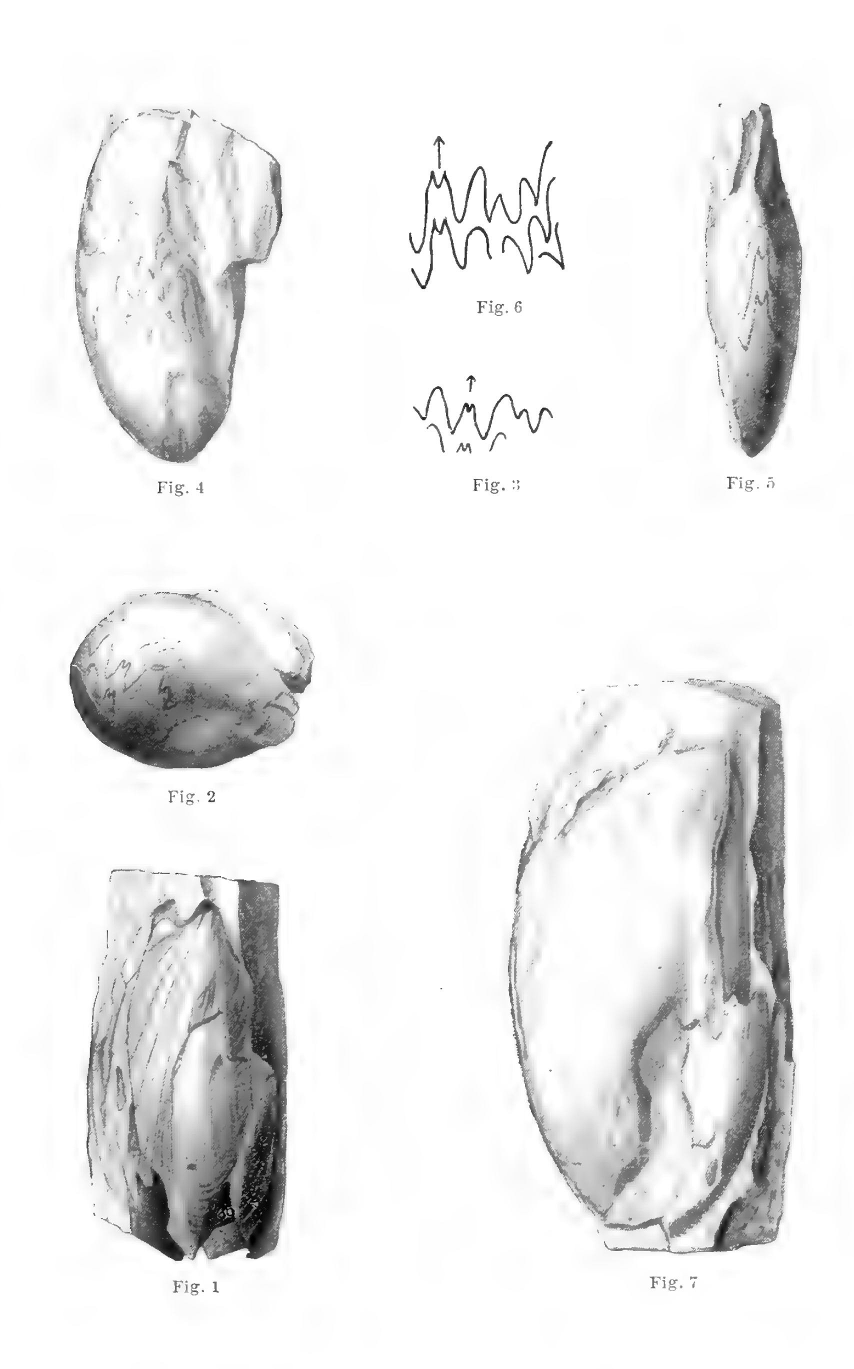


Fig. 4

Fig. 6

Fig. 3

Fig. 5

Fig. 2

Fig. 1

Fig. 7



Die pliocänen Ablagerungen im Gebiet des Oberlaufes der Vezouse in Lothringen.

Von **K. Boden.**

Mit einer Karte.

Vorgelegt von E. Kayser in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Ausgedehnte, der ältesten Diluvial- oder jüngsten Tertiärzeit angehörige Ablagerungen, welche zwischen Baccarat und Lörchingen die höchsten Punkte der Hügel überdecken, wurden bereits von L. v. Werveke[1]) nachgewiesen. Eingehendere Schilderungen dieser weitverbreiteten, das obere Saartal begleitenden Bildungen finden sich in der Arbeit von A. Hemmer: Untersuchungen über Oberflächengestaltung und Talstufen im Flußgebiet der oberen Saar[2]).

Im folgenden soll eine genauere Beschreibung der im oberen Vezousetal gelegenen Vorkommnisse gegeben werden und deren tektonische Verlagerungen, die auf Grund der Kartierung festgestellt wurden.

Die Altersfrage dieser meist dem Pliocän zugerechneten[3]), hoch gelegenen Überdeckung konnte noch nicht mit absoluter Sicherheit entschieden werden, da genau bestimmbare organische Überreste bisher nicht bekannt geworden sind.

---

[1]) Mitt. d. Philom. Gesellschaft in Elsaß-Lothringen, 11. Jahrgang, 1903, S. 100.

[2]) Mitt. d. Ges. für Erdkunde und Kolonialwesen zu Straßburg i. E. für die Jahre 1915/16 und 1916/17, 6. Heft.

[3]) M. Bleicher, Essai sur l'origine, la nature, la répartition des éléments de destruction des vosges, du versant lorrain et des régions adjacentes du bassin de la saône. Congrès géol. international Paris 1900, 1. fasc., S. 539—543, Taf. III. Hemmer, Oberfl. u. Talst. im Flußgeb. der oberen Saar, l. c.

Einige fossile Pflanzenteile (Juglans, Acer), die auf einer gemeinsam mit Herrn Steeger unternommenen Begehung gefunden wurden, sprechen nicht gegen die Annahme, daß die Ablagerungen dem Pliocän oder einem dem Pliocän nahestehenden Abschnitte des Quartärs angehören[1]).

Es liegt daher kein Grund dazu vor, von der Altersdeutung als Pliocän abzugehen.

Die der Arbeit zu Grunde liegenden Aufnahmen wurden während meiner kriegsgeologischen Tätigkeit im wesentlichen in den Jahren 1917 und 18 ausgeführt. Meinen besten Dank möchte ich Herrn Geheimrat Dr. L. v. Werveke aussprechen, der mir die bereitwilligste Unterstützung gewährte bei der Ausarbeitung, die ebenfalls im Felde fertiggestellt wurde.

Ausbildung und Verbreitung der pliocänen Überdeckung.

Die pliocänen Bildungen setzen sich vorwiegend aus meist gelb, gelbbraun bis braunrot gefärbtem (seltener sind graue bis grauweiße Färbungen) ungeschichteten, lockeren Kies- und Sandablagerungen zusammen, denen stets ein mehr oder minder hoher Gehalt an Lehm beigemischt ist, der vielfach bis auf 5—10 % der Zusammensetzung zurückgeht, an manchen Stellen jedoch so stark vorwaltet, daß kiesig-sandige Lehme entstehen.

Die groben Kiesel besitzen vorwiegend Durchmesser von 2—5 cm (größere Durchmesser bis zu 10 cm und darüber sind selten) und bestehen vorwiegend aus Quarz und entfärbtem Quarzit, sowie untergeordnet aus weichen porösen, ebenfalls entfärbten Sandsteinen. Lokal finden sich auch Beimischungen von meist kieseligen Muschelkalkgesteinen (Hornsteinen und Kieseloolithen). Die Entfärbung erreicht einen sehr verschiedenen Grad. Neben völlig gebleichten Kieseln finden sich auch

---

[1]) Die letzten Angaben sind einer Mitteilung des Herrn Professor Dr. Weber aus Bremen entnommen (s. u.), der in entgegenkommender Weise die sehr dürftigen Reste untersucht hat. Für die aufgewandte Mühe spreche ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

solche mit mehr oder minder erhaltenem Farbstoff. Am wenigsten stark sind die schwarzen Kieselschiefer angegriffen.

Die Korngrößen des vollständig aus quarzigem Material bestehenden Sandes, der bei den lehmarmen Schottern etwa 75 % des Gesamtbestandteiles ausmacht, bleiben ganz vorherrschend unter 1 mm. Mittlere Korngrößen treten bei der Zusammensetzung der Schotter sehr zurück. Das Mischungsverhältnis von Sand und Kies schwankt in weiten Grenzen. Geröllärmere und reichere sowie aus reinem Sand bestehende lagen- oder linsenförmig angeordnete Teile wechseln miteinander ab. Untergeordnet finden sich graue oder grauweiße Tonlinsen, -Knollen und -Lagen in den Kiesen und Sanden eingeschaltet.

An der Zusammensetzung der pliocänen Decke beteiligen sich ferner tonige und feinsandige Sedimente, die nur untergeordnet Kieseinlagerungen enthalten. Die völlig kalkfreien, äußerst zähen und meist fetten, gefleckten oder gebänderten, vielfach humosen Tone, denen häufig ein mehr oder minder hoher Gehalt an Feinsand beigemischt ist, besitzen vorherrschend graue und graugrüne, außerdem auch gelbe und gelbbraune Färbungen. Zusammenhängende schnell auskeilende und wieder ansetzende Sand- und Kieslinsen von weißer oder braunroter Farbe wurden an mehreren Stellen beobachtet. Vielfach finden sich einzelne wallnußgroße weiße Quarzkiesel und auch kleine weiße Quarzkörner im sandfreien Ton eingesprengt. Außerdem auch Hornsteinknauer und fossilführende kieselige Muschelkalkgesteine. Oft sind die Tone ganz durchsetzt von dünnen verkohlten, strukturlosen pflanzlichen Resten, die sich zuweilen zu 1—2 cm dicken Kohlenschnitzen anreichern und dem Ton hie und da schwarze Färbungen verleihen.

Die Feinsande, welche die Tone faziell verdrängen können, sind meist grau oder weiß gefärbt und führen eingeschaltete graue und grauweiße oder auch braune Tonlagen und Linsen.

Über weite Strecken bilden die tonig-feinsandigen Sedimente in den aufgenommenen Profilen die älteren Absätze des Pliocäns. Nur vereinzelt wurden grobe Kies- und

Sandablagerungen überdeckt von mächtigeren Tonen oder feinsandigen Tonen beobachtet, deren Auftreten räumlich wesentlich beschränkter ist wie dasjenige der Kiese und Sande und die von den letzteren vielfach transgredierend überlagert werden[1]).

Als Höchstmächtigkeit der pliocänen Ablagerungen konnten etwa 25 m beobachtet werden.

Das größte zusammenhängende Pliocänvorkommen überzieht die Höhen zwischen Reichental und Tankonville in einer ostwestlichen Erstreckung von 7 km[2]).

Im Haye Vauthier Wald wurde auf dem südöstlichen Gipfel der zwischen Les Salières und Frémonville gelegenen Höhe in einem Schachtbrunnen folgendes Profil erschlossen.

4 m	lehmiger braunroter Kies und Sand,
0,15 „	Toneisenerz, erfüllt von Pflanzenresten,
0,30 „	gelber Ton mit Kieseln,
1,80 „	grüner sehr fetter Ton,
1,75 „	grauer und gelber Ton mit einzelnen wallnußgroßen Kieseln und einer 4 cm dicken Kiesschicht, nach unten zu übergehend in gelben Ton mit grauen Flecken,
2,45 „	(erbohrt) gelber Ton mit grauen Linsen. *Semipartitus*-Schichten.
10,45 m	

Über die in der pflanzenführenden Schicht aufgefundenen Reste wurde mir von Herrn Professor Dr. C. A. Weber folgendes Untersuchungsergebnis übermittelt:

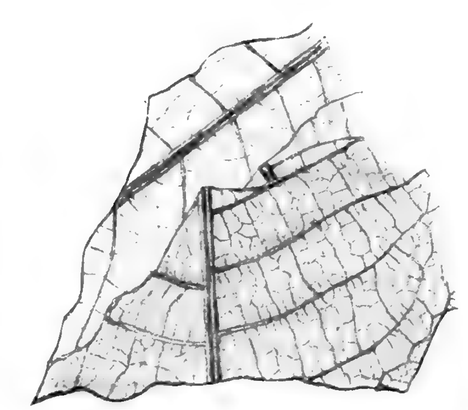
„Auf einem der Gesteinsstücke befindet sich eine mit nur wenig beschädigtem Flügel versehene kleine Ahornfrucht: Länge

[1]) Eine Gliederung in eine untere, vorwiegend sandige Abteilung mit pflanzenführenden Tonen und eine obere geröllreiche zeigen auch ähnliche dem Pliocän zugewiesene Ablagerungen im Unter-Elsaß bei Riedselz und Weißenburg. L. v. Werveke, Über das Pliocän des Unter-Elsaß. Mitteil. d. Geolog. Landesanst. v. Elsaß-Lothr., Bd. III, Heft II, S. 139, Straßburg 1892.

[2]) Das Blatt Lunéville der Carte géol. det. de France 1 : 80000 gibt nicht die gesamte Ausdehnung dieses Vorkommens an, sondern nur den westlichsten Teil desselben.



Ahornfrucht, nahestehend
Acer trilobatum A. Br. od.
A. arcticum Heer.



Blattstücke, wahrscheinlich von Juglandaceen.

(ergänzt) rd. 18 mm, Breite des Flügels $5^1/_2$ mm; Länge des etwas beschädigten Fruchtgehäuses (ergänzt) 7 mm, Breite $3^1/_2$ mm. Es liegt hier eine *Acer trilobatum* A. Br. oder *A. arcticum* Heer nahe stehende Art vor.

Auf einem anderen Stücke bemerkt man ein Gebilde, daß eine flügellose Frucht oder ein Samen desselben Acer sein könnte. Doch ist der Erhaltungszustand zu mangelhaft, um der Sache sicher zu sein.

Dikotyle Blattabdrücke stellen die Hauptmasse der organischen Reste dar und bilden auf den vorliegenden Gesteinsstücken eine 5—8 mm dicke Blätterschicht. Es sind aber nur Bruchstücke von Blättern. Bei den meisten ist das Adernetz gut erhalten. Von der kräftigen Mittelrippe gehen meist genähert alternierende Sekundärrippen in 3—5 mm Abstand unter Winkeln von 55°—75° ab. Sie sind anfangs leicht, näher dem Blattrande stärker aufwärts gebogen. Einzelne Sekundärnerven lösen sich, bevor sie sich dem Rande genähert haben, in Tertiärnerven auf. Die Tertiärnerven sind meist senkrecht zu den Sekundärnerven gerichtet und laufen meist ohne Gabe-

lung von dem einen zum andern (s. die zweimal vergrößerte Abbildung). Der Rand der Blätter ist nirgends erhalten. Die Gestalt scheint länglich und von mittlerer Breite gewesen zu sein.

Es ist nicht möglich, über die Herkunft dieser Blattreste ein sicheres Urteil abzugeben. Doch spricht die Aderung für solche einer *Juglandacee* und zwar entweder der Gattung *Juglans* (Wallnuß) oder *Carya* (Hickorynuß). Dieser Art geaderte Blätter bilden die überwiegende Mehrzahl.

Auf einem Stücke befindet sich ein schlecht erhaltener Blattrest, bei dem drei Hauptadern annähernd aus einem Punkte auszustrahlen scheinen, etwa wie bei Acer arcticum Heer. Möglicherweise liegt ein Blatt dieser Art vor. Doch ist der Rest zu dürftig, um der Sache sicher zu sein.

Auf einigen Stücken finden sich auch Bruchstücke dünner, unberindeter, ganz in Toneisenstein umgewandelter Reiser. Eine Bestimmung war nicht möglich.

Eine Probe der Grundmasse der Blätterschicht wurde in Salzsäure aufgelöst und der Rückstand mikroskopisch untersucht. Es fanden sich darin weder Diatomeen noch sonstige organisierte Gebilde.“

Auf dem nordöstlichen Gipfel werden in mehreren Gruben die Schotter mit stark verwitterten weißen Quarz- und Quarzitkieseln abgebaut, unter denselben erscheinen an Tonbändern und -Lagen reiche tonige, graue Feinsande. Die Gesamtmächtigkeit der pliocänen Decke beträgt hier 15 m.

Am Südost- und Südwestabfall der Höhe unterhalb der 350 m Kurve bestehen die pliocänen Ablagerungen aus den an Kies und Sand armen Tonen, die als mehrere Meter mächtige Decke die Schichten des oberen Muschelkalkes überziehen. An mehreren Stellen wurden hier neben einzelnen Geröllen aus weißem Gangquarz im Ton eingebettete Kieselknollen in großer Menge gefunden. Die Knollen sind vollkommen gebleicht, besitzen eine mürbe Beschaffenheit und zerbrechen leicht in kantige Stücke. Sie zeigen jedoch keinerlei Abrollungserscheinungen. Hie und da finden sich in den Hornsteinen dünne Lagen mit kleinen Gastropodensteinkernen und dünnen Muschelschalen.

In einem Aufschluß konnte folgendes Profil beobachtet werden.

1 m lehmiger rotbrauner Sand mit Kieseln,
dünne Eisenerzlage,
4 „ graugrüner und braungelber fetter Ton mit weißen Quarzknollen und Quarzgeröllen, durchsetzt von schwarzen Häuten und vereinzelten Einlagerungen von Sand- und Kieslinsen,
obere *Semipartitus*-Schichten,

5 m.

Am Nordostrande fehlen die unteren Bildungen, und die Kiese und Sande lagern direkt auf den *Semipartitus*-Schichten.

Im Frémonville Wald nördlich Schloßweinberg (La Vigne) besteht die meist nur wenige Meter mächtige pliocäne Decke vorwiegend aus Ton und braunem sandigem Lehm mit wechselndem Gehalt an Kieseln.

Größere Mächtigkeiten finden sich wieder weiter im Osten [1]). — Im Blâmont Wald wurde auf der Höhe 361 an der Straße nach Reichental folgendes Profil in einem Schachtbrunnen erschlossen.

0,85 m sandiger Lehm,
0,80 „ graugelber Feinsand mit erdigen Brauneisenerzkonkretionen,
0,75 „ braunroter, stark lehmiger Kies und Sand. (Kiesel nicht über 2 cm Durchmesser.)
3,80 „ gelber bis gelbbrauner lehmiger Kies und Sand mit sandigen grauen Tonlinsen. (Kiesel in wechselnder Menge bis 8 cm Durchmesser.)

6,20 m.

[1]) Im Walde von Tankonville findet sich nach Braconnier folgendes Profil.

1 m Sand mit Geröllen,
2,50 „ sandiger grauer Ton,
1 „ roter Ton,
3 „ Sand und Gerölle.

Description géologique et agronomique des terrains de Meurthe – et — Moselle. Nancy-Paris 1883, S. 130.

In einer Kiesgrube nördlich Deutschenhag (Haies des Allemands) stehen die braungelben Kiese und Sande mit stark hervortretenden sandigen Partien in einer Mächtigkeit von 4 m an, überlagert von einer bis zu $^1/_2$ m mächtigen auskeilenden und wieder ansetzenden grauweißen Tonbank mit einzelnen Kieseln.

Nordöstlich von Tankonville sind dieselben Kiese und Sande mit eingeschalteten Sand- und Tonlagen bei Baracke in einer Kiesgrube mehrere Meter mächtig erschlossen und von Tonen unterlagert, die im oberen Teil graugrüne, darunter vorherrschend gelbbraune Färbungen besitzen und zuweilen auch Flecken und Linsen aufweisen. — Neben weißen Quarzkieseln und einigen weißen Hornsteinknollen führen die Tone hier in großer Menge aus Kiesellumachellen bestehende Gesteinsbrocken! Die Fossilien bilden zumeist Steinkerne mit teilweise erhaltener Schale, seltener sind vollständige Schalenexemplare. Vorherrschend finden sich die Zweischalergenera Corbula und Nucula, außerdem große Pectiniden und Gervillien. Genauere Bestimmungen läßt der Erhaltungszustand der Formen nicht zu. Vereinzelt treten auch große und kleine Gastropodensteinkerne auf.

400 m nördlich der Kiesgrube an der Biegung der Straße nach Reichental konnten in mehreren Baugruben für Betonunterstände folgende Profile aufgenommen werden.

0,50 m grauer und graubrauner Lehm mit einzelnen Kieseln,
0,40 „ lehmiger eisenschüssiger (rotbrauner) Kies und Sand,
0,22 „ lehmiger eisenschüssiger Sand,
0,50 „ grauer, schwach sandiger Ton mit unregelmäßiger welliger Oberfläche. Eingeschaltet im Ton ein 5 cm dickes Band und mehrere Linsen von eisenschüssigem lehmigen Kies und Sand,
1,40 „ toniger lichtgrauer Feinsand mit einzelnen bräunlichen Adern,
0,40 „ derselbe Feinsand mit Kieseln

3,42 m.

1 m	kies- und sandhaltiger Lehm,
0,85 m	eisenschüssiger Kies und Sand,
0,80 „	grau und lila gefärbter Ton,
0,40 „	grauer toniger Feinsand
3,05 m.	

1 m	kies- und sandhaltiger Lehm,
1,23 m	eisenschüssiger Kies und Sand,
0,50 „	grauer Ton
2,73 m.	

Wenige hundert Meter nördlich der Straßenbiegung werden an der vom Hattinger Weiher gegen Südwesten führenden Straße eisenschüssige Kiese und Sande in einer Grube abgebaut.

Etwa 300 m unterhalb derselben gegen den Hattinger Weiher zu lieferte ein Schachtbrunnen, dessen Ansatzpunkt etwa auf Höhe 340 m ü. N. N. liegt, folgendes Profil.

6,00 m	grauer feinsandiger Ton,
1,00 „	grauer Kies und Sand (geschachtet),
2,00 „	„ „ „ „ (erbohrt),
	oberer Muschelkalk
9,00 m.	

Auffallend sind in den grauen Schottern dieses Profiles die nicht selten beigemischten Muschelkalkgesteine, die vorwiegend aus Kieseloolith und Hornsteinen[1]) mit stellenweise

[1]) Diese vereinzelten Kieseloolithe und Hornsteine entstammen, wie ihre petrographische Beschaffenheit erkennen läßt, dem unterlagernden mittleren und oberen Muschelkalk im Gegensatz zu den im Niederrheingebiet und an der Mosel die unterpliocänen Kieseloolithschotter charakterisierenden lyditartigen und oolithischen Kieselgerölle, die vorwiegend auf Verwitterungsrückstände von Juraschichten, seltener auf Muschelkalkgesteine zurückzuführen sind. Dem Alter nach könnten diese hochgelegenen kalkfreien Schotter innerhalb des rheinischen Schiefergebirges dem lothringischen Pliocän jedoch nahestehen. E. Kayser, Pliocäne Quarzschotter im Rheingebiet zwischen Mosel und Niederrheinischer Bucht. Jahrb. Preuß. Geol. Landesanstalt für 1907, Bd. XXVIII, Berlin 1910, S. 86—88. Ders., Die Entstehung des Rheintales. Verh. d. Ges. Deutscher Naturforscher u. Ärzte 1908, Leipzig 1909, S. 178. Mordziol, Die geo-

noch anhaftenden Kalkresten bestehen. Außerdem fanden sich zahlreiche Sandsteingerölle und ein Kalkgeröll mit Myophoria Goldfussi. Viele nur schwach gebleichte Kiesel treten ferner in diesen Schottern stark hervor.

Im Hochwalde wurden mit einem auf 350 m ü. N. N. angesetzten Schachtbrunnen gelblich braun gefärbte Kiese und Sande, in einer Mächtigkeit von 15 m durchsunken, überlagert von einer 3 m dicken, grau, zuweilen auch gelb gefärbten Tonschicht. Nördlich des Brunnens wird die oberste Höhe des Waldes (355 m ü. N. N.) wieder von eisenschüssigen Sanden und Kiesen gebildet. Die Pliocändecke erreicht also hier ihre nach den vorliegenden Beobachtungen höchste Mächtigkeit von etwa 25 m. Im südöstlichen Teile des Hochwaldes an der Straße nach Bertrambois stehen sehr lehmige, rotbraune Kiese und Sande an, zusammen mit kies- und sandhaltigem, braunem Lehm.

Im Pransieux Wald südöstlich von Tankonville besteht die pliocäne Überlagerung lediglich aus einer tonigen Decke, deren Mächtigkeit wenige Meter nicht überschreitet. Die graugrün oder dunkelgelb gefärbten Tone sind häufig durchsetzt von Quarzgeröllen und enthalten oft braunrot gefärbte Linsen und Lagen von weißen Quarzkieseln.

Zuweilen lagert über dem Ton eine taschenförmig in denselben hineingreifende, wenig mächtige Decke von rotbraunem eisenschüssigen, sandig-kiesigem Lehm.

Südöstlich dieser ausgedehnten Pliocändecke finden sich eine Anzahl isolierter Pliocänvorkommnisse zwischen dem Harschlinger Wald und Cirey[1]).

logischen Grundlagen der jungtertiären und diluvialen Entwickelungsgeschichte d. Rhein. Schiefergeb. Geol. Rundschau, Bd. I, Leipzig 1910, S. 319 u. a. a. O.

[1]) Auf Blatt Lunéville ist nördlich Cirey ein breiter Streifen Pliocän eingetragen (p_1 s. Erl. zu Blatt Lunéville), der vom Schloßpark über Haute Seille nach Frémonville hinunterreicht. Hierbei wurden eine Anzahl isolierter Vorkommnisse zusammengezogen, die teils dem Pliocän, teils dem Diluvium zuzurechnen sind.

An der Straße von Cirey nach Bertrambois, wenige Kilometer nördlich Cirey sind in einer Grube etwas verrutschte und durch eine Verwerfung gestörte, 2 m mächtige graue bis gelbbraune geflammte oder gebänderte Kiese und Sande mit grauweißen sandigen Tonlagen aufgeschlossen, die nach unten zu in ebenfalls etwa 2 m mächtige, nur ganz vereinzelt Quarzkiesel führende graue, tonige Feinsande übergehen.

Die verlassene Kiesgrube südlich der Fischzüchterei östlich vom Tiercelin Wald zeigt etwa 2 m mächtige braune und braungelbe, sehr lehmige Kiese und Sande mit Eisenkonkretionen. Einzelne grobe Sandsteingerölle erreichen Größen bis zu 20 cm. Unterhalb der Grube sind neben der Straße 1 m mächtige kiesfreie Sande aufgeschlossen.

Am Eingang der im Schloßpark gelegenen Grube lagern über dem bunten Ton des unteren mittleren Muschelkalkes hellgraue Sande mit Kieseln und Tonsande. Dieselben sehr sandreichen, hellgrau gefärbten Bildungen stehen auch in den unteren Teilen der Kiesgrube an, überlagert von einer $^1/_2$ m mächtigen grauen, sandigen Tonbank. Über derselben finden sich gelb bis dunkelbraun gefärbte geröllreiche, geröllarme, sowie rein sandige oder auch graue, sandig-tonige Ablagerungen in schnellem Wechsel. Nördlich der Grube sind an der Straße nach Bertrambois die tiefsten Schichten der pliocänen Decke etwa 1 m mächtig als geröllfreie oder arme graue Tone und Tonsande mehrfach erschlossen.

Die Kiesgruben an der Straßenkreuzung auf der Höhe 373 zeigen vorherrschend gelben bis gelbbraunen, seltener grauen Kies und Sand mit eingeschalteten Schmitzen und Lagen von grauweißem Ton, Sand und Tonsand in einer Mächtigkeit von 2,5 m, unterlagert von grauem und gelbem Ton mit einzelnen Kieseln.

Im Rond Buisson fanden sich in einem kleinen Aufschlusse Tone und Feinsande.

Im Haut de Cappel konnte folgendes Profil beobachtet werden.

0,40 m humoser Lehm mit Sand und Kieseln,
0,80 „ braunroter Kies und Sand. (Den Quarz- und Quarzitkieseln ist ein beträchtlicher Gehalt an Sandsteinkieseln beigemischt.)
0,50 „ brauner Sand mit Kieseln,
0,40 „ gelbbrauner lehmiger Sand
2,10 m.

Weiter nördlich im Harschlinger Wald wird die Höhe 371,3 nördlich Bertrambois aus lehmigen, gelb gefärbten Kiesen und Sanden gebildet, die eine Mächtigkeit von mehreren Metern erreichen und den bunten Ton des mittleren Muschelkalkes direkt überdecken.

Die Aufschlüsse in diesen isolierten Vorkommnissen sind nicht sonderlich günstig und die vorhandenen Schichtprofile meist nicht sehr mächtig. Im allgemeinen läßt sich jedoch erkennen, daß im oberen Teil der pliocänen Decke gelb und braun gefärbte Kiese und Sande vorherrschen, die nach unten zu meist in kiesarme oder kiesfreie Feinsande und Tone übergehen.

Zwei bemerkenswerte Vorkommnisse vom Pliocän finden sich im Saussenrupt-Tale auf den beiden Kuppen des Basse Guindrimont (370 m ü. N. N.). Von dem der östlichen Kuppe konnten auf Grund zahlreicher Schürfe genaue profilmäßige Aufnahmen festgelegt werden. Die Unterlage bilden Hauptkonglomerat und unterste Zwischenschichten, die in ihren obersten aufgelockerten Teilen aus gebleichten Sanden mit wechselndem, meist mäßigem Gehalt an Quarz- und Quarzitkieseln bestehen, deren Korngröße zwischen 3 und 5 cm schwankt.

Die pliocänen Bildungen sind von ihrer Unterlage stets durch ein wenige Zentimeter dickes, grau oder rot gefärbtes, zuweilen sandiges Tonband getrennt und lassen eine Gliederung in zwei Unterabteilungen deutlich erkennen. Zu unterst bauen sich dieselben aus 1—2 m mächtigem feinem, grau oder gelbgrau gefärbtem Sand auf, der nur vereinzelt Gerölle führt,

während der obere bis zu 4,3 m mächtige Teil ein unregelmäßiges, lockeres Gemisch von gelbbraun gefärbtem Sand mit feineren und gröberen Geröllen darstellt, in dem selten Tonlinsen und Knollen auftreten. Der Sand besitzt im Durchschnitt folgendes Mischungsverhältnis

5 %	Korngröße	1—20 mm,
75 %	„	0,5—1 „
20 %	„	unter 0,5 mm.

Von den 20 % unter 0,5 mm entfallen etwa 5—10 % auf tonige Bestandteile.

Bei der Zusammensetzung der Kiese und Sande fällt gegenüber den westlicher gelegenen Vorkommnissen neben den zahlreichen noch ungebleichten oder wenig gebleichten Quarziten der hohe Gehalt an Sandsteingeröllen auf, die in manchen Teilen oft vorherrschen und die Größe von Straußeneiern erreichen.

Die höchste Mächtigkeit der Ablagerung beträgt 5,6 m.

Dieselbe Ausbildung der pliocänen Decke findet sich auf der westlichen Kuppe des Basse Guindrimont. In einem Schurf konnte folgendes Profil aufgenommen werden.

0,75 m	humoser braun bis schwarz gefärbter, sandiger Lehm mit Kieseln,
0,35 „	brauner lehmiger Sand mit Geröllen,
0,18 „	gelber Kies und Sand mit viel groben (— 10 cm dicken) Sandsteingeröllen,
1,12 „	graugelber Sand
2,40 m.	

Außer den soeben besprochenen Vorkommnissen, deren ursprünglicher Zusammenhang klar ersichtlich ist, mögen noch einige weitere Bildungen gleichen Alters angeführt werden.

Im Süden von Cirey liegt auf der aus Muschelsandstein bestehenden Höhe von Petitmont (390 m ü. N. N.) ein in der Literatur schon öfter angeführtes Vorkommen[1]). Die gelben

---

[1]) Noël, Note sur la faune des galets du grès vosgien. Bull. des séances de la Société des Sciences de Nancy, 6e année, Mai-Aout 1905.

stets lehmigen Kiese und Sande, welche in der Grube hinter dem Kirchhof abgebaut werden und zuweilen in ihren oberen Teilen in kiesig-sandigen Lehm übergehen, gleichen vollständig den beschriebenen Ablagerungen nördlich von Cirey.

Zwischen Bréménil und Neuvilier werden die bunten Tone des unteren mittleren Muschelkalkes von einer kies- und sandhaltigen Lehm- und Tondecke überzogen, die jedoch nicht die höchste Erhebung einnimmt, sondern sich zwischen den Kurven 340 und 320 kragenförmig um dieselbe herumlegt.

Zwei ähnliche Vorkommnisse liegen im Süden und Südosten von Montreux, auf den Höhen 320 und 330 m ü. N. N.

Weiter westlich wurden aus dem Haies Walde bereits von Werveke[1]) über dem oberen Muschelkalk lagernde sandige Tone erwähnt, die abwechseln mit Sand und Geröllbildung aus Quarzen und gebleichten Quarziten. Diese Bildungen, in denen mehrfach auch kantige Kieseloolithe aus dem mittleren Muschelkalk beobachtet wurden, liegen auf der Höhe 330 m ü. N. N. Im Nordwesten des Haies Waldes treten östlich Domèvre auf der Höhe 318 braune Lehme auf mit Kieseln und Bohnerz. Nördlich von Domèvre werden die obersten Höhen (300 m ü. N. N.) des zwischen Verdenal und Chazelles gelegenen, aus Lettenkohle und Salzkeuper aufgebauten Waldstreifens von kies- und sandhaltigem Lehm und Ton überdeckt, sowie auch von Kiesen und Sanden, die im Rappe Walde abgebaut werden. Westlich von Repaix findet sich auf der aus dolomitischer Region bestehenden obersten Kuppe der Höhe 345 Kies und Bohnerz führender brauner Lehm. Die gleichen Ablagerungen trifft man in demselben Niveau 1 km weiter nördlich im Westen des Flieger Wäldchens. Der Höhenzug nordöstlich des Erbiset-Baches trägt auf der Höhe 320 einen schmalen Streifen ähn-

---

Leppla, Das Diluvium der Mosel, Jahrbuch der Preuß. Geol. Landesanstalt 1910, Bd. XXXI, Teil II, Heft 2, S. 347. Hemmer, Unters. über Oberflächengest. u. Talst. im Flußgeb. d. oberen Saar, l. c., S. 25.

[1]) Wasserversorgung auf der Kampffront zwischen der Vezouse und Herbaville südöstlich von Angomont. Straßburg i. E., 2. September 1915 (Akten der geolog. Landesanstalt).

licher Ablagerungen zwischen den beiden 352 und 330 m hohen Kuppen, im Süden einer von Gogney gegen Westen ziehenden Verwerfung. 200 m nördlich wurde auf Höhe 330 m ü. N. N. 20 m unterhalb der Kuppe 352 ein weiteres kleines Vorkommen beobachtet und ein ebensolches 10 m unterhalb der Höhe 350,1 an deren Südabfall. Das bereits von Hemmer (l. c., S. 23) erwähnte Vorkommen an der Folkringer Mühle besteht aus mehreren isolierten Flecken von Lehm mit Sand und Kieseln, die von Mangan- und Eisenhäuten überzogen sind. Dieselben gehören, soweit sie am Südabhang der Höhe 354,8 zwischen den Kurven 330 und 340 liegen, auch zum Pliocän. Die unterhalb der 310 m Kurve gelegenen müssen jedoch als jüngere, vielleicht abgeschwemmte Bildungen angesehen werden. Ein ausgedehnteres Vorkommen liegt im Südosten von Gogney auf der Höhe 339 und bildet die Fortsetzung der pliocänen Decke südlich Les Salières.

Aus der pliocänen Überdeckung des Sandholzes zwischen Hattingen und Ibingen werden bereits von L. v. Werveke hellgelbe bis weißliche Tone erwähnt, in denen Quarz- und Quarzitgerölle eingebettet sind (Hemmer, Untersuchungen über Oberflächengestaltung etc., l. c., S. 22). Neuerdings sind dort auch gelbe lehmige Kiese und Sande aufgeschlossen. — Weiter nördlich finden sich Vorkommnisse im Minièreholz und Hohen Holz bei Aspach und vielleicht ist auch die Überdeckung des oberen Muschelkalkes im Unterwald nordnordwestlich Saarburg hierher zu rechnen. Die Vorkommnisse deuten auf einen von Aspach ab gegen Nordosten gerichteten Strom hin, der sich unterhalb Saarburg wieder nach Nordwesten wandte und so das Flußgebiet der Vezouse im Pliocän mit dem der Saar verband (l. c., S. 22 und 23).

Nach den Angaben von Hemmer (l. c., S. 25—30) lassen sich gleichaltrige Bildungen weiter saarabwärts feststellen, die den heutigen Lauf der Saar bis Saargemünd begleiten und einen 80—100 m über dem Saarniveau gelegenen, gegen Norden geneigten alten Talboden kennzeichnen.

Diluviale Ablagerungen.

Die Verbreitung der an den Talhängen der Vezouse auftretenden diluvialen Ablagerungen ist im Vergleich zum Pliocän eine wesentlich geringere. Einige derselben mögen hier Erwähnung finden. Auf der rechten Talseite gegenüber von Haute Seille werden mehrere Meter mächtige, rot bis rotbraun gefärbte, 285 m ü. N. N. gelegene Sande und Kiese abgebaut. Die Kiesel bestehen vorwiegend aus Gangquarz sowie dunkelrot gefärbtem Quarzit und besitzen durchschnittlich Größen von 5 vereinzelt auch bis zu 15 cm. Außerdem wurden in nicht unwesentlicher Menge wenig abgerollte bis 25 cm dicke Buntsandsteingerölle beobachtet und kantige grobe Brocken von schwarzem Hornstein und Kieseloolith mit noch anhaftendem Kalk aus dem mittleren Muschelkalk. — Ein weiterer Aufschluß in diluvialen Schottern liegt auf dem linken Ufer der Vezouse westnordwestlich Cirey an der Nordostecke des des Quarts Waldes auf Höhe 305 m ü. N. N. Die über krinoidenführenden Dolomitbänken mit eingeschalteten bläulichen Tonmitteln lagernden, 4 m mächtigen Bildungen bestehen zu oberst aus rot bis rotbraun gefärbtem Sand, der nach unten zu sehr reich wird an Quarz und ungebleichten Quarzitkieseln, denen untergeordnet aus Triasgesteinen bestehende Gerölle beigemischt sind. Ähnliche Schotter liegen auch an dem von Blâmont zur Hauptstraße nach Frémonville führenden Wege nahe dem Bahnübergange 370 m ü. N. N.

Vereinzelte Bildungen, die zumeist nur aus wenig mächtigen Anhäufungen von Geröllen bestehen, finden sich zwischen Cirey und Tankonville. Dieselben sind stark verschwemmt und daher schwer zu umgrenzen. Die Höhe zwischen dem Herbas-Tal und der Straße Cirey-Haute Seille ist mehr oder minder reichlich bedeckt mit Kieseln. Die ungebleichten Quarzite treten hier unterhalb der 320 m Kurve in nahe Berührung mit dem Pliocän.

Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale dieser Ablagerungen sind gegenüber den pliocänen Schottern durch die un-

gebleichten (bunten) Quarzite gegeben und die rötliche Färbung des Sandes, die derjenigen des bunten Sandsteins entspricht. Außerdem durch die größere Menge der Trias- speziell Muschelkalkgerölle. Im allgemeinen erreichen die Kiesel auch größere Durchmesser und die mittleren Korngrößen von 2 bis 3 cm bilden einen wesentlicheren Bestand als beim Pliocän.

Gekennzeichnet sind die pliocänen Bildungen auch dadurch, daß dieselben auf einer fast ebenen Fläche abgelagert wurden und daher meist die Bergkuppen überziehen, während das Diluvium vorwiegend an schrägen Gehängeflächen anlagert.

Im Nordosten von Tankonville liegen unterhalb der 330 m Kurve Lehme mit Kies und Sand, die zum Diluvium zu stellen sind, jedoch lediglich abgeschwemmtes Pliocän bilden und mit diesem noch in Verbindung stehen. Dieselben reichen unterhalb Tankonville bis zur Höhe 300 m ü. N. N. herab. — Derartige diluviale Ablagerungen enthalten naturgemäß nur die Bestandteile des Pliocäns, besitzen jedoch einen wesentlicheren Lehmgehalt. Ebenfalls zum Diluvium sind kies- und sandhaltige Lehmvorkommnisse zu stellen, die bei Frémonville zwischen den Höhen 280 und 290 m ü. N. N. liegen und südlich der Vezouse an der Straße nach Harbouey auf der Höhe 280 m ü. N. N.

Zur Entstehung der pliocänen Bildungen.

Die Tone und Feinsande der pliocänen Ablagerungen sind als Absätze in ruhigem oder stehendem Wasser anzusehen. Die Feinsande wurden durch langsam fließendes Wasser aus dem Vogesengebiet verfrachtet. Die Tone entstammen vermutlich im wesentlichen Gesteinen der Muschelkalkformation, denen der Kalkgehalt durch die Verwitterung, insbesondere unter dem Einfluß humoser Wässer, entzogen wurde. — Auch die Bleichung der Feinsande und Tone, bei denen graue, grauweiße oder auch blendend weiße Färbungen vorherrschen — seltener trifft man hellgelbe oder braune Farbentöne an — deuten auf die Einwirkung von Humusstoffen hin.

Der Lagerung entsprechend finden sich am weitesten westlich auf der Höhe von Les Salières die reinsten Tone, die wenig Kies- und Sandeinlagerungen enthalten und nur vereinzelt in tonige Feinsande übergehen. Nördlich Tankonville nehmen die feinsandigen Bildungen an Verbreitung zu und auch die Tone enthalten sandige Beimengungen. Am Vogesenrande herrschen die feinsandigen Sedimente vor und im Vogesengebiete am Guindrimont fehlen Tone so gut wie ganz.

Die oben erwähnten weißen, vollkommen ausgebleichten und zermürbten Kieselknollen im Haye Vauthier Wald an der Höhe südlich Les Salières (s. S. 234) entstammen vermutlich dem oberen Muschelkalk — sowohl der Trochitenkalk wie auch die *Semipartitus*-Schichten und die Dolomitische Region führen ähnliche Hornsteinknauer. — Da dieselben keinerlei Abrollungserscheinungen zeigen und in sandfreiem Ton eingebettet sind, erklärt sich ihre Verfrachtung — nach einer von Herrn W. Spitz geäußerten Ansicht — am einfachsten durch Eistransport.

Auf dieselbe Weise gelangten die Kiesellumachellen von Tankonville (s. S. 236) in den Ton. Diese letzteren sind völlig identisch mit Vorkommnissen, die in den untersten *Semipartitus*-Schichten mehrfach angetroffen wurden.

Auch die vereinzelt im sandfreien Ton auftretenden wallnußgroßen, weißen Quarzkiesel können ebenso verfrachtet sein, sofern dieselben nicht aus der überlagernden Schotterdecke stammen und in dem weichen Tonschlick untergesunken sind.

Die den wesentlichsten Bestandteil der pliocänen Decke ausmachenden Kiese und Sande, welche gegen die tonigen und feinsandigen Bildungen häufig scharfe Grenzen erkennen lassen, bilden typische Flußabsätze. Der schnelle Wechsel ihrer Zusammensetzung — geröllreiche und arme Lagen oder Sande, sowie lehmfreie und lehmige Partien sind oft wirr durcheinander gelagert — deuten auf bewegtes Wasser hin.

Das Material der Schotter zeigt im wesentlichen dasselbe Korngrößen- und Mischungsverhältnis wie das Hauptkonglomerat, dessen zu festem Fels verkittete Bänke alle Übergänge

erkennen lassen zwischen solchen, die sich — bei zurücktretendem Sandgehalt — vorwiegend aus groben Kieseln (Quarz, Quarzit, Kieselschiefer etc.) zusammensetzen und anderen mit vorherrschendem Sandgehalt, in dem nur vereinzelte Kiesel eingebettet sind. Mittlere Korngrößen bilden auch hier nur einen unwesentlichen Bestandteil. Fast $^2/_3$ des gesamten Materials bestehen ähnlich wie bei den pliocänen Schottern aus sandigen Komponenten.

Hierdurch wird man zu der Annahme geführt, daß die Ablagerungen des Hauptkonglomerates, die jetzt nur einzelne Bergkämme und Kuppen einnehmen, vor dem Einsetzen der pliocänen Erosionsphase über weite Gebiete die Oberfläche bildeten und dadurch der Abtragung in viel weitergehendem Maße zugänglich waren.

Die tiefgründige Verwitterung führte unter Mitwirkung von Humusstoffen zur Eisenentziehung und mehr oder minder starken Auflockerung der Schichten. Diese aufgelockerte und gebleichte Hauptkonglomeratkruste[1]) lieferte vorwiegend das Material für die Schotter, die untermischt wurden mit ebenso gebleichten jüngeren Schichten des oberen Buntsandsteins und mit dem Verwitterungslehm der vorpliocänen Muschelkalkoberfläche.

Über die präpliocäne geologische Geschichte, insbesondere über den Verbleib der vor dem Pliocän abgeräumten Schichten finden sich in dem Gebiet keinerlei Anhaltspunkte.

Jedenfalls ist vor dem Pliocän eine längere Landperiode anzunehmen, in der durch die Flußerosion eine Landschaft im greisenhaften Stadium geschaffen wurde mit stark verwitterter Oberfläche.

Im Pliocän gelangten auf dieser Triasfastebene in stehendem oder kaum bewegtem Wasser zuerst vorwiegend Tone und

[1]) Reste dieser Kruste finden sich am Basse Guindrimont. Unter dem Pliocän ist hier das zu losem Kies und Sand aufgelockerte Hauptkonglomerat bis zu einer Tiefe von 2—3 m gelb oder gelbgrau gefärbt und enthält lediglich gebleichte Kiesel (nur bei den schwarzen Kieselschiefergeröllen ist die Farbe erhalten geblieben). Ein ebensolcher Erosionsrest wurde auch bei La Boulaie erschürft.

Feinsande zum Absatz, deren Bildung vereinzelt bei allmählichem Zurücktreten des Wassers mit der Ausscheidung von Toneisenerz endigte, das sich nach Art der in der Jetztzeit entstehenden Raseneisenerze in flachen humosen Wasserbecken bildete, die von Vegetation umgeben waren, wie die im Erz in großer Menge eingeschlossenen Blätter anzeigen. Seltener kam es zur Ablagerung von groben kiesführenden Sanden. Schwache Heraushebungen im Vogesengebiet führten dann zur Belebung der Erosion. Die Flußtätigkeit wirkte im Vogesengebiete flächenhaft abtragend und aufhäufend im Muschelkalkvorland. Durch breite Ströme wurde die leicht erodierbare, aufgelockerte und gebleichte Verwitterungskruste des Hauptkonglomerates abgeräumt und weite Gebiete mit Schotterablagerungen überschüttet. Toniges Material kam innerhalb der Schotter nur vereinzelt in Form von mehr oder minder mächtigen Tonlagen und -Knollen an ruhigeren Stellen zum Absatz.

Im Gegensatz dazu ging der Ablagerung des Diluviums eine Tiefenerosion voraus[1]), deren Ursache in den weiter unten näher zu besprechenden postpliocänen Heraushebungen zu suchen ist, die starkes überschüssiges Gefälle der Flüsse bedingten. Die durch die Vergletscherung der Vogesen hervorgerufene Zunahme der Wassermenge begünstigte außerdem die Ausfurchung der breiten Talrinnen, an deren Hängen die ungebleichtes Buntsandsteinmaterial, kantige Muschelkalkgesteine und abgeschwemmtes Pliocän führenden diluvialen Bildungen zum Absatz gelangten.

Untersuchungen über die tektonischen Verhältnisse.

Die pliocänen Ablagerungen ruhen in dem Gebiet, welches die tektonische Übersichtskarte dargestellt auf der Abrasionsfläche der schwach geneigten Schichten des oberen Buntsandsteins und des Muschelkalkes.

[1]) Auch die Sande und Kiese am Basse Guindrimont wurden 50 m über dem jetzigen Talniveau bereits in einer breiten flachen Talfurche — dem pliocänen Saussenrupttale — abgelagert.

Die Buntsandsteinschichten des Vogesengebietes bilden eine nordnordöstlich streichende und gleichförmig gegen Westnordwesten einfallende Schichtenplatte, über der im Randgebiet der Vogesen die ebenso gelagerten, etwas flacher geneigten Muschelsandsteinschichten folgen. — An der Grenze gegen den mittleren Muschelkalk, dessen Einfallen sich mehr und mehr verflacht, und bei Tankonville sind die Schichten von mehreren Verwerfungen zerrissen, die im Zusammenhang mit der pliocänen Überdeckung noch eingehend besprochen werden sollen.

Weiter westlich treten im Gebiet des oberen Muschelkalkes an die Stelle der gleichförmig einfallenden, nur wenig verbogenen Schichten gut ausgeprägte, flache Faltungen. Der Neigungswinkel der Schichten bleibt hier jedoch stets wesentlich hinter dem im Vogesengebiete zurück.

Eine westnordwestlich streichende, flache Aufwölbung findet sich in den Schichten des oberen Muschelkalkes südlich Reichental, an die sich im Haye-Vauthier Bach südlich Deutschenhag eine ebenso streichende muldenförmige Einbiegung anschließt.

Weiter südlich bildet der obere Muschelkalk an der Höhe 362 im Haye-Vauthier Wald bei Les Salières ein kuppelförmiges flaches Gewölbe, dessen Schichten allseitig flach abfallen und dessen Scheitel der höchsten Erhebung des Berges entspricht. Gegen Schloßweinberg zu biegen sich die Schichten wieder flach muldenförmig auf. — Klarer noch ist an der Höhe südöstlich von Folkringen der domförmige Bau ausgeprägt, dessen Längserstreckung bei nördlicher Neigung der Sattelachse in nordsüdlicher Richtung, also senkrecht zum Streichen der Falten bei Deutschenhag, verläuft. Einen ähnlichen, nordsüdlich gestreckten umlaufenden Sattelbau zeigen auch die Schichten des Höhenzuges westlich vom Folkringer Bach.

Die drei kuppelförmigen Gewölbe werden im Süden von einer Ostwestverwerfung begrenzt, die durch Gogney verläuft und gegen Frémonville weiterzieht.

An das kuppelförmige Gewölbe der Höhe 362 südlich Les Salières schließt sich im Südwesten der Störung eine flache westnordwestlich streichende Mulde, deren Kern die tieferen

Semipartitus-Schichten bilden. Infolge der gegen Westnordwesten gerichteten kräftigen Neigung der Muldenachse tauchen die oberhalb Frémonville zwischen 310 und 320 m ü. N. N. gelegenen Trochitenkalke südlich Gogney bereits unter die Talsohle und das Ostufer des Voise-Baches besteht vollständig aus *Compressus*-Schichten.

Im Westen wird die Mulde von einer im Voise-Bache verlaufenden Störung begrenzt, die im Norden an der Verwerfung von Gogney endigt und im Süden auf eine Störung trifft, die im unteren Erbiset-Bache entlang zieht. Die von diesen drei Störungen eingeschlossene Scholle bildet eine südwestlich geneigte, schwach muldenförmig eingebogene, aus dolomitischer Region bestehende Platte, deren oberster Teil von Lettenkohle gekrönt ist und an deren stark geböschtem Südost- und Nordostrande *Semipartitus*-, Nieren- und Knollenkalk- sowie Plattenkalkschichten[1]) erscheinen.

(Am rechten Talhang des Erbiset-Baches verläuft noch eine weitere Nordwestverwerfung. Zwischen dieser und der Erbisetbachstörung ist ein schmaler Schichtstreifen grabenförmig eingesunken.)

Das Gebiet bei Gogney wird also durch die Verwerfungen in mehrere Schollen zerlegt, die sich in bezug auf Faltung und Faltungsrichtung recht verschiedenartig verhalten. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung durch die von L. v. Werveke[2]) geäußerte Ansicht, daß Faltung und Spaltenbildung in der Lothringischen Hochebene im engsten Zusammenhang stehen. Die Verwerfungen durchschneiden kein fertig gefaltetes Gebirge, sondern rissen gleichzeitig mit der Faltung auf, so daß die an den Störungen zusammenstoßenden Schollen sich verschiedenartig und unabhängig voneinander bewegen konnten.

[1]) Zur Gliederung des oberen Muschelkalkes in Lothringen. Zeitschrift d. D. Geol. Gesellschaft, 1919, S. 104.

[2]) Die Entstehung des Rheintales und der mittelrheinischen Gebirge. Mitt. d. Ges. für Erdkunde und Kolonialwesen. Straßburg i. E. 1913, 4. Heft, S. 36 u. a. a. O.

Tektonische Verlagerungen der pliocänen Vorkommnisse.

Für die genauere zeitliche Festlegung der Gebirgsbewegungen vor dem Pliocän fehlen in dem Gebiete alle Anhaltspunkte. Die Ablagerungen dieser Periode liefern jedoch Beweise, daß die tektonischen Bewegungen an manchen Stellen noch nach der Pliocänzeit weiter wirkten.

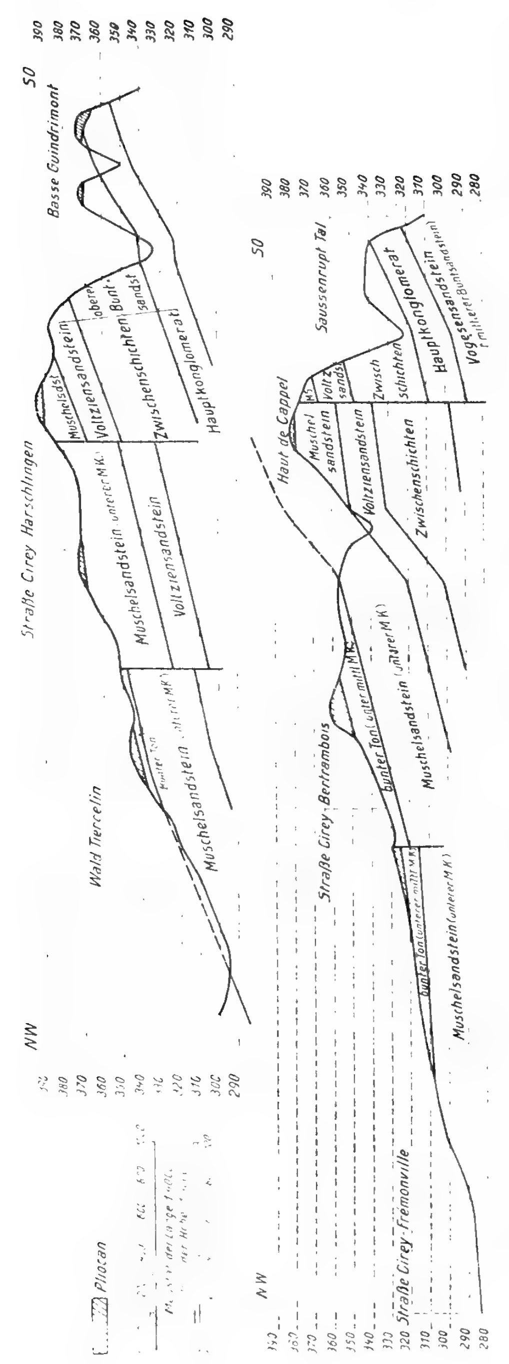
Die verschiedenen Höhenlagen von Schottervorkommnissen zwischen Reichental, Petitmont und Bréménil führten bereits v. Werveke zu dem Schluß, daß nach Ablagerung des Pliocäns noch Heraushebungen stattgefunden hätten, von denen die einzelnen Lagen ungleichmäßig betroffen wurden. (Hemmer, Unters. über Oberflächengest. etc., l. c., S. 3 und 24.) Auch für die Bildung der heutigen Wasserscheiden zwischen Saar und Vezouse werden tektonische Ursachen angenommen.

Genauere Nachweise über derartige junge tektonische Vorgänge ließen sich im Gebiet der nahe zusammengelegenen Vorkommnisse zwischen dem Harschlinger Wald und Cirey erbringen, sowie an der ausgedehnten Pliocändecke zwischen Reichental und Tankonville.

Am stärksten machen sich diese postpliocänen tektonischen Bewegungen am Vogesenrande bemerkbar, bei den zwischen dem Harschlinger Wald und Cirey gelegenen Vorkommnissen, deren ursprünglicher Zusammenhang nicht zu verkennen ist.

Die höchste Lage erreicht die östlichste Pliocänscholle im Nordosten von Cirey an der Straße nach Harschlingen auf der Höhe 390 im Nordteil des Haut de Cappel. Gegen Westen zu verringert sich das Niveau der Auflagerungsflächen mehr und mehr, so daß das 1 km nördlich Cirey gelegene westlichste Vorkommen die tiefste Lage von 320 m ü. N. N. einnimmt. (Die sich an den Talhängen der Vezouse zwischen Cirey und Blâmont tiefer als 320 m vorfindenden Schotter sind ihrer Zusammensetzung und Ausbildung nach jünger als Pliocän.)

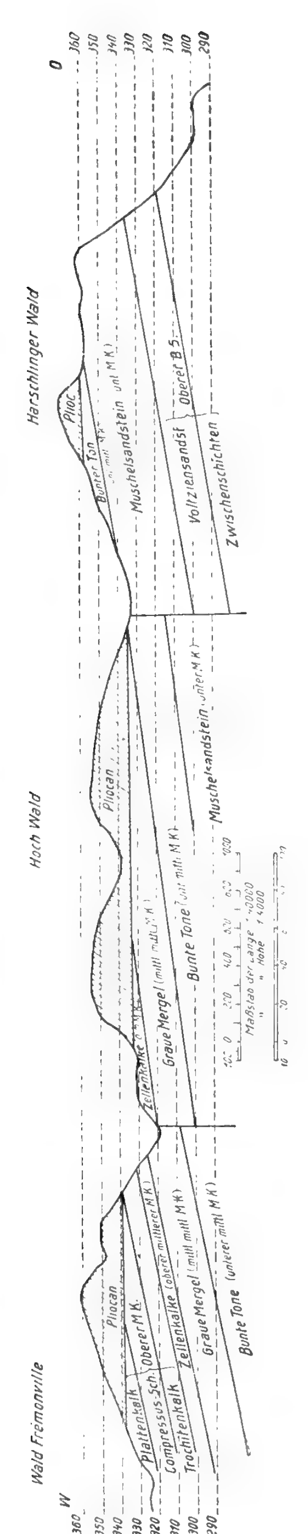
Diese Unterschiede der Höhenlagen finden zum Teil ihre Erklärung darin, daß das westnordwestlich gerichtete



Einfallen der Triasschichten auch bei der pliocänen Decke in mehr oder minder starkem Maße wahrnehmbar wird.

Besonders deutlich zeigt dies der langgestreckte Pliocänstreifen, der im Rond Buisson auf der Höhe 380 beginnt und in den Schloßpark bis zur Kurve 345 hinunterreicht. Meist ist die westnordwestliche Neigung jedoch nur schwach angedeutet.

Vorwiegend finden sich die Unterschiede in bezug auf die Höhe der Auflagerungsflächen vom Pliocän zu beiden Seiten von mehreren die Schichten durchziehenden Verwerfungen und sind durch Bewegungen an denselben bedingt. Diese Schichtenverlagerungen brachten ebenfalls stets die westlicheren Schollen in ein tieferes Niveau. Eine profilmäßige Darstellung der Lagerungs-



verhältnisse läßt klar erkennen, daß keine Anzeichen für verschiedenaltrige Bewegungen an den Spalten vorliegen, sondern daß die Pliocänschollen um denselben Betrag verworfen wurden wie die unterlagernden triassischen Sedimente.

Eine dieser Verwerfungen verläuft mit nordsüdlicher Richtung westlich der höchstgelegenen Scholle (390 m ü. N. N.) durch den Haut de Cappel und den Rond Buisson. Die Sprunghöhe beträgt in den Schichten des oberen Buntsandsteins am rechten Hang des Saussenrupttales etwa 10 m. Westlich der Verwerfung findet sich im Haut de Cappel ein wenig ausgedehntes, um 10 m tiefer liegendes Vorkommen auf der Kurve 380. Der bereits erwähnte, langgestreckte Pliocänstreifen im Schloßpark wird im Osten von dieser Störung begrenzt und an derselben ebenfalls in eine um 10 m tiefere Lage gebracht.

Eine weitere südnördlich gerichtete Verwerfung mit tiefer liegender, westlicher Scholle verläuft am Ostrande des Pré vert Waldes und trifft nördlich der Straßenkreuzung beim Punkte 373 mit einer Nordweststörung zusammen. In dem spitzen Winkel, den beide miteinander bilden, findet sich das Pliocänvorkommen östlich vom Tiercelin Wald, welches eine 340 m hoch gelegene, flache Kuppe überzieht. Die Sprunghöhe der Nordsüdstörung läßt sich

zwischen buntem Ton und Muschelsandstein auf etwa 20 m bestimmen und um dieselbe Höhe liegt auch das erwähnte Vorkommen tiefer als die Auflagerungsfläche des auf der Höhe 373 an der Straße nach Bertrambois anstehenden Pliocäns.

Die Verwerfung zieht in nördlicher Richtung zwischen buntem Ton und Muschelsandstein weiter durch den Sapinot Wald gegen Hattingen zu, die Sprunghöhe von 20 m beibehaltend. Östlich derselben findet sich im Harschlinger Wald ein Streifen Pliocän, dessen schwach westlich geneigte Auflagerungsfläche auf der Höhe 355—360 liegt, während sich westlich der Störung die Basis vom Pliocän des Hochwaldes zwischen den Kurven 330 und 335 festlegen ließ. Verlängert man die Auflagerungsfläche im Harschlinger Wald bis an die Störung, so ergibt sich dieselbe Sprunghöhe von 20 m wie in den unterlagernden Triasschichten.

Die tiefe Lage (320 m ü. N. N.) des Pliocänvorkommens nördlich Cirey gegenüber der höher gelegenen Überdeckung im Schloßpark (350 m ü. N. N.) ist in erster Linie bedingt durch die nordwestliche Neigung der Auflagerungsfläche. Außerdem schneidet am Ostrande eine Nordsüdverwerfung durch, welche die Triasschichten um dieselbe Höhe von 5 m verwirft wie das Pliocän.

Die ihrer Ausbildung und Zusammensetzung nach zum Pliocän gehörigen Kiese und Sande auf den beiden Kuppen des Basse Guindrimont lassen sich mit den Vorkommnissen am Haut de Cappel in keinen direkten Zusammenhang bringen, da ihre tiefere Lage (370 m ü. N. N.) nicht tektonisch erklärt werden kann. Dieselben müssen als eine jüngere Terrasse gedeutet werden, die auf einer bereits tiefer gelegten Erosionsbasis zur Ablagerung kam.

Bei der ausgedehnten Pliocändecke zwischen Tankonville und Reichental erreichen die Höhenunterschiede kein so großes Maß wie am Rande der Vogesen. Dieselben schwanken lediglich zwischen 330 und 350 m ü. N. N.

Östlich von Tankonville verläuft in den Schichten des mittleren Muschelkalkes eine Nordweststörung, an der die öst-

lichen Schichten in eine um etwa 10 m tiefere Lage kamen. Die Pliocändecke des Hochwaldes lagert, soweit aus den Aufschlüssen festzustellen ist, auf einer kaum merklich westlich geneigten ebenen Fläche. In der flachen Talmulde nördlich Tankonville finden sich östlich der Störung nahe derselben Aufschlüsse im pliocänen Kies und Sand unterhalb der Kurve 330. Westlich der Störung tritt zwischen den Kurven 330 und 340 der Trochitenkalk zutage aus, die Überdeckung ist erst oberhalb der 340 m Kurve auf den *Compressus*-Schichten wieder wahrnehmbar. Die Störung hat also die pliocäne Decke um denselben Betrag und in demselben Sinne verworfen wie den mittleren Muschelkalk.

Weiter gegen Südwesten erreicht die Auflagerungsfläche westlich des Kirchhofes von Tankonville eine Höhe von 350 m ü. N. N., während dieselbe nördlich Schloßweinberg wieder auf 330 m ü. N. N. herabsinkt. Obgleich die vorhandenen Aufschlüsse keine ganz sichere Kartierung zulassen, können diese Höhenunterschiede mit einer östlich Schloßweinberg verlaufenden Verwerfung in Zusammenhang gebracht werden, die in den Schichten des oberen Muschelkalkes eine Sprunghöhe von 10 m besitzt.

Auffallende Höhenunterschiede der Auflagerungsfläche vom Pliocän finden sich an der Höhe 362 zwischen Les Salières und Frémonville. Zahlreiche künstliche Aufschlüsse ermöglichten hier die Feststellung, daß sich die pliocäne Überdeckung der kuppelförmigen Aufsattelung des oberen Muschelkalkes haubenförmig anschmiegt.

Auf der südöstlichen Kuppe liegt die Überdeckung des Pliocäns auf den *Semipartitus*-Schichten in einer Höhe von 350 m. In dem nach Nordosten hinunter führenden Bache erscheint diese Grenze 20 m tiefer auf der Kurve 330. An dem flachen Abfall der Höhe gegen Südosten konnte mit Hilfe einer großen Zahl künstlicher Aufschlüsse festgestellt werden, daß die *Semipartitus*-Schichten und die überlagernden pliocänen Tone sich allmählich mit der Gehängeböschung mehr und mehr neigen. 1300 m südöstlich der Höhe 362 liegt die Auflage-

rungsfläche etwas über 330 m ü. N. N. Am Nordwestabhang der Kuppe wurde die Überlagerungsfläche auf 345 und am Südwestabhang auf 335—340 m ü. N. N. festgelegt.

Die pliocäne Decke fällt also ebenso wie die Schichten des oberen Muschelkalkes nach allen Seiten flach ab (s. S. 249). Diese Verhältnisse, insbesondere der enge Zusammenhang der Lagerung von Muschelkalk und Pliocän führen zu dem Ergebnis, daß hier die pliocänen Ablagerungen in dem gleichen Maße wie der obere Muschelkalk mitgefaltet wurden.

Im Hochwalde und im Blâmont Wald bis gegen Deutschenhag schwankt die Höhe der Auflagerungsfläche zwischen 330 und 340 m ü. N. N. — Auf Grund der vorhandenen Aufschlüsse lassen sich keine Höhenunterschiede festlegen, die auf tektonische Verlagerungen zurückgeführt werden könnten. — Da die auf Höhe 360 m ü. N. N. etwa 700 m nördlich Baracke gelegenen Aufschlüsse die Muschelkalkunterlage nicht erreichen, muß es zweifelhaft bleiben, ob diese hohe Lage gegenüber den benachbarten Aufschlüssen bei Baracke und südwestlich des Hattinger Weihers (330—335 m ü. N. N.) durch Aufwölbung erklärt werden kann, oder ob die pliocänen Ablagerungen hier Mächtigkeiten von 25—30 m wie im Hochwalde erreichen. — Westnordwestliches Einfallen mit etwa 10° lassen die Schotter in der Kiesgrube bei Baracke an den eingeschalteten Sand- und Tonlagen erkennen.

Die Beobachtungen führen zu dem Resultat, daß in dem untersuchten Gebiet die tektonischen Prozesse im wesentlichen vor der Ablagerung des Pliocäns ihren Abschluß fanden. Stellenweise überdauerten jedoch die Gebirgsbewegungen das Pliocän und gaben auch den Bildungen dieser Periode schwache Neigungswinkel. Außerdem ließen sich mehrere Verwerfungen nachweisen, die im Zusammenhang mit dem postpliocänen Ausklingen der Faltung aufrissen. Diese jungen Bewegungen wirkten in dem gleichen Sinne wie die präpliocänen, so daß sich die Lagerung des Pliocäns dem tektonischen Bauplan des Gebietes einfügt.

Hauptsächlich fanden am Vogesenrande an Spalten und durch stärkere Neigung der Schichten noch nach dem Pliocän fortdauernde Heraushebungen statt, die das Ansteigen der pliocänen Schollen gegen die Vogesen zu bewirkten.

Gleicht man die tektonisch entstandenen Höhenunterschiede der pliocänen Auflagerungsflächen aus, so lassen die geringen Niveaudifferenzen erkennen, daß die Pliocänbildungen auf einem fast ebenen Relief zum Absatz gelangten.

Klar hervortretend sind die nahen Beziehungen zwischen der jetzigen Oberflächengestaltung und dem tektonischen Aufbau. — Der Neigungswinkel der flachen Talhänge folgt meist dem Einfallen der Schichten und die Bergformen entsprechen dem Faltenbild der dieselben aufbauenden Sedimente — insbesondere tritt dies bei den länglichen oder rundlichen, allseitig abfallenden Gewölben in die Erscheinung. Ferner liegen die breiten Talmulden meist in tektonischen Einbiegungen oder der Verlauf der Täler ist durch Verwerfungen vorgezeichnet, die sich stellenweise auch morphologisch deutlich abheben.

Diese Zusammenhänge mögen einerseits ihre Erklärung durch das präpliocäne Relief finden, deren schwach erhalten gebliebene Formen der nachpliocänen Erosion den Weg vorschrieben. Andererseits können auch die nachwirkenden Gebirgsbewegungen, die noch während dieser Erosionsperiode andauerten, für die Gestaltung der heutigen Oberfläche mitbestimmend gewesen sein.

Folkringen
Reichental
Schl Risholz
Frackelfingen
Niederhof
Haltingen
Zoll-Amt
Deutschenhag
Haltinger Weiher
Haye-Vauthier
Blâmont Wald
Harschlinger-Wald
les Salières
Gogney
Foulcrey-B.
Voise-B.
Vauthier B.
Haye-Vauthier Wald
Fremonville Wald
Gutshof
Hoch-Wald
Baracke
Chenois-Wald
Tanconville
Khf.
Pransieux Wald
Sapinot-Wald
Bertrambois
Schloßweinberg
Fremonville
la Forêt
Großer Teich
Schisel-B.
Blâmont
Hte Seille
Tiercelin-Wald
Préverl-Wald
Rond-Buisson
Harschlingen
Zoll-Amt
Vezouse
Gresson-B.
des Quarts Wald
Cirey sur Vezouse
Haut de Cappel
Bse Guindrimont
Saussenrupt-Bach
Schl. Chatillon
Saussenrupt
Vezouse
Val-et Chatillon
Kl Schl.
S.W.
S.W.

1000 0 1000 2000 3000 Meter

Tektonische Übersichtskarte.

Pliocäne Ablagerungen

Diluviale Ablagerungen

Verwerfungen.

300 Streichlinien

Die den Streichlinien beigefügten Zahlen beziehen sich auf die Grenze des Trochitenkalkes gegen die Compressus-Schichten die mit einem H versehenen im östlichen Teil der Karte beziehen sich auf die Grenze des Hauptkonglomerates gegen die Zwischenschichten. Sie geben die Höhenlagen dieser Grenzen in Metern über N. N. an. Die gestrichelten Streichlinien beziehen sich auf die Auflagerungsfläche vom Pliocän, ebenso auch die der Pliocängrenze beigefügten Zahlen.



Über die Weingartenschen Flächen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Bekanntlich hat Weingarten gelehrt, wie man auf einer beliebigen Fläche Parameter einführen kann, die zu Systemen sogenannter „konfokaler Ellipsen und Hyperbeln" gehören, d. h. zu Kurven, für welche die Summe oder die Differenz der geodätischen Entfernungen ihrer Punkte von zwei willkürlich auf der Fläche gewählten festen Kurven (oder Punkten) konstant ist. Indem er solche Kurvensysteme auf der Kugel konstruierte und als das sphärische Bild der Krümmungskurven einer Fläche betrachtete, gelang es ihm, alle Flächen zu bestimmen, zwischen deren Krümmungsradien die Relation

$$2(\varrho'' - \varrho') = \sin(2\varrho' + 2\varrho'')$$

erfüllt ist. Im folgenden soll dieser Gedanke dadurch verallgemeinert werden, daß die geodätischen Entfernungen des bewegten Punktes von den beiden festen Kurven nicht senkrecht zu diesen, sondern unter konstantem Winkel gegen dieselben gemessen werden. Es ergeben sich dann ganz analoge Rechnungen, und die entstehenden Flächen sind zu den durch obige Relation charakterisierten Flächen ähnlich.

1. Auf einer beliebigen Fläche bestimmen wir einen Punkt durch eine Schar von geodätischen Linien $\sigma =$ Konst. und durch die Schar von Kurven $u =$ Konst., welche diese Linien

[1]) Crelles Journal, Bd. 62, 1863.

unter konstantem Winkel w schneiden; dann ist das Quadrat des Linienelementes ds von der Form

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + 2m\cos w\, du\, d\sigma + m^2 d\sigma^2,$$

wo m eine Funktion von u allein ist. Wird derselbe Punkt durch eine andere Schar von geodätischen Linien $\tau =$ Konst. und deren Trajektorien unter dem Winkel w' ($v =$ Konst.) bestimmt, so ist auch

$$(2) \qquad ds^2 = dv^2 + 2n\cos w'\, dv\, d\tau + n^2 d\tau^2,$$

wo n eine Funktion von v allein ist. Führt man endlich die Parameter u und v ein, so werde

$$(3) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

wo E, F, G Funktionen von u und v bedeuten. Es sei ferner

$$(4) \qquad dv = \alpha\, du + \beta\, d\sigma,$$

dann wird:

$$ds^2 - du^2 = (E - 1 + 2F\alpha + G\alpha^2)\, du^2 + 2(F\beta + G\alpha\beta)\, du\, d\sigma + \beta^2 G\, d\sigma^2 = 2m\cos w\, du\, d\sigma + m^2 d\sigma^2.$$

Es ergibt sich also:

$$E + 2F\alpha + G\alpha^2 = 1,$$
$$\beta(F + \alpha G) = m \cdot \cos w, \quad \beta^2 G = m^2,$$

und hieraus:

$$F + \alpha G = \cos w \sqrt{G},$$
$$(5) \qquad EG - F^2 = G \cdot \sin^2 w.$$

In analoger Weise wird die Transformation des Linienelements von der Form (2) auf die Form (3) durch den Ansatz

$$(6) \qquad du = \gamma\, dv + \delta\, d\tau$$

vermittelt; und dann ergibt sich

$$(7) \qquad EG - F^2 = E \cdot \sin^2 w'.$$

Sei zur Abkürzung

$$a^2 = \sin^2 w, \quad b^2 = \sin^2 w',$$

so erhalten wir aus (3), (5) und (7), da $aG = bE$:

$$ds^2 \cdot a^2 = E(a^2 du^2 + b^2 dv^2) + 2ab\sqrt{E(E-a)}\,du\,dv$$

und mittels der Transformation

$$du = b(dp + dq), \quad dv = a(dp - dq), \tag{8}$$

weiter:

$$ds^2 = 2b^2[(E + \sqrt{E}\sqrt{E - a^4})dp^2 + (E - \sqrt{E}\sqrt{E - a^2})dq^2]$$
$$= 2a^2[(G + \sqrt{G}\sqrt{G - b^2})dp^2 + (G - \sqrt{G}\sqrt{G - b^2})dq^2].$$

Die durch (8) definierten Kurven $p =$ Konst. und $q =$ Konst. ergeben also auf einer beliebigen Fläche ein System von Parameterkurven, durch welche das Quadrat des Linienelementes die Form

$$ds^2 = e\,dp^2 + g\,dq^2 \tag{9}$$

annimmt, wobei zwischen e und g die Relationen bestehen:

$$e + g = 2b^2 E, \quad eg = 4b^4 a^2 E,$$

also auch

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{g} = a^2 b^2. \tag{10}$$

Führt man neue Variable p', q' durch die Gleichungen

$$p' = pab, \quad q' = qab$$

ein und gehen e und g dadurch in e' und g' über, so wird die Relation (10):

$$\frac{1}{e'} + \frac{1}{g'} = 1. \tag{11}$$

Das Kurvensystem $p =$ Konst., $q =$ Konst. ist also nicht wesentlich verschieden von dem System, das Weingarten eingeführt hat und bei dem $a = b = 1$ war.

2. Im allgemeinen ist es in der Flächentheorie unwesentlich, ob man statt der Parameter p und q Funktionen von p bzw. q als neue Variable einführt. Betrachtet man aber e

und g als Fundamentalgrößen des sphärischen Bildes einer Fläche und will man von diesem Bilde nach Weingartner zu der Fläche selbst übergehen, so können sich aus demselben Kurvensysteme der Bildkurven verschiedene (wenn auch einander verwandte) Flächen ergeben, wenn man die Parameter p, q in angegebener Weise transformiert.

Bei den Minimalflächen tritt dies noch nicht hervor. Sind p, q die Parameter der Bildkurven der Krümmungslinien, so sind die Flächen durch die Gleichung $e = g$ charakterisiert. Geht man statt dessen von der allgemeineren Gleichung

$$(12)\qquad e = a^2 g$$

aus, wo a eine Konstante bedeutet, und setzt mit Weingarten

$$(13)\qquad e = \frac{1}{k^2}, \quad g = \frac{1}{\theta'(k)^2},$$

so werden bekanntlich die Hauptkrümmungs-Halbmesser ϱ' und ϱ'' der betreffenden Fläche

$$(13\text{a})\qquad \varrho' = \theta(k), \quad \varrho'' = \theta(k) - k\theta'(k),$$

und aus (12) folgt:

$$\varrho' = \theta = \tfrac{1}{2} a k^2 + C, \quad \varrho'' = C - \tfrac{1}{2} a k^2,$$

also:

$$\varrho' + \varrho'' = C;$$

d. h. es ergeben sich die Parallelflächen der Minimalflächen, und der Konstanten a kommt keine wesentliche Bedeutung zu.

Für Flächen konstanten Krümmungsmaßes ($= a^2$) ist bekanntlich

$$(14)\qquad e = g + a^2.$$

Schreiben wir αp statt p und βq statt q, so haben wir allgemein

$$\alpha^2 e = \beta^2 g + a^2$$

Die Gleichungen (13) und (13a) ergeben dann

$$\varrho' = C - \frac{\beta}{a^2}\sqrt{a^2 - a^2 k^2}, \quad \varrho'' = C - \frac{a^2\beta}{\sqrt{a^2 - a^2 k^2}}$$

$$(\varrho' - C)(\varrho'' - C) = \frac{a^2\beta^2}{a^2},$$

d. h. eine Parallelfläche zur Fläche mit dem Krümmungsmaß $a^2\beta^2 a^{-2}$, und das Linienelement der einen Schale der Evolutenfläche ergibt

$$(15)\quad d\sigma^2 = \theta'^2 dk^2 + k^2 dq^2 = [1 + F'(r)^2]\,dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

wenn $k = mr$, $mq = \varphi$ gewählt wird, wo m eine willkürliche Konstante bedeutet. Diese Fläche ist auf die Rotationsfläche

$$(16)\qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = F(r)$$

abwickelbar, und man findet:

$$(17)\qquad F(r) = \int\sqrt{\frac{m^2 r^2 (m^2\beta^2 - a^2) - a^2}{a^2 - m^2 a^2 r^2}}\cdot dr.$$

Die Flächen vom Krümmungsmaße $a^2\beta^2 a^{-2}$ sind ähnlich den Flächen vom Krümmungsmaße a^{-2}. Auch die zugehörigen Schalen der Evolutenflächen müssen daher einander ähnlich sein, und folglich auch die Rotationsflächen, auf welche diese Schalen abwickelbar sind. In der Tat geht die durch die Gleichungen (16) und (17) dargestellte Rotationsfläche durch die Substitution

$$m = \frac{n}{\beta}, \quad r = \varrho a\beta, \quad x = \xi a\beta, \quad y = \eta a\beta, \quad z = \zeta a\beta$$

in die Fläche:

$$\xi = \varrho\cos\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\varphi, \quad \zeta = f(\varrho), \text{ wo}$$

$$f(\varrho) = \int\sqrt{\frac{n^2\varrho^2(n^2 - a^2) - 1}{1 - n^2\varrho^2}}\,d\varrho$$

über, d. h. in eine Fläche, welche dem Falle $a\beta = 1$ entspricht.

3. Zu der in Nr. 1 begonnenen Betrachtung zurückkehrend, schreiben wir die Gleichung (10) in der allgemeineren Form

$$\frac{\alpha^2}{e} + \frac{\beta^2}{g} = \gamma^2. \tag{18}$$

Dann wird zufolge (13):

$$\alpha^2 k^2 + \beta^2 \theta'(k)^2 = \gamma^2,$$

also, wenn C eine Integrationskonstante bedeutet:

$$\varrho' = \theta(k) = C + \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta}\left[\frac{\alpha}{\gamma} k \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{\gamma^2}} + \arcsin\frac{\alpha k}{\gamma}\right]$$

$$\varrho'' = \theta - k\theta' = C + \frac{\gamma^2}{2\alpha\beta}\left[\arcsin\frac{\alpha k}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma} k \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 k^2}{\gamma^2}}\right].$$

Zwischen den Hauptkrümmungsradien der Fläche, deren sphärisches Bild durch die Gleichung (18) charakterisiert ist, besteht somit die Relation:

$$\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}(\varrho' - \varrho'') = \sin\left(C' + \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}(\varrho' + \varrho'')\right).$$

Die Fläche ist also eine Parallelfläche zu der Fläche, für welche die Relation

$$(\varrho' - \varrho'')a^2 = \sin(a^2(\varrho' + \varrho'')), \quad \text{wo: } a^2 = \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} \tag{19}$$

erfüllt ist. Um die Rotationsflächen (16) zu finden, auf welche der eine Mantel der Evolutenfläche abwickelbar ist, haben wir wieder

$$k = mr, \quad 1 + F'(r)^2 = m^2 \theta'^2$$

zu setzen; und es wird:

$$F(r) = \frac{1}{\beta}\int \sqrt{m^2\gamma^2 - \alpha^2 m^4 r^2 - \beta^2}\cdot dr,$$

und insbesondere, wenn $m\gamma^2 = \beta^2$ gewählt wird:

$$F(r) = i\,\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\,\frac{r^2}{2}.$$

Der eine Mantel der Evolutenflächen der durch die Gleichungen (18) oder (19) bestimmten Flächen ist also auf das imaginäre Rotationsparaboloid

$$\frac{i}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} z \tag{20}$$

abwickelbar, d. h. auf eine zu dem Paraboloide, das sich für $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ergibt, ähnliche Fläche.

Legt man demnach als sphärisches Bild der Krümmungslinien das in Nr. 1 mittels der Winkel w und w' konstruierte Kurvensystem $dp = 0$, $dq = 0$ zu Grunde, so wird man zu Flächen geführt, weche den Weingartenschen Flächen ähnlich sind.

4. Durch die Substitution

$$\alpha k = \gamma \cdot \sin\frac{w}{2}$$

bringen wir das Quadrat des Linienelementes für den einen Mantel der Evolutenfläche auf die Form

$$\alpha^2\beta^2 d\sigma^2 = \tfrac{1}{4}\gamma^4 \operatorname{cosin}^4\frac{w}{2} \cdot dw^2 + \gamma^2 \sin^2\frac{w}{2} \cdot dq^2,$$

und weiter, wenn wir eine neue Konstante $\varkappa$ einführen und auch q transformieren:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{4\varkappa^2} \operatorname{cosin}^4\frac{w}{2} \cdot dw^2 + \sin^2\frac{w}{2} \cdot dv^2, \tag{21}$$

wo $\gamma^2\varkappa = \alpha\beta, \quad \alpha v = \gamma q.$

Wie Darboux angibt[1]), sind Flächen mit dem Linienelemente (21) auf das Paraboloid (20) abwickelbar, was mit unserem Resultate übereinstimmt.

Bianchi[2]) kommt auf diese Flächen als Brennflächen gewisser Strahlensysteme; nach ihm sollen die Flächen mit dem Linienelement der Form

---

[1]) Théorie générale des surfaces, t. III, 1890, S. 370.

[2]) Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, 2. Aufl., Leipzig 1910, S. 332.

$$(22) \qquad ds^2 = \frac{a^2}{4m^2}\left(\operatorname{cosin}^4 \frac{w}{2} \cdot du^2 + \frac{4}{a^2} \sin^2 \frac{w}{2} \cdot d\beta^2\right)$$

als Evolutenflächen zu denjenigen Flächen gehören, zwischen deren Krümmungsradien die Relation

$$(23) \qquad m(\varrho'' - \varrho') = \sin[m(\varrho'' + \varrho')]$$

erfüllt ist. Der Vergleich mit (19) lehrt, daß hier

$$m = \frac{2a\beta}{\gamma^2}$$

sein müßte; die zu dem Linienelemente (22) gehörenden Flächen genügen demnach der Relation, welche aus Gleichung (23) entsteht, wenn man in letzterer m durch $\frac{2m}{a}$ ersetzt.

Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Die Frage nach der Möglichkeit der Verbiegung geschlossener analytischer Flächen durchweg positiven Krümmungsmaßes, kurz gesagt, analytischer Eiflächen, hat ihre Geschichte, deren Einzelheiten im Enzyklopädie-Artikel III D 6 (A. Voss, Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander) Nr. 19 und 32 und in W. Blaschkes Buch: Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 163—164 mit großer Vollständigkeit angegeben sind. Um das Notwendigste daraus hervorzuheben, seien drei Stufen der Entwickelung genannt, die an die Namen Minding (1838), Jellett (1854) und Weyl (1916) knüpfen. Minding behauptete schlechtweg, daß eine Eifläche als geschlossenes Ganzes unverbiegbar sei, Jellett versuchte die sogenannte „infinitesimale“ Unverbiegbarkeit zu beweisen — beide Sätze sind erst viel später, 1903 und 1899 bewiesen worden, Weyl endlich erbrachte den Beweis für den viel allgemeineren Existenzialsatz, „daß jede in abstracto — (durch die quadratische Differentialform für das Linienelement) gegebene geschlossene, konvexe Fläche eine einzige Realisierung im dreidimensionalen euklidischen Raum besitzt.“

Neuerdings hat E. Rembs in seiner Bonner Dissertation (Zur Verbiegung konvexer Flächen mit geschlossenem sphärischen Bild) den Jellettschen Satz wieder aufgegriffen, zugleich aber den Beweis für die Unmöglichkeit der Verbiegung

gewisser offener Flächenstücke hinzugefügt. Rembs benützt, ohne daß dies hervortritt und zur Geltung kommt, die assoziierte Fläche, die Blaschke als „Drehriß" bezeichnet hat wegen ihrer kinematischen Bedeutung für den Verbiegungsvorgang.

Diesen „Drehriß" mit ganz elementarer Rechnung abzuleiten und dabei alle Vorteile zu verwenden, die eben die kinematische Bedeutung mit sich bringt, ist die Aufgabe von § 1, dabei ist von dem Rechte Gebrauch gemacht, Verweise durch Beweise zu ersetzen, damit die Darstellung in sich geschlossen bleibt. Als Ergebnis neu in diesem Paragraphen ist vielleicht nur der zweite Teil von Nr. 4 und 5.

Im zweiten Paragraphen werden die Sätze von infinitesimalen auf stetige Verbiegungen übertragen, die bisher für diesen Zweck noch nicht herangezogene Weingartensche Mittelfläche erlaubt, diese Übertragung fast ohne Rechnung durchzuführen.

Der dritte Paragraph, der sich übrigens auf kein Ergebnis der ersten beiden Paragraphen stützt, gibt die überraschende Lösung der recht lebhaft besprochenen Frage (Jahresber. d. D. Math. Ver. 24 (1915), S. 207—209), innerhalb welcher Grenzen die Kugelfläche verbogen werden kann.

§ 1. Die infinitesimale Verbiegung konvexer Flächen.

1. Infinitesimale Verbiegung und Drehriß. Der von Jellet eingeführte Begriff der „infinitesimalen Verbiegung" knüpft an folgenden Ansatz: Man denke sich zu einer Fläche

$$z = f(x, y)$$

eine vom Parameter t abhängige Schar isometrischer Flächen gegeben, wobei für $t = 0$ die Ausgangsfläche entstehen soll, und man berücksichtigt in allen weiteren Ausführungen nur die Glieder erster Ordnung in der vorausgesetzten Entwickelung nach Potenzen von t. Um dies anzudeuten, setzt man $t = \varepsilon$ und verlangt dann, der Forderung der Isometrie oder Abwickelbarkeit entsprechend, daß in

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wobei $x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta$

gesetzt ist, das linkerhand mit dem Faktor ε versehene Glied identisch gleich Null ist. Dies führt auf die Forderung

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta \equiv 0,$$

die ihrerseits in drei partielle Differentialgleichungen zerfällt. Nimmt man in der Darstellung der Ausgangsfläche x und y als unabhängige Veränderliche und bezeichnet man in üblicher Weise die ersten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y mit p und q, deutet man im übrigen die Differentiation nach x und y durch die Fußmarken 1 und 2 an, so erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten von dx^2, dy^2 und $dx\,dy$ in der geforderten Identität die drei Gleichungen in der Gestalt:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 + p\zeta_1 = 0,\\
&\eta_2 + q\zeta_2 = 0,\\
&\eta_1 + p\zeta_2 = -\xi_2 - q\zeta_1 = \psi.
\end{aligned}$$

Durch Differentiation und Elimination von ξ_{12} und η_{12} folgt hieraus

$$\begin{aligned}
p\zeta_{12} - q\zeta_{11} &= \psi_1,\\
p\zeta_{22} - q\zeta_{12} &= \psi_2,
\end{aligned}$$

und durch weitere Differentiation die partielle Differentialgleichung für ζ

$$r\zeta_{22} - 2s\zeta_{12} + t\zeta_{11} = 0,$$

wobei r, s, t die zweiten Differentialquotienten von z bedeuten. Um eine „infinitesimale Verbiegung" der gegebenen Fläche zu bestimmen, hat man diese Gleichung zu integrieren, findet dann aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\psi = \int (p\,d\zeta_2 - q\,d\zeta_1)$$

und schließlich auch ξ und η durch Quadraturen.

Für den Nachweis der Nichtverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen eignet sich nun die Fläche, deren rechtwinklige Koordinatenebene ξ, η und ζ sind, viel weniger, als eine

zweite daraus abgeleitete, die sogenannte „assoziierte Fläche", oder, wie sie Blaschke genannt hat, der „Drehriß".

Wir führen diese Fläche jetzt ein.

Bei der infinitesimalen Verbiegung erleidet jedes Flächenelement eine infinitesimale starre Bewegung, es ist das Büschel der Linienelemente der Ausgangsfläche kongruent zum Büschel der Linienelemente im entsprechenden Punkt der durch infinitesimale Verbiegung aus ihr hervorgehenden. Wir wollen nunmehr den Drehvektor X, Y, Z dieser Bewegung bestimmen.

Das Linienelement, dessen Richtung durch die Richtungscosinus

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad m = 0, \quad n = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

gegeben ist, geht über in das Linienelement mit den Richtungscosinus

$$l_1 = \frac{1+\varepsilon\xi_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad m_1 = \frac{\varepsilon\eta_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad n_1 = \frac{p+\varepsilon\zeta_1}{\sqrt{1+p^2}},$$

und das Linienelement, dessen Richtung durch

$$l = 0, \quad m = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad n = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$$

gegeben ist, geht über in das Linienelement

$$l_2 = \frac{\varepsilon\xi_2}{\sqrt{1+q^2}}, \quad m_2 = \frac{1+\varepsilon\eta_2}{\sqrt{1+q^2}}, \quad n_2 = \frac{q+\varepsilon\zeta_2}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Um nun die Komponenten des Drehvektors zu finden, hat man die bekannten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta l &= \varepsilon(nY - mZ), \\ \delta m &= \varepsilon(lZ - nX), \\ \delta n &= \varepsilon(mX - lY) \end{aligned}$$

heranzuziehen, wobei δl, δm, δn die Zuwachsgrößen von l, m und n sind. Die beiden gewonnenen Größensysteme ergeben dann

$$\begin{aligned} \xi_1 &= pY, & \eta_1 &= Z - pX, & \zeta_1 &= -Y, \\ \xi_2 &= qY - Z, & \eta_2 &= -qX, & \zeta_2 &= X. \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen für X, Y, Z stehen in keinem Widerspruch, weil eben das einzelne Flächenelement bei der infinitesimalen Verbiegung einer starren Bewegung unterliegt. Man findet durch Auflösung

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1, \quad Z = \psi.$$

Dies sind die Gleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten des Drehrisses, wobei selbstverständlich die für ζ und ψ gewonnenen Formeln zu beachten sind.

2. Die Eigenschaften des Drehrisses. Wir wollen uns jetzt vor allem darüber klar werden, *welche Vorteile die Einführung des Drehrisses gewährt.*

Wenn man zu einer infinitesimalen Verbiegung eine infinitesimale starre, d. h. für alle Punkte der Fläche gleiche Bewegung hinzufügt, die durch

$$\bar{\xi} = A + Ez - Fy,$$
$$\bar{\eta} = B + Fx - Dz,$$
$$\bar{\zeta} = C + Dy - Ex$$

mit den Konstanten A, B, C, D, E, F gegeben ist, so gehen X, Y, Z über in

$$X + \bar{\zeta}_2 = X + D, \quad Y - \bar{\zeta}_1 = Y + E,$$
$$Z + \bar{\eta}_1 + p\bar{\zeta}_2 = Z + F - Dp + pD = Z + F,$$

es wird also der Drehriß einfach *verschoben,* und zwar ist der Vektor dieser Verschiebung der Drehvektor (D, E, F) der infinitesimalen Bewegung, die zur infinitesimalen Biegung gefügt wurde.

Hieraus folgt leicht: *Der Drehriß ist nur dann ein Punkt, wenn die inf. Verbiegung eine inf. Bewegung ist.*

In der Tat können wir in diesem Fall durch Hinzufügen einer Rotation (D, E, F) erreichen, daß X, Y und Z alle drei gleich Null sind. Dann ist aber ζ konstant und ψ gleich Null, woraus folgt, daß ξ und η ebenfalls beide konstant sind. Die betrachtete Verbiegung besteht also aus einer Folge von infinitesimaler Rotation und Translation, ist also eine infinitesimale Bewegung.

Wir leiten noch einige Eigenschaften des Drehrisses ab. Aus

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1, \quad Z = \int (p\, d\zeta_2 - q\, d\zeta_1)$$

folgt sofort

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = q,$$

d. h.: *Die Normalen von Fläche und Drehriß sind in entsprechenden Punkten $x, y, z \longrightarrow X, Y, Z$ einander parallel.*

Man findet dann auch leicht das *Krümmungsmaß* des Drehrisses

$$\overline{K} = \frac{\partial(p,q)}{\partial(X,Y)} \cdot \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{1}{(1+p^2+q^2)^2} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}$$
$$= \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \cdot \frac{1}{\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2}.$$

Der erste Faktor ist das Krümmungsmaß der Fläche, der Nenner des zweiten ist wegen

$$r\zeta_{22} - 2s\zeta_{12} + t\zeta_{11} = 0$$

oder

$$r\zeta_{22} - s\zeta_{12} = \lambda = s\zeta_{12} - t\zeta_{11}$$

leicht in die Form zu bringen

$$\frac{-\lambda^2 - (rt - s^2)\zeta_{12}^2}{rt}.$$

Hieraus folgt: *Ist das Krümmungsmaß K der Fläche positiv, dann ist im korrespondierenden Punkt des Drehrisses das Krümmungsmaß negativ.*

Das Verhalten des Drehrißes in singulären Stellen, das für die zu ziehenden Folgerungen von grundlegender Bedeutung ist, wird noch zu untersuchen sein.

3. Das Reziprozitätsgesetz. Wir können aus unseren Beziehungen noch leicht den Satz ableiten:

Jede Fläche ist zugleich Drehriß für jeden ihrer Drehrisse.

Um diese Reziprozität nachzuweisen, bezeichnen wir die zweiten partiellen Differentialquotienten von ζ nach x und y mit ϱ, σ und τ, so daß die Gleichung für ζ die Gestalt erhält

$$\varrho t - 2s\sigma + \tau r = 0$$

Wir müssen sodann die infinitesimalen Verbiegungen des Drehrisses bestimmen, wobei die Gleichungen

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = q$$

zu beachten sind. Die zweiten partiellen Differentialquotienten von Z nach X und Y bezeichnen wir noch mit r_1, s_1 und t_1 und erhalten aus

$$X = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$dZ = p\,dX + q\,dY$$

leicht

$$\begin{aligned} \Delta \cdot r_1 &= -r \cdot \sigma + s \cdot \varrho, \\ \Delta \cdot s_1 &= -r\tau + s\sigma = -s\sigma + t\varrho, \\ \Delta \cdot t_1 &= -s \cdot \tau + t \cdot \sigma, \end{aligned}$$

wobei ist

$$\Delta = \varrho\tau - \sigma^2.$$

Bezeichnen wir jetzt die zweiten partiellen Differentialquotienten der z-Komponente (ζ) der infinitesimalen Verbiegung des Drehrisses nach x_1 und y_1 mit ϱ_1, σ_1, τ_1, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$r_1\tau_1 - 2s_1\sigma_1 + \varrho_1 t_1 = 0$$

oder

$$\tau_1(s\varrho - rs) - \sigma_1(t\varrho - r\tau) + \varrho_1(t\sigma - s\tau) = 0.$$

In dieser Differentialgleichung liegt der Reziprozitätssatz begründet, man kann, weil sie besteht,

$$\varrho_1 = \lambda\varrho, \quad \sigma_1 = \lambda\sigma, \quad \tau_1 = \lambda\tau$$

wählen und erhält für die partiellen Differentialquotienten von $\bar{\zeta}$ nach X und Y, die mit $\bar{\zeta}_1$ und $\bar{\zeta}_2$ bezeichnet werden mögen

$$\begin{aligned} d\bar{\zeta}_1 &= \varrho_1\,dX + \sigma_1\,dY = \lambda(\varrho\,dX + \sigma\,dY) = \lambda(\varrho\tau - \sigma^2)\,dy \\ d\bar{\zeta}_2 &= \sigma_1\,dX + \tau_1\,dY = \lambda(\sigma\,dX + \tau\,dY) = \lambda(\sigma^2 - \varrho\tau)\,dx. \end{aligned}$$

Da beide Größen vollständige Differentiale sind, so ist

$$\lambda(\varrho\tau - \sigma^2)$$

von x und y frei, also eine Konstante c.

Man hat also

$$d\bar{\zeta}_1 = c\,dy, \quad d\bar{\zeta}_2 = -c\,dx$$

und weiter für die z-Koordinaten $(\bar{Z})$ dieses speziellen Drehrisses des Drehrisses der Ausgangsfläche

$$d\bar{Z} = p\,d\bar{X} + q\,d\bar{Y} = p\,d\bar{\zeta}_2 - q\,d\bar{\zeta}_1 = -c(p\,dx + q\,dy)$$
$$= -c\,dz.$$

Damit ist der Reziprozitätssatz begründet, denn man hat als einen möglichen Drehriß $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ des Drehrisses (X, Y, Z) der Ausgangsfläche erhalten

$$\bar{X} = \bar{\zeta}_2 = -cx, \quad \bar{Y} = -\bar{\zeta}_1 = -cy, \quad \bar{Z} = -cz,$$

und braucht die Konstante c nur gleich -1 zu setzen, um den Ausdruck für den Reziprozitätssatz zu haben.

Um noch eine Anwendung zu geben, betrachten wir den Drehriß der Kugel und überlegen uns, was hier der Reziprozitätssatz ergibt.

Ist $$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \cdots,$$

so erfüllt ζ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0,$$

daher wird

$$\zeta = \frac{\varkappa(x^2 - y^2) + 2\lambda xy}{2} + \cdots,$$

$$X = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \lambda x - \varkappa y + \cdots \quad Y = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\varkappa x - \lambda y + \cdots$$

$$x = \frac{\lambda X - \varkappa Y}{\lambda^2 + \varkappa^2} + \cdots, \quad y = -\frac{\varkappa X - \lambda Y}{\lambda^2 + \varkappa^2} + \cdots,$$

$$dZ = p\,dX + q\,dY = \frac{(\lambda X - \varkappa Y + \cdots)\,dX + (-\varkappa X - \lambda Y \cdots)\,dY}{\lambda^2 + \varkappa^2}$$

$$= \frac{\lambda(X^2 - Y^2) - 2\varkappa XY + \cdots}{\lambda^2 + \varkappa^2}.$$

Es ist also im Nullpunkt

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0,$$

d. h. die mittlere Krümmung des Drehrisses ist Null; d. h. also: *Der Drehriß einer Kugel ist eine Minimalfläche*, denn in jedem Punkt des Drehrisses, der einem Nabelpunkt der Fläche entspricht, ist die mittlere Krümmung gleich Null.

Auf Grund des Reziprozitätssatzes kann dann jede Minimalfläche einer infinitesimalen Verbiegung unterworfen werden, deren Drehriß eine Kugel ist. Wir wollen feststellen, was dies für eine infinitesimale Verbiegung ist.

Ist

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \cdots$$

die Minimalfläche, so wird

$$\zeta = \frac{\varkappa(x^2 + y^2) + 2\lambda x y + \cdots}{2}$$

und hieraus folgt für den Drehriß

$$Z = \frac{\lambda(X^2 + Y^2) + 2\varkappa X Y + \cdots}{\lambda^2 - \varkappa^2}.$$

Soll der Drehriß eine Kugel sein, so muß man $\varkappa$ gleich Null nehmen und man erhält, wenn man die Glieder bis zur zweiten Ordnung in x und y und bis zur ersten Ordnung in ε berücksichtigt, für die Nachbarfläche die Entwickelung

$$\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \varepsilon x y + \cdots \\ x_1 &= x + \cdots \\ y_1 &= y + \cdots \end{aligned}$$

oder

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \varepsilon x_1 y_1.$$

Es ist also die mittlere Krümmung im Koordinatenanfang

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} = 0 + \varepsilon^2 \cdot (\cdots)$$

d. h. die unendlich benachbarte Fläche ist, wenn man die Glieder erster Ordnung in ε berücksichtigt, wieder Minimalfläche und man sieht, *daß unter allen infinitesimalen Verbiegungen einer Minimalfläche diejenigen eine Kugel als Drehriß besitzen, die die Minimalfläche in eine unendlich benachbarte Minimalfläche überführen.*

4. Der Jellettsche Satz. Wir gehen nunmehr zu dem Beweis des Jellettschen Satzes über, der besagt, daß eine geschlossene analytische Fläche positiver Krümmung keine infinitesimale Verbiegung zuläßt, abgesehen von der Bewegung. Wesentlich für den Nachweis ist die oben (Nr. 2) bewiesene Eigenschaft des Drehrisses, daß er entweder in einen Punkt ausartet — wenn nämlich die Verbiegung eine Bewegung ist — oder überall negative Krümmung besitzt. Man entnimmt daraus, daß er im zweiten Fall eine *geschlossene, ganz im Endlichen verlaufende Fläche negativer Krümmung sein müßte*, einen Widerspruch und folgert, daß er nur ein isolierter Punkt sein kann, womit dann der Jellettsche Satz bewiesen wäre. — Allein, dieser Schluß hat doch noch eine Lücke, es fehlt die Betrachtung der singulären Punkte des Drehrisses! Ein Flächenstück negativer Krümmung hat in *regulären* Punkten sicher kein Extrem einer der drei Koordinaten, wohl aber kann dies in *singulären* Punkten eintreten, wie z. B. auf dem scharfen Rand der Rückkehrkante der Pseudosphäre. Der Drehriß aber hat, das werden wir sehen, keine derartigen Singularitäten; er besitzt nirgends eine Stützebene, das heißt also, jede Ebene, die einen Punkt des Drehrisses enthält, zerlegt den Gesamtraum in zwei Teile, die beide nicht frei von Punkten des Drehrisses sind. Oder: Jede Ebene, die mit dem Drehriß einen Punkt gemein hat, schneidet ihn. (Damit ist dann auch ausgeschlossen, daß der Drehriß etwa in eine Kurve ausartet, denn eine Kurve besitzt Stützebenen. Um noch ein anderes Bedenken gleich von vorneherein abzuschneiden, betonen wir, daß die Punkte des Drehrisses auf Grund der in jedem Bereich analytischen Zuordnung zur Fläche eine perfekte Menge bilden, daß also jeder Häufungspunkt von Punkten des Drehrisses selbst dem Drehriß angehört. Aus isolierten Punkten kann der Drehriß gemäß seiner Natur als stetige Fläche auch nicht bestehen!)

Bei der Untersuchung des Drehrisses können wir die Reihenentwickelung der Fläche in der Umgebung des zu untersuchenden Punktes in der Gestalt

$$z = \tfrac{1}{2}(a x^2 + b y^2) + \cdots \quad (a > 0,\ b > 0)$$

annehmen, außerdem aber, da infinitesimale Bewegungen an der Gestalt des Drehrisses nichts ändern (Nr. 2), annehmen, daß ζ mit Gliedern von mindestens zweiter Ordnung beginnt.

Im folgenden brauchen wir durchweg nur die Glieder niedrigster Ordnung und bezeichnen diese Ordnung bei ζ mit $m\,(> 2)$. Für die Glieder niedrigster Ordnung behalten wir durchweg die bisherigen Funktionszeichen bei, erhalten daher für ζ jetzt die Differentialgleichung

$$a\zeta_{11} + b\zeta_{22} = 0,$$

aus der bekanntlich folgt, daß ζ nebst seinen Differentialquotienten eine indefinite Funktion ist. Das gleiche gilt also für

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1 \ \text{(Ordnung: } m - 1).$$

Endlich ist

$$Z_1 = a x \zeta_{21} - b y \zeta_{11} = a(x\zeta_{21} + y\zeta_{22}) = (m-1)\,a\zeta_2,$$
$$Z_2 = a x \zeta_{22} - b y \zeta_{12} = -b(x\zeta_{11} + y\zeta_{12}) = -(m-1)\,b\zeta_1,$$

also
$$b Z_{11} + a Z_{22} = 0,$$

d. h. Z ist wieder eine indefinite Funktion (von der Ordnung m).

Da nun die Funktion

$$AX + BY + CZ,$$

wie man auch die Konstanten A, B, C wählt, immer mit Gliedern beginnt, die *indefinit* sind, so hat der Drehriß keine Stützebene — weder in regulären Punkten, wo ja, wie wir schon wissen, sein Krümmungsmaß negativ ist, noch in singulären.

(Wie eine derartige Singularität aussehen kann, möge am Beispiel
$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + \cdots$$

erläutert werden. Man erhält hier, wenn ζ mit Gliedern dritter Ordnung beginnt

$$\zeta = a(x^3 - 3xy^2) + b(y^3 - 3yx^2) + \cdots,$$
$$X = b(3y^3 - 3x^2) - 6axy + \cdots,$$
$$Y = 6bxy - a(3x^2 - y^2) + \cdots,$$
$$Z = 2a(y^3 - 3x^2y) + 2b(-x^3 + 3xy^2) + \cdots.$$

und die Normalschnitte des Drehrisses sind in dritter Annäherung teils Neilsche Parabeln, deren Spitzentangente in der xy-Ebene liegt, teils Geraden in der xy-Ebene.)

Damit sind alle notwendigen Ergänzungen zum Gedankengang des Beweises des Jellettschen Satzes erbracht.

Er läßt für geschlossene konvexe Flächen noch eine *Erweiterung* zu.

Eine geschlossene Fläche negativer Krümmung (mit Punkten, die singulär sind, in denen aber keine Stützebenen existieren), ist unmöglich. Es ist aber auch eine Fläche unmöglich, die diese Eigenschaften in allen Punkten bis auf drei besitzt. Denn wenn man durch diese drei Punkte eine Ebene legt, so muß es doch Punkte der Fläche geben, die von dieser Ebene einen Maximalabstand haben — und das stünde im Widerspruch damit, daß die Fläche in allen übrigen Punkten den Charakter negativer Krümmung besitzt.

Hieraus folgt: *Eine geschlossene konvexe Fläche, die in allen ihren Punkten positive Krümmung besitzt, mit Ausnahme von drei Punkten, läßt ebenfalls außer der infinitesimalen Bewegung keine infinitesimale Verbiegung zu.*

Es sind also noch einige Fälle, die früher als Ausnahmen hervorgehoben werden mußten, mit einbezogen kraft der Wirkung, die die Einführung des Drehrisses mit sich bringt. Er ist das richtige Werkzeug für derartige Betrachtungen.

5. Der Satz von Rembs. Wir betrachten jetzt mit Rembs noch offene Flächen positiven Krümmungsmaßes mit einem ebenen Rand parabolischer Krümmung, einem Rand also, längs dessen die Fläche eine in allen Randpunkten berührende Tangentialebene besitzt. Da nach Nr. 2 der Drehriß und die Grundfläche überall in entsprechenden Punkten parallele Tangentialebenen haben, so folgt sofort, daß diesem ebenen Rand auf dem Drehriß ebenfalls ein ebener Rand entspricht. In der Tat ergibt die oben abgeleitete Gleichung

$$dZ = p\,dX + q\,dY,$$

daß für $p = q = 0$ (Tangentialebene parallel zur xy-Ebene)

$$dZ = 0$$

wird. Also ist längs des Randes die Drehkomponente senkrecht zur gemeinsamen Normale konstant, dem Rand der Fläche entspricht eine geschlossene ebene Kurve des Drehrisses.

Eine geschlossene ebene Kurve ist aber auf einer Fläche negativen Krümmungsmaßes als Berandung eines einfach zusammenhängenden Stückes unmöglich, weil es keinen Punkt der Fläche gibt, der von dieser Ebene einen maximalen Abstand besitzt.

Also läßt auch ein offenes Flächenstück der von Rembs aufgegriffenen Gestalt keine infinitesimale Verbiegung zu.

Gewiß entsteht im Zusammenhang mit diesem Satz die Frage, welche Bewandtnis es mit der Verbiegung einer durchweg positiv gekrümmten Flächenkalotte überhaupt hat. Die Flächenkalotte soll von einer ebenen Randkurve begrenzt sein und die „infinitesimale“ Verbiegung soll in der Weise stattfinden, *daß die Randkurve eben bleibt*; auch soll die Kalotte entweder an keiner Stelle oder überall „überhängen“, das heißt, der Neigungswinkel ihres Randstreifens gegen die Ebene der Randkurve soll entweder überall oder an keiner Stelle kleiner als ein rechter Winkel sein. Daß die Kalotte die Ebene der Randkurve nirgends berühren kann, folgt aus der Voraussetzung durchweg positiver Krümmung.

Wir verlegen die Randkurve in die xy-Ebene und können dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit für z die Reihenentwickelung

$$z = by + \tfrac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \cdots \qquad (b \neq 0)$$

voraussetzen, so daß die Gleichung der ebenen Randkurve lautet

$$z = 0, \quad y = -\frac{a_{11}}{2b}x^2 + \cdots$$

Längs der Randkurve soll aber

$$\zeta = c_1 x + c_2 y + \tfrac{1}{2}(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) + \cdots$$

zu Null werden, d. h. die Koeffizienten in

$$\zeta = c_1 x + \tfrac{1}{2}\left(b_{11} - \frac{c_2 a_{11}}{b}\right) x^2 + \cdots$$

müssen verschwinden, woraus folgt

$$c_1 = 0, \quad b_{11} = \frac{c_2 a_{11}}{b}.$$

Die Drehkomponenten X, Y, Z sind am Rand dann gegeben durch

$$X = \zeta_2 = c_2 + b_{12} x + b_{22} y + \cdots,$$
$$Y = -\zeta_1 = 0 + b_{11} x + b_{12} y + \cdots$$

Hieraus sieht man, daß die horizontale Komponente der Drehung die Richtung der Randkurve hat, oder vielmehr, man hat dieses kinematisch selbstverständliche Ergebnis auch analytisch bestätigt. Längs der Randkurve ist ferner

$$Z' = p\,\zeta_2' - q\,\zeta_1'$$

und im Koordinatenanfang

$$Z' = -b \cdot b_{11} = -c_2 \cdot a_{11}.$$

Es ist aber $a_{11} > 0$, wenn die Kalotte „überhängt", $a_{11} < 0$, wenn sie nicht überhängt; nach unserer Voraussetzung ist also a_{11}, d. h. der zweite Differentialquotient von z in der Richtung der Tangente der ebenen Randkurve, von einerlei Vorzeichen längs der ganzen Randkurve.

Da Z eine periodische Funktion ist, d. h. bei einmaligem Umlauf um die Randkurve seinen Wert wieder annimmt, so muß c_2, d. h. die horizontale Drehkomponente, entweder einen mindestens zweimaligen Zeichenwechsel erleiden, oder beständig gleich Null sein. In diesem letzteren Falle würde also Z längst des Randes konstant sein, und das ist, wie wir wissen, nur möglich, wenn die infinitesimale Verbiegung in eine Bewegung ausartet. Also müssen die Zeichenwechsel eintreten. Demnach lautet das Ergebnis:

Eine nirgends überhängende, von einer ebenen Randkurve begrenzte Flächenkalotte positiver Krümmung läßt (von der Bewegung abgesehen), nur solche *infinitesimale,* die Randkurve

als ebene Kurve erhaltenden Verbiegungen zu, bei denen die Randelemente der Fläche ihren Neigungswinkel gegen die Ebene der Kurve zum Teil vergrößern, zum Teil verkleinern. —

(Man gewinnt an Flächenkalotten aus Blech den Eindruck, als ob eine Verbiegung mit Erhaltung der ebenen Randkurve als ebene Kurve nicht möglich sei; die analytische Behandlung gibt bisher keinen Anhaltspunkt dafür, scheint vielmehr nichts über den soeben bewiesenen, mit mancherlei Bedingungen belasteten Satz Hinausgehendes zu liefern.)

§ 2. Stetige Verbiegung konvexer Flächen.

1. Kinematische Vorbetrachtungen. Aus der Unmöglichkeit der *infinitesimalen* Verbiegung geschlossener konvexer Flächen kann durch eine einfache kinematische Betrachtung die Unmöglichkeit der *stetigen* Verbiegung erschlossen werden. Wir werden daran erinnern, daß mit jedem Paar isometrischer Flächen die infinitesimale Verbiegung einer dritten Fläche gegeben ist, und wir werden dann weiter sehen, daß, wenn die beiden Flächen überall positives Krümmungsmaß besitzen, und dem angenommenen stetigen Verbiegungsvorgang entsprechend, einander hinreichend nahe liegen, die dritte Fläche, die sogenannte *Mittelfläche*, ebenfalls überall positive Krümmung besitzt, also wegen des *Jellett*schen Satzes keine infinitesimale Verbiegung, nur Bewegung zuläßt. Endlich ist zu zeigen, daß in diesem Falle die isometrischen Flächen kongruent sind.

Die Betrachtungen kinematischer Natur sollen vorangeschickt werden. Die Bedingung der Isometrie oder Abwickelbarkeit zweier Flächen $F(x, y, z)$ und $F_1(x_1, y_1, z_1)$, also

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

läßt sich schreiben

$$d\left(\frac{x_1 + x}{2}\right) d(x_1 - x) + d\left(\frac{y_1 + y}{2}\right) d(y_1 - y)$$
$$+ d\left(\frac{z_1 + z}{2}\right) d(z_1 - z) = 0$$

und dies bedeutet, nach § 1, Nr. 1, daß

$$\xi = x_1 - x, \quad \eta = y_1 - y, \quad \zeta = z_1 - z,$$

also der Vektor, der korrespondierende Punkte P und P_1 von F und F_1 verbindet, gleichzeitig eine infinitesimale Verbiegung der „Mittelfläche“ F_2

$$x_2 = \frac{x + x_1}{2}, \quad y_2 = \frac{y + y_1}{2}, \quad z_2 = \frac{z + z_1}{2}$$

des Ortes der Mittelpunkte P_2 der Strecken PP_1 angibt.

Es ist jedem Punkt P_2 die infinitesimale Verbiegung

$$\varepsilon\xi, \quad \varepsilon\eta, \quad \varepsilon\zeta$$

zugeordnet.

Daß die Transformation $P \longrightarrow P_1$ eine endliche Bewegung darstellt, wenn $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ eine infinitesimale Bewegung bedeutet, ist ein altbekannter kinematischer Satz und so abzuleiten: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden

$$\begin{aligned} \xi &= a - \gamma y, \\ \eta &= b + \gamma x, \\ \zeta &= c \end{aligned}$$

und es wird dann

$$\begin{aligned} x_1 - x &= a - \gamma\left(\frac{y + y_1}{2}\right), \\ y_1 - y &= b + \gamma\left(\frac{x + x_1}{2}\right), \\ z_1 - z &= c. \end{aligned}$$

diese Formeln stellen aber eine endliche Bewegung dar.

2. Der Mindingsche Satz. Nach diesen vorbereitenden Erinnerungen kommen wir auf die stetige Verbiegung zurück. Die vorausgesetzte *stetige* Folge von Flächen, welche aus der Grundfläche F hervorgehen sollen, setzt eine Fläche F_1 voraus, die von F in Gestalt und Lage beliebig wenig abweicht. Daß dann auch die Mittelfläche F_2 von F in Gestalt (und Lage) beliebig wenig abweicht, ist für die Anschauung gewiß selbstverständlich und bedarf nur der etwas umständlichen Nach-

rechnung; es leuchtet demnach ein, daß F_2 dann auch überall positives Krümmungsmaß besitzen muß.

Die (endliche) Biegung kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine Biegung, bei der Punkt P, in dessen Umgebung die Fläche F durch

$$z = \tfrac{1}{2}(a x^2 + b y^2) \cdots \left(a = \frac{1}{R_1},\ b = \frac{1}{R_2}\right)$$

dargestellt werden möge, und dieser Punkt nebst den Linienelementen fest bleibt, so daß die entstehende Fläche die Darstellung

$$z = \tfrac{1}{2}(c_{11} x^2 + 2 c_{12} x y + c_{22} y^2) + \cdots$$

hat, wobei

$$c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = a b$$

ist; dazu kommt eine endliche Bewegung, die die Zwischenform $\bar{F}$ in die Fläche F_1 überführt.

Die Größen c und die Bewegungen sind im allgemeinen in den Punkten P von F verschieden. Jede Bewegung zerlegen wir wieder in Rotation um P und Translation PP_1, wobei klar ist, daß diese Translation das Krümmungsmaß der Mittelfläche in P_2 nicht beeinflußt.

Man erhält dann für das Krümmungsmaß K_2 der Mittelfläche F_2 im Punkte P_2 den Ausdruck

$$K_2 = \frac{G}{(L^2 + M^2 + N^2)^2}.$$

Dabei ist

$$L = a_{31} + a_{13},$$
$$M = a_{32} + a_{32},$$
$$N = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\begin{aligned} G = {} & a b N (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{33}^2) \\ & + a c_{22} (N^2 + (a_{32} - a_{23})(2 a_{23} - 2 a_{32} a_{33} + a_{32} N)) \\ & + b c_{11} (N^2 + (a_{31} - a_{13})(2 a_{13} - 2 a_{31} a_{33} + a_{31} N)) \\ & + 2 a c_{12} (a_{13} - a_{31})(a_{32} a_{33} - a_{23}) \\ & + 2 b c_{12} (a_{23} - a_{32})(a_{31} a_{33} - a_{13}). \end{aligned}$$

Die a sind die Elemente eines (von Ort zu Ort wechselnden) orthogonalen Koeffizienten-Schemas, entsprechend den

Drehungen um Normale und zwei zueinander konjugierte orthogonale Richtungen in P.

Wir haben den Ausdruck vollständig angegeben; was uns daran interessiert, ist der eine Umstand, daß für

$$c_{11} = a, \quad c_{22} = b, \quad c_{12} = 0,$$
$$a_{ik} = 0 \, (i \neq k), \quad a_{ii} = 1$$

sich ergibt

$$K_2 = ab = K$$

und daß, wenn nahezu der Spezialfall der völligen Identität von F und F_1 vorliegt, K_2 von K sehr wenig abweicht.

Es ist anzunehmen, daß durch den für endliche Verbiegungen schon mehrfach herangezogenen Quaternionenkalkül die Formel für K_2 eine elegantere Gestalt bekommt — für unsere Zwecke erscheint es vielleicht schon überflüssig, daß wir überhaupt die fertige Formel angegeben haben. Denn, um dies nochmals zu sagen, bei völligem Zusammenfallen von F und F_1 fällt auch F_2 mit F zusammen, also wird bei geringer Abweichung F_2 von F sehr wenig verschieden sein. —

Damit ist dann das Schlußverfahren beendet, es ist nachgewiesen, daß die Möglichkeit einer *stetigen* Verbiegung die Möglichkeit einer *infinitesimalen* Verbiegung der Mittelfläche im Widerspruch zum *Jellett*schen Satz mit sich bringen würde. —

Im Anschluß an die Schlußbemerkung in § 1, Nr. 4 ist auch leicht zu zeigen, daß eine geschlossene konvexe Fläche mit nicht mehr als drei Punkten, in denen K keinen endlichen positiven Wert hat, keine stetige Verbiegung zuläßt.

3. Erweiterung des Rembsschen Satzes. Will man eine Fläche der Art, wie sie Rembs betrachtet hat, stetig verbiegen unter Erhaltung der Eigenschaft, daß der *parabolische Randstreifen ein ebener parabolischer Streifen bleibt*, so kann man voraussetzen, daß bei diesem Verbiegungsvorgang die Tangentialebene des parabolischen Streifens parallel zur ursprünglichen Lage bleibt. Die Mittelfläche als Ort der Mittelpunkte der Strecken, die korrespondierende Punkte PP_1 verbinden, hat dann auch einen ebenen Rand mit fester Tangential-

ebene, also läßt sie keine infinitesimale Verbiegung zu und daher die Fläche F keine stetige Verbiegung der vorgeschriebenen Art. Es bleibt dahingestellt, ob sie allgemeinere Verbiegungen zuläßt, bei denen der Randstreifen nicht mehr eben bleibt. —

Schließlich ist noch zu bemerken, daß der im zweiten Teil von § 1, Nr. 5 bewiesene Satz in derselben Weise, wie der Rembssche die Erweiterung von infinitesimale auf stetige Verbiegungen zuläßt; der Beweis ist ebenfalls durch Einschaltung der Mittelfläche zu führen.

§ 3. Die Verbiegung der offenen Kugelfläche.

1. Die Enneperfläche vom cyklischen Typus. Während die geschlossene Kugelfläche unverbiegbar ist, läßt sich dagegen eine Kugelfläche mit noch so kleiner Öffnung stets verbiegen. Der erste Teil dieses Satzes ist im Jahre 1899 bewiesen worden, der zweite soll hier bewiesen werden.

Um die Richtigkeit der Behauptung zu erkennen, muß man nur nachweisen, daß es nahezu geschlossene Flächenstücke konstanten positiven Krümmungsmaßes gibt, wobei die analytische Darstellung der Fläche einen Parameter enthält, und wobei durch bestimmte Wahl dieses Parameters die Fläche in eine Kugel übergeht.

Dazu eignen sich die Enneperschen Flächen und zwar im besondern die von H. Sievert angefertigte, im Verlag von L. Brill erschienene Fläche, 17. Serie, Nr. 3b, die als „cyklischer Typus" bezeichnet ist. Wir geben eine kurze Beschreibung und bringen sodann den analytischen Nachweis, daß die Fläche stetig in eine (oder genauer zwei einander berührende) Kugel übergeführt werden kann.

Das Modell zeigt vier kongruente mit je zwei Löchern versehene Eiflächen, die einen Zyklus bilden, jede dieser Eiflächen hat mit der folgenden eine ebene Rückkehrkante gemein, eine geschlossene Kurve, die in einer Ebene durch die Achse der Fläche gelegen ist. Die beigefügte Skizze (Fig. 1)

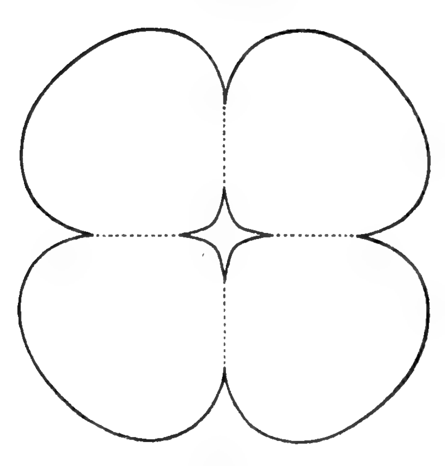


Fig. 1

gibt den Symmetrieschnitt der Fläche an, der in einer Ebene senkrecht zur Figurenachse gelegen ist. *Das Modell gibt aber noch kein vollständiges Bild.* Will man ein solches erhalten, so muß man auf die Dissertation von Sievert[1]) zurückgreifen. Der Schnitt der Fläche mit der Symmetrieebene besteht aus zwei getrennten Kurven, von denen die äußere etwa die Gestalt einer vierspitzigen Epicykloïde, die innere die einer vierspitzigen Hypocykloïde hat. Längs der äußeren Kurve schneidet die Fläche die Ebene senkrecht, während die innere Kurve eine Doppelkurve der Fläche ist. Längs der Doppelkurve setzen zwei symmetrisch zur Grundebene gelegene, gegen die Hauptachse asymptotisch verlaufende Zweige ein, und diese Zweige bestehen aus vier Paaren von Hohlrinnen, die sich asymptotisch gegen die Hauptachse verjüngen; jede Rinne hat mit der folgenden eine Rückkehrkante gemein. Die Schnitte der Fläche mit einer beliebigen, durch die Hauptachse begrenzten Halbebene haben daher die Gestalt einer Schleifenkurve, die asymptotisch zur Achse verläuft. Die weitesten Schlingen liegen in vier Ebenen, die die Fläche senkrecht schneiden,

[1]) H. Sievert, Über die Zentralflächen der Enneperschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Diss., Tübingen 1886, Kap. VI.

während die engsten für die Fläche Rückkehrkanten sind (vgl. Fig. 2).

Die Formeln, die die Fläche darstellen, und die wir sogleich angeben werden, enthalten einen Parameter C, der gleich 3 gewählt werden muß, um das Modell zu erhalten.

Die Gestalt der Fläche legt nun den Gedanken nahe, man könne den Parameter C so wählen, daß der viergliedrige Zyklus zweigliedrig wird und die Fläche dann in zwei einander berührende Kugelflächen ausartet.

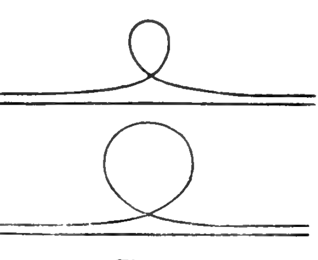


Fig. 2

Die analytische Darstellung[1]) der Fläche mit dem Krümmungsmaß a^2 ist in Zylinderkoordinaten (ϱ, z, ψ) gegeben durch

$$\varrho = 2a\sqrt{\frac{C+1}{C}}\,\frac{\sqrt{1+C\sin^2 w}}{C+1-C\sin^2\varphi\cos^2 w}\sin\varphi\,.$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{C}}\left\{\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{2(C+1)\cos\varphi}{C+1-C\sin^2\varphi\cos^2 w}\right\}.$$

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{C+1}}\,w + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{C+1}\,\operatorname{tg} w\right).$$

Die xy-Ebene ist hier die Symmetrie-Ebene, die z-Achse die Hauptachse der Figur. Man erhält die Rückkehrschnitte,

---

[1]) H. Sievert, Über Flächen von konstantem positiven Krümmungsmaß (Abhandlungen zu den durch die Verlagshandlung von L. Brill veröffentlichten Modellen, 17. Serie, Nr. 3). — Eine Unstimmigkeit zwischen der Dissertation und dem Modell hat Herr Konrektor Dr. Sievert brieflich aufgeklärt. Das Modell stellt die vier Eiflächen der bis zur hypocykloiden-artigen Doppelkurve und ist aus einer Anzahl von berechneten ebenen Krümmungslinien durch Ausfüllen mit Modellierwachs gewonnen. Bei der Ausführung in Gips sind die Eiflächen auch längs der Doppelkurve abgerundet worden, wodurch leicht eine falsche Vorstellung entsteht; es wird statt der als Ansatz zu betrachtenden Doppelkurve eine Kurve vorgetäuscht, die für die Fläche keine Singularität bedeutet, sondern längs deren die Fläche die xy-Ebene senkrecht schneidet.

wenn man $w = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ setzt und die Maximalschleifen werden durch die Meridianebenen $w = n\pi$ geliefert. Zur Ergänzung sei noch erwähnt, daß die Meridianschnitte ebene Krümmungslinien sind, längs deren die Fläche die Meridianebene unter dem konstanten, durch

$$\sin \tau = \frac{\cos w}{\sqrt{1 + C \sin^2 w}}$$

gegebenen Winkel τ schneidet, während die zweite Schar von Krümmungslinien $\varphi =$ konst. auf Kugeln liegen, welche die Fläche senkrecht schneiden. Die z-Achse ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kugeln.

Der äußere, epicykloidische Ast der Spur auf der xy-Ebene ist durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gegeben, der innere, also die hypocykloidenartige Doppelkurve wird durch die Beziehung zwischen φ und w gegeben, die man durch Nullsetzen des Ausdrucks für z erhält. Der Charakter dieses Schnittes als Doppelkurve der Fläche ergibt sich daraus, daß mit

$$\varphi = f(w)$$

auch

$$\varphi = \pi - f(w)$$

eine Lösung von $z = 0$ ist.

2. Die Kugel als Grenzfall. Wir führen jetzt an Stelle von w und φ die Parameter v und u ein (wobei wir im Auge behalten, daß dann konstantes v bzw. u die ebenen und die sphärischen Krümmungslinien bedeutet), und zwar setzen wir

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{C+1}},$$

also
$$\sin w = \frac{\sin v}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}}, \quad \cos w = \frac{\cos v \sqrt{C+1}}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}}$$

$$\sqrt{1 + C \sin^2 w} = \frac{\sqrt{C+1}}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}},$$

und $$\cot\varphi = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{C+1}},$$

also $$\cos\varphi = \frac{\sin u}{\sqrt{C\cos^2 u + 1}}, \quad \sin\varphi = \frac{\cos u\sqrt{C+1}}{\sqrt{C\cos^2 u + 1}}.$$

Es wird dann

$$C+1-C\sin^2 C\cos^2 w = (C+1)\frac{((C\cos^2 u+1)(C\cos^2 v+1) - C(C+1)\cos^2 u\cos^2 v)}{(C\cos^2 u+1)(C\cos^2 v+1)}$$

$$= (C+1)\frac{(C(\cos^2 u+\cos^2 v-\cos^2 u\cos^2 v)+1)}{(C\cos^2 u+1)(C\cos^2 v+1)}.$$

Wenn man jetzt C *unbegrenzt wachsen* läßt, so erhält man asymptotisch:

$$\sqrt{1+C\sin^2 w} \approx \frac{1}{\cos v}, \quad \sin\varphi \approx 1, \quad \cos\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{tg} u$$

und $$C+1-C\sin^2 C\cos^2 w \approx \frac{N}{\cos^2 u\cos^2 v},$$

wobei gesetzt ist

$$N = \cos^2 u + \cos^2 v\sin^2 u.$$

Diese asymptotischen Formeln liefern weiter

$$\varrho \approx \frac{2a\cos^2 u\cdot\cos v}{N},$$

$$z \approx \frac{2a\sin u\cos u\cos^2 v}{N}.$$

$$\psi \approx v.$$

Dies gibt in rechtwinkligen Koordinaten die Fläche

$$x = \varrho\cos v = \frac{2a\cos^2 u\cos^2 v}{N}.$$

$$y = \varrho\sin v = \frac{2a\cos^2 u\cos v\sin v}{N}.$$

$$z = \frac{2a\sin u\cos u\cos^2 v}{N}.$$

Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4a^2(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 u \cos^4 v)}{N^2}$$

$$= \frac{4a^2 \cos^2 u \cos^2 v}{N}.$$

Anderseits ist

$$2ax = \frac{4a^2 \cos^2 u \cos^2 v}{N},$$

so daß man erhält:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0.$$

Läßt man also C unbegrenzt wachsen, so geht der von den Meridianebenen $\varphi = \mp \frac{\pi}{2}$ *begrenzte Teil über in eine Kugel vom Radius a, die die z-Achse im Nullpunkt berührt und die ihren Mittelpunkt auf der x-Achse hat.*

Es mag der Vollständigkeit halber noch bemerkt werden, daß im Grenzfall die ebenen Krümmungslinien in die Kreise der Kugel übergehen, die die z-Achse berühren, während die sphärischen ($u =$ konst.) wegen

$$x^2+y^2+z^2-2az\operatorname{cotg}u = 4a^2\frac{\cos^2 u \cos^2 v}{N} - 4a^2\frac{\cos^2 u \cos^2 v}{N} = 0$$

auf Kugeln liegen, deren Mittelpunktsort die z-Achse ist und die die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0,$$

die ausgeartete cyklische Ennepersche Fläche senkrecht schneiden, genau, wie dies eben für die Enneperschen Flächen „mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien" charakteristisch ist.

Vielleicht ist zum Schluß noch ein erläuterndes Wort angebracht über den *Verbiegungsvorgang*, der eine Kugel mit beliebig kleinem Loch in eine cyklische Enneperfläche verwandelt.

Die Kugel vom Radius a wird in die Lage gebracht, daß der Mittelpunkt des Loches, das wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Kreis mit dem sphärischen Radius ε wählen dürfen, der Koordinatenanfang ist und die ergänzte Kugel

daselbst die z-Achse berührt, ihr Mittelpunkt auf der x-Achse liegt. Sodann nimmt man den Parameter C der cyklischen Enneperfläche mit dem Krümmungsmaß a^2 *so groß an* ($C = C_1$), daß die bei der isometrischen Zuordnung von Kugel und Enneperfläche dem Lochrand entsprechende Kurve die innere, der z-Achse zugewandte Grenze eines singularitätenfreien Stückes der Enneperfläche ist, daß also außerhalb kein Stück der Rückkehrkante oder der Doppelkurve liegt.

Läßt man jetzt $1 : C$ von 0 bis $1 : C_1$ wachsen, so geben die Sievertschen Formeln für ϱ, ψ und z den *Verbiegungsvorgang* an, der die mit Loch versehene Kugelfläche in ein anderes, nicht mit ihr kongruentes Flächenstück überführt.

Zum Schluß darf die Vermutung ausgesprochen werden, daß der Satz von der Nichtverbiegbarkeit geschlossener Eiflächen in ganz entsprechender Weise zu ergänzen ist, daß also eine Eifläche mit beliebig kleinem Loch verbogen werden kann. Bis zum Beweis dieses Satzes dürfte aber noch ein weiter Weg sein; ließ sich doch der hier behandelte einfachste Spezialfall, die Kugel, nur erledigen durch die Heranziehung der Enneperschen Flächen in der Form, wie sie für Rechnung und räumliche Vorstellung gefördert worden ist durch die Arbeiten von Sievert.



Über die Differentialgleichung $y' = Ay^p + By^q$.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 12. Juli 1919.

Es sei eine Differentialgleichung der Form

$$y' = Ay^p + By^q \tag{1}$$

gegeben, wo A und B Funktionen von x bedeuten. Wir machen die Substitution

$$y = S^m \cdot T^n, \tag{2}$$

wo T durch die Gleichung

$$T = \int P \cdot S^\nu \, dx + \text{Konst.} \tag{3}$$

definiert sei, indem P eine zu bestimmende Funktion von x bedeutet. Die Gleichung (1) wird dann

$$m \cdot S^{m-1} \cdot T^n \cdot S' + n \cdot S^{n+\nu} T^{n-1} \cdot P = A \cdot S^{mp} \cdot T^{np} + B \cdot S^{nq} \cdot T^{nq},$$

und diese befriedigen wir durch den Ansatz:

$$m S^{m-1} T^n S' = A S^{mp} T^{np},$$
$$n S^{m+\nu} T^{n-1} P = B S^{mq} T^{nq},$$

oder:

$$m S' = S^{m(p-1)+1} \cdot T^{n(p-1)} \cdot A, \tag{4}$$

$$m + \nu = mq, \quad n - 1 = nq, \quad nP = B. \tag{5}$$

Durch Differentiation von (4) ergibt sich

$$m S'' = (mp - m + 1) S^{m(p-1)} \cdot T^{n(p-1)} \cdot S' \cdot A + S^{mp-m+1} \cdot T^{np-n} \cdot A' + (np - n) S^{mp-m+\nu+1} \cdot T^{np-n-1} \cdot A \cdot P$$

oder, wenn man den Wert für T aus (4) einsetzt und beiderseits mit S dividiert:

$$(6)\quad \begin{aligned} m\frac{S''}{S} &= (mp-m+1)\cdot m\cdot S^{-2}S'^2 + \frac{A'}{A}m\frac{S'}{S} \\ &+ n(p-1)\left(\frac{mS'}{AS^{mp-m+1}}\right)^{\frac{np-n-1}{np-n}}\cdot S^{mp-m+\nu}\cdot A\cdot P. \end{aligned}$$

Im zweiten Gliede ist der Exponent von S' identisch gleich dem Exponenten von S^{-1}:

$$\frac{np-n+1}{np-n} = mp-m+\nu-(mp-m+1)\frac{np-n-1}{np-n};$$

wir bezeichnen diese Zahl mit μ; dann wird, wenn man die ersten beiden Gleichungen (5) hinzunimmt:

$$(7)\quad n = \frac{-1}{q-1},\quad \mu = 1+\frac{q-1}{p-1} = \frac{p+q-2}{p-1},\quad \nu = m(q-1).$$

Sind also p und q gegeben, so sind n und μ bestimmt; von den Zahlen m und ν bleibt aber eine willkürlich. Es darf nur nicht $\nu = 0$ oder $m = 0$ gewählt werden. Die Zahl p muß von 1 verschieden sein. Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$(8)\quad \frac{S''}{S} = F\left(\frac{S'}{S}\right)^2 + G\left(\frac{S'}{S}\right)^\mu + H\frac{S'}{S},$$

wo nun:

$$(9)\quad F = mp-m+1,\quad G = (p-1)m^{\mu-1}\cdot B\cdot A^{1-\mu},\quad H = \frac{A'}{A}.$$

Setzen wir also noch:

$$(10)\quad \Sigma = \frac{S'}{S},\quad S = e^{\int\Sigma dx},$$

so geht (8) über in:

$$(11)\quad \Sigma' = m(p-1)\Sigma^2 + G\Sigma^\mu + H\Sigma.$$

Durch die Substitution (2), in der S durch (10) und (11), T durch (3), und P durch (5), n und μ durch (7) bestimmt sind, wird also die gegebene Gleichung (1) in die Gleichung (11)

übergeführt, in der statt der beiden Potenzen p, q nur noch der eine Exponent μ (neben 1 und 2) vorkommt.

Die Gleichung (11) wird als eine Vereinfachung zu betrachten sein, wenn μ eine ganze positive Zahl ist, falls p und q solche Zahlen waren. Dies tritt z. B. ein für

$$p = 0, \quad \mu = 2 - q, \quad \text{also} \quad q = 2.$$

wodurch indessen keine Erniedrigung erzielt wird; ferner (da $p = 1$ ausgeschlossen ist) für

$$(12) \qquad p = 2, \quad \mu = q,$$

was auch nicht auf eine Vereinfachung führt; sodann für

$$p = 3, \quad \mu = \tfrac{1}{2}(q + 1).$$

Ist also q gleich einer ungeraden Zahl $2\varkappa + 1$, so wird die Differentialgleichung:

$$(13) \qquad y' = A y^3 + B y^{2\varkappa+1}$$

durch die Substitution (2) auf die Gleichung

$$(14) \qquad \Sigma' = m(p-1)\Sigma^2 + G\Sigma^{\varkappa+1} + H\Sigma$$

zurückgeführt; und dabei ist:

$$n = \frac{-1}{2\varkappa}, \quad \nu = m \cdot 2\varkappa.$$

Der Fall (12) sei noch besonders besprochen. Die Differentialgleichung (11) hängt dann von einer willkürlichen Konstanten m ab, und zwar sowohl in dem Faktor von Σ^2 als in dem Faktor von Σ^{μ}. Man müßte ein partikuläres Integral dieser Gleichung kennen, um aus demselben vermöge der Substitution (2) ein Integral der Gleichung (1) mit einer willkürlichen Konstanten abzuleiten. Hier enthält aber die Funktion T vermöge (3) eine zweite Konstante. Zwischen beiden Konstanten muß eine Relation bestehen, die durch die Gleichung (4) gegeben wird. Eine weitere Konstante wird durch den Übergang von Σ zu S eingeführt und tritt als Faktor von S auf; dieselbe hebt sich aber aus der Formel (2)

vollständig heraus und kommt deshalb nicht in Betracht; es ist nämlich infolge der Gleichungen (7):

$$m(p-1)+\nu n(p-1)=m(p-1)(1+n(q-1))=0.$$

Trotzdem genügt es nicht, ein partikuläres Integral von (11) zu kennen, denn nicht für jedes solche Integral kann die Gleichung (4) befriedigt werden, wie man leicht an einem elementaren Beispiele erkennt.

Um das allgemeine Integral der Gleichung

$$y'=Ay^2+By^q \tag{15}$$

zu finden, hat man also das allgemeine Integral der Gleichung (11), d. i.

$$\Sigma'=m\Sigma^2+m^{q-1}\cdot A^{1-q}\cdot B\cdot\Sigma^q+\frac{A'}{A}\Sigma \tag{16}$$

zu suchen, sodann S gemäß (10) aus Σ zu berechnen und die Substitution (2)

$$y=S^m\cdot\left[\frac{1}{n}\int BS^{m(q-1)}+C\right]^{-\frac{1}{q-1}}=S^m\cdot T^n, \tag{17}$$
$$\text{wo } n(q-1)=-1,$$

auszuführen, wobei zwischen den Konstanten m, C und den Konstanten des allgemeinen Integrals von (16) Relationen bestehen, die aus der Gleichung (4), d. i.

$$mS'=S^{m(p-1)+1}\cdot T^{-\frac{p-1}{q-1}}\cdot A \tag{18}$$

gewonnen werden, indem man für x spezielle Werte einsetzt.

Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo

$$p+q-2=0$$

ist. Dann wird die Hilfsgleichung (11) von der Form

$$\Sigma'=m(p-1)\Sigma^2+\frac{A'}{A}\Sigma+m^{-1}AB.$$

In diesem Falle wird also die Integration der Gleichung (1) auf diejenige einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt.

Ist $A =$ Konst, so wird die Gleichung (11)

$$\Sigma' = m(p-1)\Sigma^2 + G\Sigma^\mu. \tag{19}$$

Wendet man nun auf diese Gleichung wieder die Substitution (2) an:

$$\Sigma = Q^{m'} R^{n'} \quad \text{wo} \quad R = \int P_1 Q^{\nu'} dx,$$

so ergibt sich aus (7), da hier $p = 2$, $q = \mu$:

$$n' = \frac{-1}{\mu - 1}, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = m'(\mu - 1), \quad n' P_1 = G,$$

also aus (9):

$$U' = m' U^2 + m'^{\mu-1}(mp - m)^{1-\mu} G U^\mu. \tag{20}$$

Die Gleichung (4) wird, wenn $Q = \frac{U'}{U}$ gesetzt wird:

$$m' Q' = Q^{m'+1} \cdot R^{n'} \cdot m(p-1).$$

Die neue Gleichung (20) ist somit von derselben Form wie die Gleichung (19), und es ergibt sich kein wesentlicher Vorteil.

Die indirekten Ortsbestimmungsmethoden in der Entwicklung der Mathematischen Geographie.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgelegt in der Sitzung am 15. November 1919.

Unter einer direkten Methode verstehen wir im folgenden eine Ablesung am Kreise selbst, wie sie in früherer und späterer Zeit für jede Festlegung eines Ortes die Regel bildete. Dem entsprechend wird ein Verfahren als indirekt zu bezeichnen sein, wenn die Ablesung an einer Geraden erfolgt, so daß erst durch Umrechnung der Winkel, auf den es ankommt, erhalten wird. R. Wolf[1]) nennt die hiezu dienenden Instrumente solche „mit Geradteilung“, allein dieses Wort kann leicht mißverstanden werden, und es wurde deshalb die obige, ihre Berechtigung in sich tragende Bezeichnung gewählt. Eine zusammenfassende Darstellung dieses Zweiges der Instrumentenkunde, der für die Lehre von der geographischen Ortsbestimmung in früherer Zeit ein sehr großes Interesse besitzt, scheint noch niemals ins Auge gefaßt worden zu sein, und es darf deshalb ein solcher Versuch um so mehr als zeitgemäß betrachtet werden, weil für gewisse Zeiträume in der Geschichte der Erdkunde, der Geodäsie und Astronomie die indirekte Verfahrungsweise ganz den Vorzug vor der direkten beanspruchen konnte. Sieht man vom Gnomon[2]) ab, der strenge

---

[1]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 125 ff. Es wird erwähnt, daß der Dreistab gelegentlich auch parallaktisches Lineal oder Ptolemaeische Regel genannt wurde.

[2]) Für diesen zwar primitivsten, aber doch nichts weniger denn wertlosen, heute noch unter dem didaktischen Gesichtspunkte beachtens-

genommen nicht in Betracht zu ziehen ist, weil es damals noch kein Ortsbestimmungsproblem in dem uns heute geläufigen Sinne gab[1]), so verbleiben wesentlich nur drei Instrumente der indirekten Ablesung übrig, nämlich der Dreistab des Ptolemaeus, das geometrische Quadrat und der Jakobsstab. Von den beiden ersteren soll nur kurz die Rede sein, weil sich über sie wenig neues aussagen läßt; um so eingehender dagegen werden wir uns mit dem dritten zu beschäftigen haben.

I. Dreistab und geometrisches Quadrat.

Das Triquetrum, wie es im Almagest des größten griechischen Astronomen geschildert wird[2]), bestand aus einem festen Vertikalstabe AB, auf welchem die Punkte C und D (Fig. 1) fixiert waren, und um diese drehten sich in einer Vertikalebene zwei in gleiche Teile von beliebiger Größe geteilte Stäbe so, daß jeweils im Punkte E eine Durchdringung stattfand. Zwei auf CE angebrachte Absehen gestatteten die

werten Versuch, Erscheinungen am Firmamente messend zu verfolgen, liegt eine reiche Literatur vor, die an diesem Orte natürlich besonderer Berücksichtigung sich entzieht. Genannt mögen nur wenige inhaltreiche Belegstücke sein: J. Biot, Mémoire sur divers points de l'astronomie ancienne, Paris 1846; Drecker, Gnomon und Sonnenuhren, Aachen 1909; C. Schoy, Der Gnomon, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1918, S. 279 ff. Zumal von Schoy wird das Auftreten des Schattenstabes bei den Ägyptern, Chinesen, Indern, Babyloniern — verhältnismäßig spät, wohl erst im 7. Jahrhundert v. Chr. —, Griechen und Römern erörtert, sein Gebrauch bei den alten amerikanischen Kulturvölkern hingegen als ganz unbeweisbar dargetan.

[1]) Die Festlegung eines sphärischen Punktes durch zwei Koordinaten begegnet uns mit Sicherheit erst bei Hipparch (um 130 v. Chr.). Für die geographische Länge hatte die Antike kein anderes Mittel als die Mondfinsternisse zur Verfügung, was freilich zu schlimmen Fehlern, z. B. bei der Ermittlung der westöstlichen Ausdehnung des Mittelländischen Meeres, führen mußte; die geographische Breite hingegen wußte man durch Höhenmessungen im Meridiane schon ziemlich gut zu berechnen.

[2]) C. Ptolemaei, Syntaxis Mathematica, ed. Heiberg, lib. V, cap. 12, S. 403 ff.

Anvisierung eines Punktes S auf der Himmelskugel, dessen Höhe über dem Horizonte bestimmt werden sollte, wenn zuvor die Ebene CDE in die des Meridianes eingestellt war. Diese Höhe h ergänzte den $\sphericalangle DCE$ zu 90^0, und nach heutiger Rechnung — Ptolemaeus selbst bediente sich bekanntlich nur der Sehnen — würde also

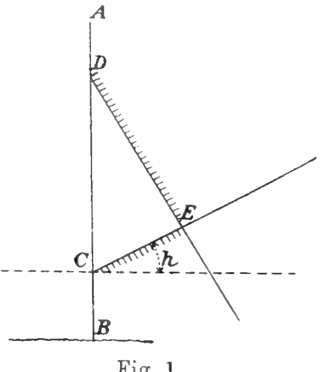


Fig. 1

$$\sin h = \frac{\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{DE}^2}{2\,\overline{CD} \cdot \overline{CE}}$$

zu setzen sein. Die Strecke CD ist konstant, CE und DE können unmittelbar an den beiden beweglichen Stäben abgelesen werden[1]).

Einen ausgedehnteren Wirkungskreis scheint das Instrument im Altertum selbst, dem es entstammt, nicht gefunden zu haben. Dafür hatte es die volle Beachtung des Copernicus gewonnen[2]), der anscheinend kein anderes Beobachtungswerkzeug sein eigen genannt hat. Zwei der Stäbe waren gleich-

[1]) Gewöhnlich richtete man das Instrument so ein, daß das Dreieck CDE gleichschenklig ward, obwohl hiezu keinerlei Notwendigkeit vorlag. Vgl. hiezu die Abbildung bei Montucla-Lalande (Histoire des Mathématiques, 1. Band, Paris an VII, S. 307). Es ist dann also $\sin h = CD : 2\,CE$ zu setzen, und die Sehnenrechnung liefert ein so einfaches Ergebnis, daß das Verfahren für die Antike vollständig genügte.

[2]) Vgl. hiezu P. Gassendi, Nicolai Copernici Vita, Paris 1654, S. 12 ff.; L. Prowe, Nicolaus Copernicus, 1. Band, 2. Teil, Berlin 1883, S. 48 ff.; R. Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 3. Halbband, Zürich 1892, S. 25 ff. Bei Gassendi lesen wir: Copernicus sibi confecit (et sua quidem, ut memorant, manu) vocatas Ptolemaicas Regulas, Parallacticumve Instrumentum ex ligno abiegno". Bei Kepler, der Copernics Instrument wohl durch Tycho Brahe kennen gelernt hatte, der es aus des erstgenannten Nachlasse erwarb, sehen wir das Triquetrum, allerdings zusammen mit dem Jakobsstabe, auf dem Titelblatte der „Tabulae Rudolphinae" (Ulm 1627) abgebildet.

lang und in je 1000 Teile geteilt, während diese Teilung beim dritten Stabe $1414 = 1000 \cdot \sqrt{2}$ Einheiten betrug[1]. Verwendet wurde dieses primitive Instrument, dessen Teilstriche mit Tinte aufgetragen waren, fast nur zur Messung von Zenitdistanzen. Über die zu erreichende Genauigkeit gab sich Copernicus keiner Täuschung hin, allein es ist gleichwohl die Polhöhe des wichtigen Beobachtungsortes Frauenburg (Ostpreußen) so ganz leidlich bestimmt worden[2]. Auch das „Quadrum" war ihm nicht unbekannt, ohne daß er es jedoch praktisch verwertet hätte.

Das geometrische Quadrat diente mehr zum feldmesserischen als zum astronomischen Gebrauche. Daß es eine Erfindung der Araber sei, ist behauptet, nicht aber bewiesen worden. Weißenborn ging sogar so weit[3], die drei Instrumente, denen diese Abhandlung gewidmet ist, als gleichartig hinzustellen; es seien lediglich verschiedene Bezeichnungen für die nämliche Sache. Dagegen wandten sich Eneström[4] und Curtze[5].

---

1) Auch Ptolemaeus ging von der Beschränkung aus, daß die beiden nicht mit Dioptern versehenen Seiten des ebenen Dreieckes gleiche Länge haben sollten. Notwendig ist indessen diese Annahme keineswegs. Ein gleiches gilt für eine gewisse arabische Abart des Instrumentes, auf welche E. Wiedemann aufmerksam gemacht hat (Über eine astronomische Schrift von Al Kindî, Sitzungsberichte der Physik.-Mediz. Sozietät zu Erlangen, 42. Band (1910), S. 294 ff.).

2) Bei Copernicus ist die geographische Breite seines Wohnortes $= 54^0\,19'\,30''$. Morsianus, den Brahe dorthin gesandt hatte, um eine Nachprüfung vorzunehmen, erhielt $54^0\,22'\,30''$, und heute gibt man $54^0\,21'\,34''$ an. Die Wahrheit liegt mithin ziemlich in der Mitte.

3) M. Weißenborn, Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters, Berlin 1885, S. 150 ff.

4) G. Eneström, Besprechung hiezu, Bibliotheca Mathematica 2) 2. Band, S. 32.

5) M. Curtze, Über die im Mittelalter zur Feldmessung benützten Instrumente, ebenda, 10. Band, S. 65 ff. Daß Astrolabium und Quadrant auf verschiedenen Voraussetzungen beruhen, wenn gleich bei beiden die Art der Messung die gleiche, direkte ist, lehrt die Geschichte beider Apparate. Astrolabium und geometrisches Quadrat standen insofern in näherer Beziehung, als des ersteren Rückseite („postica" oder „dorsum") für die Bedürfnisse des Feldmessers eingerichtet war, wogegen für die

Mit Recht fragt ersterer, wo sich denn ein arabischer Gelehrter fände, der sich mit diesen Dingen literarisch befaßt habe. Und Curtze wendet sich insbesondere dagegen, daß Weißenborn sogar Astrolabium, Quadranten und Quadrat identifizieren möchte. Daß die Nomenklatur vielfach schwankend war, ist ja allerdings zuzugeben[1]. Mitunter kommt blos einfach der

Höhenmessung des Astronomen ausschließlich die Vorderseite („antica") in Betracht kam. Das Astrolabium ist eine arabische Erfindung, die wahrscheinlich dem vielseitigen Arzachel (Al Zarqâlî) zu danken war (Steinschneider, Études sur Zarkali, Bullettino Boncompagni, 20. Band, S. 573 ff.). Er nannte es Scheibe („Saphea"), und unter diesem Titel hat ein Bayer, Jakob Ziegler aus Landau a. I., die Schrift des spanischen Mauren den Deutschen übermittelt (Cöln a. Rh. 1504). Von Steinschneider wird diese Bearbeitung beschrieben (Bibl. Mathem., (2) 4. Band, S. 11 ff.), und es ist auffallend, daß ein Gelehrter von so staunenswerter Literaturkenntnis erklärte, der Bearbeiter „Lateranus" sei ihm unbekannt. Hinter dieser lateinischen Benennung steckte eben der erwähnte Ziegler (later = Ziegelstein, woher auch die geologische Bezeichnung Laterit). Zu einigen Bemerkungen über das Astrolabium wird uns auch noch der vierte Abschnitt dieser Abhandlung Anlaß geben. Die bedeutendste und umfassendste Arbeit über dieses Instrument rührt her von dem Jesuiten Clavius (Astrolabium, Rom 1593; vgl. J. Mascart, Clavius et l'Astrolabe, Bulletin Astronomique, 22. Band (1905), S. 86 ff., S. 166 ff., S. 215 ff., S. 499 ff.). Soweit die griechische Periode in Betracht kommt, ist zu verweisen auf den Artikel von Kauffmann in der zweiten Auflage von Pauly-Wissowas „Enzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft". Monographisch behandelt hat das arabische Astrolabium neuerdings auch ein in dieser Sprache abgefaßtes Werk (Achmed Muchtar, Ryiaz almuchtar, Kairo 1887); mit ihm beschäftigt sich eingehend J. Würschmidt (Die Bestimmung der krummen Stunden, der Deklination des Gebetskreises mittels des Astrolabs, Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, Nr. 82/83 (1919), S. 183 ff.). Vgl. ferner G. Eneström, Le commentaire de Jakob Ziegler sur la „Saphea" de Zarkali, Bibliotheca Mathematica (2) 10. Band, S. 52 ff.

[1] Eine erste Form des geometrischen Quadrates tritt uns schon bei Gerbert (Papst Sylvester II.) entgegen, der es aus vier gleichlangen Stäben zusammensetzte (M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst, Leipzig 1875, S. 163 ff.); Dominicus de Clavasio hingegen (Curtze, a. a. O., S. 69) verlangte schon eine quadratisch zugeschnittene Metallplatte. Bei ihm

Name „instrumentum“ vor, wie erwähnt; ein Beleg dafür, daß es keine größere Auswahl gab.

Zum Hauptinstrumente der niederen Geodäsie erhob erst Peurbach das geometrische Quadrat, welches in der nunmehrigen Gestalt recht wohl aber auch zur Messung von Höhen und Höhendistanzen in einem Vertikalkreise Verwendung finden konnte. In Fig. 2, a, b, c ist diese Winkelbestimmung dargestellt. Das massive Quadrat $EFGH$ wird mit Hilfe eines Bleisenkels lotrecht eingestellt; die beiden Seiten FG und GH haben eine Teilung, und zwar soll der Abstand zweier konsekutiven Teilstriche $= m$ sein. Um E dreht sich eine mit zwei Dioptern versehene Alhydade, so daß man, wenn sich in E das Auge befindet, zwei beliebige, derselben Vertikalebene angehörige Punkte anvisieren kann[1]). Dieselben seien A_1 und

finden sich auch die Bezeichnungen „instrumentum gnomonicum“ oder kurzweg „instrumentum“. Was den Quadranten anlangt, so scheint zwischen einer älteren und einer erst später erfundenen Form ein Unterschied gemacht werden zu müssen (M. Steinschneider, Johannes Anglicus und sein Quadrant, Bibl. Math., (2) 10. Band, S. 102 ff.; P. Tannery, Magister Robert Anglicus in Montepessulano, ebenda, (2) 11. Band, S. 3 ff.). Der „quadrans vetus“ rührt her von einem Guilelmus Anglicus, der sicher im Jahre 1231 als Lehrer der Medizin und Sternkunde in Montpellier wirkte, während der „neue Quadrant“ kurz vor 1300 von Jakob ben Machir, genannt Prophatius, eingeführt wurde. Aber auch ein Engländer Richard Wallingford wird als Erfinder genannt (s. L. A. Birkenmajers Ausgabe des „Commentariolum super theorias novas planetarum Georgii Peurbachii in studio generali Cracoviensi“, 1482 verfaßt von Copernics späterem Lehrer Abertus de Brudzewo, Krakau 1900, S. 26 ff.). Dort ist auch bemerkt, daß man mit Rücksicht auf die Nationalität des Erfinders von einem „instrumentum Albion (Albeon)“ sprach, d. h. Autor und Instrument verwechselte (Montucla-Lalande, Histoire des Mathématiques, 2. Aufl., I, Paris an VII, S. 529). Albert z. B. führt ohne Bedenken eine Äußerung „Albeons“ an, der zufolge Exzenter und Epizykeln nicht als Realitäten am Himmel, sondern als bloße geometrische Hilfsvorstellungen anzuerkennen seien. Die Vertauschung hat lange vorgehalten (vgl. Regiomontanus, De torqueto et astrolabio armillari ed. J. Schoener, Nürnberg 1544.

[1]) Es leuchtet ein, daß das Quadrat auf einem Statife angebracht werden mußte, wenn das Auge des Beobachters genau in die Verlängerung der Mittellinie der Alhydade gelangen sollte.

B_1 (Fig. 2a), A_2 und B_2 (Fig. 2b) und A_3 und B_3 (Fig. 2c). Die Mittellinie der Sehlöcher schneidet FG in K_1 und J_1 (Fig. 2a), FG und GH in K_2 und J_2 (Fig. 2b), endlich GH in K_3 und J_3; die Winkel, welche die Alhydadenrichtung mit der horizontalen Quadratseite EF bildet, sollen α_1 und β_1, α_2 und β_2, α_3 und β_3 heißen. Die Strecken FK_1 und FJ_1 mögen durch $a_1 m$ und $b_1 m$, die Strecken FK_2 und HJ_2 durch $a_2 m$ und $b_2 m$, die Strecken HK_3 und HJ_3 durch $a_3 m$ und $b_3 m$ bezeichnet werden. Alsdann gelten die nachstehenden Formeln (l die Quadratseite):

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = a_1 m : l, \quad \operatorname{tang} \beta_1 = b_1 m : l;$$
$$\operatorname{tang} \alpha_2 = l : a_2 m, \quad \operatorname{tang} \beta_2 = b_2 m : l;$$
$$\operatorname{tang} \alpha_3 = l : a_3 m, \quad \operatorname{tang} \beta_3 = l : b_3 m.$$

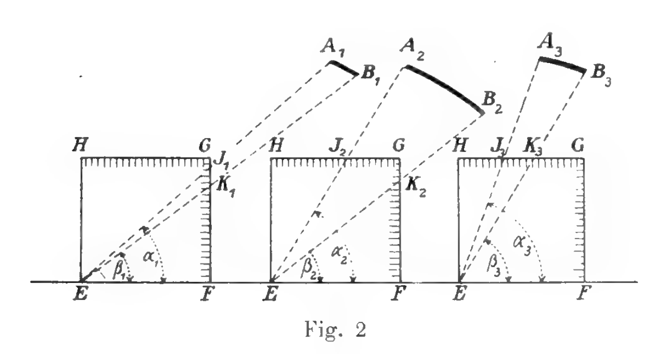


Fig. 2

Daß nach ihnen gerechnet werden konnte, war bereits ein beträchtlicher Fortschritt, bedingt durch Peurbachs Einführung der trigonometrischen Tangente[1]), für welche er eine

[1]) Diese Worte kannte weder Peurbach noch einer seiner Zeitgenossen. Man hielt sich vielmehr an die durch die Araber, speziell durch Abûl Wâfa (gest. 998), eingeführten Ausdrücke „Umbra recta" (Tangente) und „Umbra versa" (Kotangente), die beide der Sonnenuhrkunde entnommen waren, und die sich bereits im 12. Jahrhundert auch in Europa einzubürgern begonnen hatten (Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1894, S. 704; A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 1. Teil, Leipzig 1900, S. 52 ff.). Das Originalwerk wird zumeist nach einer späteren,

eigene Tafel angegeben hatte. Eine ohne Zwischenstationen sich vollziehende Berechnung der Winkel A_1EB_1, A_2EB_2, A_3EB_3 war damals noch nicht denkbar; die Möglichkeit, Formeln anzuschreiben, wie sie hiezu erforderlich sind, nämlich

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}(\alpha_1-\beta_1) &= lm(a_1-b_1):(l^2+a_1b_1m^2),\\ \operatorname{tang}(\alpha_2-\beta_2) &= (l^2-a_2b_2m^2):l(a_2+b_2),\\ \operatorname{tang}(\alpha_3-\beta_3) &= lm(b_3-a_3):(l^2+a_3b_3m^2),\end{aligned}$$

war im 15. Jahrhundert noch nicht gegeben. Immerhin war durch Peurbach, den Lehrer Regiomontans, die Bestimmung der scheinbaren Distanz himmlischer und irdischer Objekte die Wissenschaft und die Praxis namhaft gefördert worden[1]), mag man auch Curtzes Äußerung (a. a. O.), das Quadrat

von dem kaiserlichen Mathematiker J. Stab besorgten Ausgabe zitiert (Quadratum geometricum praeclarissimi Mathematici Georgii Burbachii, Nürnberg 1516). Hier kommt auch der Name „Gnomon geometricus" vor. Die Quadratseite ist in 1200 Teile geteilt. Vgl. auch A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik, 2. Band, Göttingen 1797, S. 529 ff. Es wird auch daran erinnert, daß man das Quadrat durch Umlegen in die Horizontalebene auch als Distanzmesser verwenden konnte; von geodätischer Seite wird diese Verwendung besonders gewürdigt (C. M. v. Bauernfeind, Die Elemente der Vermessungskunde, 1. Band, München 1879, S. 390 ff.). Zu denjenigen Schriftstellern, welche das Rechnen mit den neuen, so häufig in weit bequemerer Weise statt des Sinus zu benützenden Größen systematisch behandelten, gehört vor allem der Italiener De' Beldomandi (vgl. A. Favaro, Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (B. Boncompagni), 12. Band, S. 1 ff., S. 115 ff.; Intorno ad un trattato anonimo sull' Astrolabio riconosciuto opera di Prosdocimo de' Beldomandi, Bibl. Math., (2) 4. Band, S. 81 ff.). Schon zu Anfang des 15. Jahrhunderts handelt derselbe von folgenden Aufgaben: „Ad cognoscendam umbram rectam et versam per solem; Ad mensurandam umbram versam per umbram rectam et e converso" ($\operatorname{tang}\alpha = 1 : \operatorname{cotang}\alpha$). Für diesen letzteren Satz werden zwei verschiedene Beweise mitgeteilt. Durch Santritter und Liechtenstein wurden die Arbeiten de' Beldomandis auch in Deutschland bekannt.

1) Betreffs der Gleichberechtigung des Quadrates mit anderen Meßvorrichtungen gibt guten Aufschluß eine zu ihrer Zeit, Anfang des 16. Jahrhunderts, viel gebrauchte Schrift von J. Stoefler und Ph. Weiß (Von künstlicher Abmessung aller Größe, ebene oder niedere, in die Länge,

sei jetzt ein Universalinstrument geworden, für zu weitgehend erachten. Ein solches stand bereits dem Altertum zur Verfügung[1]), aber die Mathematische Geographie hat anscheinend keinen Nutzen aus ihm gezogen. Und der späteren Zeit ging es ganz verloren, bis es unter der Ägide der Regiomontanschen Sahule seine Wiederauferstehung erlebte und schließlich als Theodolit die allgemeinste Anerkennung errang.

II. Der Grundgedanke des Jakobsstabes.

Dieses Instrument ist, wie wir sehen werden, im 14. Jahrhundert entstanden; man kann in ihm mit Fug eine der wenigen wissenschaftlichen Neuerungen erblicken, welche das Mittelalter der Folgezeit hinterließ. Wie uns jedoch die Geschichte der Erfindungen und Entdeckungen lehrt, tritt so gut wie niemals ein neuer Gedanke so in die Welt, daß nicht gewisse Vorläufer deutlich erkennbar wären, sobald man sich nach ihnen umsieht. Diese allgemeine Regel stellt sich auch in unserem Falle als durchaus zutreffend heraus. Griechen und Araber besaßen Hilfsmittel astronomischer Beobachtung, die

---

Breite, Höhe und Tiefe, Frankfurt a. M. s. a.; A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796, S. 652 ff.). Es werden hier Quadrant, Astrolabium und Geometrisches Quadrat ziemlich unterschiedslos verwendet; für das letztere dient eine sonst anscheinend seltene Bezeichnung („scala altimetrica" oder „Meßleiter").

[1]) Dies war die Dioptra des Heron von Alexandrien, nicht zu verwechseln mit dem gleichnamigen Instrumente des Ptolemaeus, von dem nachher zu sprechen sein wird. Das Universalinstrument hat sehr eingehend studiert M. Cantor (Die römischen Agrimensoren usw., S. 20, 76; Vorlesungen usw., I, S. 356 ff.), der es unentschieden läßt, ob nicht Heron von dem älteren Dicaearchus beeinflußt war. Einen richtigen Einblick in das Wesen des Messungsverfahrens erhielt man erst in neuerer Zeit (*Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ διόπτρας*, übers. von Vincent und Venturi, Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale, XIX, 2, Paris 1858). Ein 4 Ellen langes Lineal mit zwei senkrecht darauf angebrachten, durchlöcherten Plättchen drehte sich frei um den Mittelpunkt einer horizontalen Kreisscheibe, „und eine vertikale Drehung war mit der Scheibe auf einem die ganze Vorrichtung tragenden Fuße ermöglicht."

tatsächlich keiner großen Vervollkommnung bedurften, um in den Jakobsstab überzugehen. Allein vollzogen hat sich dieser Schritt, und das bleibt das maßgebende Moment, eben erst im späteren Mittelalter.

Der blos auf praktische, d. h. chronologisch-astrologische Ziele abgestellten Himmelskunde der Babylonier und der wesentlich die Physik des Kosmos zu fördern bestimmten, spekulativen Tätigkeit der älteren griechischen Philosophen folgte das Zeitalter der exakten, lediglich auf wissenschaftliche Erkenntnis gerichteten Forschung, und als dessen ersten, zugleich jedoch einen der bedeutendsten Vertreter sehen wir vor uns Eudoxus aus Cnidus[1]). Leider wissen wir von ihm nur weniges, was als authentisch zu bezeichnen wäre, allein es sind uns doch so viele zuverlässige Nachrichten aus späteren Jahren überliefert worden, daß wir uns ein in der Hauptsache wohl korrektes Bild von seinen Leistungen zu entwerfen imstande sind. Und da scheint es zweifellos, daß Eudoxus die Beziehungen zwischen der scheinbaren und wahren Größe eines scheibenförmig erscheinenden Weltkörpers und seiner Erddistanz richtig auffaßte[2]).

[1]) Es gab auch noch einen zweiten, annähernd gleichaltrigen, kleinasiatischen Gelehrten dieses Namens, Eudoxus aus Cyzicus, der sich hauptsächlich auf geographischem Gebiete betätigt haben soll. Für seinen Namensvetter steht uns eine sehr dankenswerte Programmabhandlung zu Gebote: H. Künßberg, Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos, 2. Teil, Dinkelsbühl 1890. Zur Messung des scheinbaren Durchmessers von Sonne und Mond griff Eudoxus, von dem auch eine Schrift „γῆς περίοδος“ verfaßt worden sein soll, wahrscheinlich auf die chaldäische Methode zurück, die Auf- und Untergangszeiten an Äquinoktialtagen mittelst einer Wasseruhr zu verfolgen. Ebenso handelten nochmals auch Cleomedes und Aristarchus. Ersterer will das Prinzip der Anwendung eines „ὑδρολόγιον“ auf diesen Zweck den Ägyptern zuschreiben (Cleomedis de motu circulari corporum caelestium libri duo, ed. H. Ziegler, Leipzig 1891, S. 138 ff.).

[2]) Über diesen ganzen Komplex von Untersuchungen äußert sich in folgender Weise F. Hultsch (Posidonius über die Größe und Entfernung der Sonne, Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Philol.-Hist. Kl., (2) 1. Band (1896), S. 1: „Da die alten

Wie er freilich im Einzelfalle zu Werke ging, entzieht sich unserer Kenntnis.

Um so festeren Boden haben wir unter den Füßen bei Beurteilung der Methode, deren sich Archimedes bediente, um die Durchmesser der Sonnen- und Mondscheibe zu ermitteln. Sein „Arenarius", dessen man gewöhnlich nur deshalb gedenkt, weil darin eine neue Zahlensystematik auseinander gesetzt wird, die auch vor der Schreibung der allergrößten Zahlen nicht zurückzuschrecken braucht, geht näher auf die eben genannte Methode ein, auf die uns bisher von den Geschichtswerken zu wenig Gewicht gelegt worden zu sein scheint[1]). Aus dem unten, nach Heiberg, gegebenen Texte[2]) geht unmittelbar hervor, daß die instrumentelle Vorrichtung der Arche-

Astronomen bei ihren Beobachtungen lediglich auf die natürliche Sehkraft des Auges angewiesen waren, so ist es nicht zu verwundern, daß ihnen die richtige Einsicht in die Größen und Entfernungen der Gestirne verschlossen blieb. Dennoch haben sie Mittel und Wege gefunden, um wenigstens über Größe und Entfernung des Mondes und der Sonne Vorstellungen zu gewinnen, die sich mehr und mehr den wirklichen Verhältnissen näherten."

[1]) Nicht trifft dies zu für A. G. Kästner (Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796—1800, passim) und R. Wolf (Gesch. d. Astron., S. 169 ff.). Ersterer meint, dem Mathematiker, der die Vorschriften des Archimedes einhielt, dürfe es allerdings nicht darauf ankommen, blind zu werden. Über eine geschichtlich sehr beachtenswerte Andeutung bei Ramus s. u.

[2]) Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii, ed. J. L. Heiberg, 2. Band, Leipzig 1881, S. 251 ff. „Itaque longa regula in pede perpendiculari posita, qui in ejusmodi loco collocatus est, unde sol oriens conspici posset, et cylindro parvo tornato et in regula posito perpendiculari statim post ortum solis, cum sol prope horizontem esset, et oculi ex adverso eum intueri possent, regula adversus solem conversa est, et oculus in extrema regula positus est; cylindrus autem in medio solis et oculi positus soli officiebat. cylindrus igitur, qui ab oculo sensim removebatur, ubi paululum solis in utraque parte cylindri adparere coepit, inhibitus est jam si oculus re vera ab uno puncto prospectaret, lineis ab externa regula, quo loco oculus positus erat, cylindrum contingentibus ductis angulus lineis ita ductis comprehensus minor esset angulo, cui sol aptatur verticem in oculo habenti, quia ex utraque parte cylindri pars solis conspiciebatur."

typus des Jakobsstabes ist, und es mag auffallen, dieser Tatsache noch so wenig Erwähnung getan zu sehen. Natürlich kommt trigonometrische Rechnung nicht vor, die es im 3. vorchristlichen Jahrhundert noch nicht einmal in den Anfängen gab, aber durch sinnreiche Schlüsse, welche uns hier weniger angehen, wird der scheinbare Diameter der Sonne, d. h. der Winkel, unter dem sie ein Erdenbewohner sieht, gleich $\frac{1}{164}$ eines rechten gefunden[1]). Wir haben in Fig. 3 das Bild vor uns, wie es sich der Syrakusaner auf Grund seiner Beobachtungen gedacht hat. Der Kreiszylinder ab wird auf der horizontalen Schiene, auf welcher er lotrecht aufsitzt, so lange verschoben, bis das in E befindliche Auge genau über a und b weg die Endpunkte A und B des horizontalen Sonnendurchmessers erblickt, so daß EA' und EB' Berührende des Kreises werden. c, der Mittelpunkt von ab, liegt dann mit E und mit dem Sonnenmittelpunkte C in einer geraden Linie. Es wäre sonach, wenn ϱ der gesuchte Halbmesser ($= \sphericalangle aEc = \sphericalangle bEc$), $ac = bc = p$, $Ec = q$ gesetzt wird, angenähert $\tan \varrho = q : p$. Auf diese Relation werden wir wiederholt zurückzukommen haben. Archimedes war sich übrigens darüber klar, daß in Wirklichkeit ϱ ein wenig kleiner als $\sphericalangle aEc$ sein müsse.

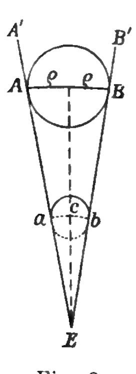


Fig. 3.

Von den antiken Astronomen haben Ptolemaeus und Proclus das archimedische Problem ihrerseits in Angriff genommen. Ersterer tat es in einem Kapitel[2]), welches nach der Verdeutschung von Manitius „Größenbetrag der scheinbaren Durchmesser der Sonne, des Mondes und des Schattens in den Syzygien“ überschrieben ist. Wasseruhren und von ihnen ab-

[1]) Schon die Alten setzten durchweg $\varrho = \frac{90^0}{180}$, so daß eben $\frac{90^0}{164}$ zu groß erschien.

[2]) Almagestum, lib. V, cap. 14; Claudius Ptolemaeus, Handbuch der Astronomie, deutsch von K. Manitius, 1. Band, Leipzig 1912, S. 305 ff.

hängige Zeitmessungen, führt er aus, können zu keinem befriedigenden Ergebnis führen. Wohl aber erzielt man ein solches, wenn man die von Hipparch erfundene Dioptra entsprechend anwendet. Ausführlicher wird der Nutzen dieser Dioptra, deren Verschiedenheit von derjenigen des Heron (s. o.) uns bekannt ist, von dem Kommentator Proclus dargelegt[1]; nach beiden Autoren hat Hultsch[2] die einschlägigen Fragen einer sorgfältigen Prüfung unterzogen. Er konstatiert zunächst, daß das archimedische Resultat, so richtig auch der zu ihm führende Weg war, gleichwohl an Genauigkeit das babylonische nicht erreichte, soweit wir uns von diesem letzteren eine deutliche Vorstellung zu machen in der Lage sind[3], und bemerkt sodann, daß wir von Proclus auch den Titel[4] der von Hipparch dem Instrumente gewidmeten Abhandlung erfahren. In Fig. 4 sehen wir die Dioptra vor uns, wie sie Proclus zur Darstellung bringt. Auf einem länglichen und schmalen rechteckigen Brette AB — wir behalten die griechischen Buch-

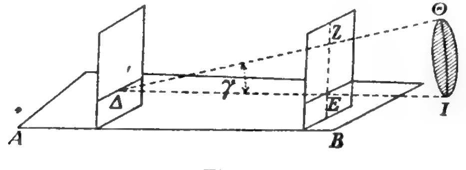


Fig. 4

[1] Proclus Diadochus, Hypotyposis astronomicarum positionum, ed. Manitius, Leipzig 1899. Die zugehörige Figur ist nicht richtig, weil Proclus nicht wie Archimedes, den horizontalen, sondern vielmehr den vertikalen Scheibendurchmesser finden will. Unsere Zeichnung paßt sich der Vorlage genau an.

[2] Hultsch, Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 9. Heft, Leipzig 1899 (Cantor-Festschrift), S. 191 ff.

[3] Als neuere Arbeiten über die Zeitrechnung des Zweistromlandes sind namhaft zu machen: L. Ideler, Über die Sternkunde der Chaldäer, Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, Philol.-Hist. Kl., 1814/15, S. 214 ff.; Bilfinger, Die babylonische Doppelstunde, Stuttgart 1888, S. 21 ff.

[4] Er lautete: „Πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν“.

staben bei — ist eine mit Beibehaltung ihrer vertikalen Stellung verschiebbare Platte angebracht, während eine feste, parallele Platte nahe dem beim Beobachter befindlichen steht. Das Sehloch Δ liegt in der vertikalen Mittellinie der festen Platte, und ihm entspricht das Sehloch E der beweglichen Platte, so daß also $\Delta E // AB$ verbleibt. ΘI ist der vertikale Sonnendurchmesser, durch dessen unteren Rand I die verlängerte Gerade ΔE berührend hindurchgeht. Die bewegliche Platte wird so lange verschoben, bis der Sehstrahl[1]), der nach dem oberen Sonnenrande Θ gezogen ist, durch eine senkrecht über E gelegene kleine Öffnung Z passiert. Wenn dann

$$\gamma = \sphericalangle E \Delta Z = \text{arc}\, \Theta I$$

gesetzt wird, so ist, in der uns geläufigen Sprache ausgedrückt[2]),

$$\text{tang}\, \gamma = \text{tang}\, (\text{arc}\, \Theta I) = EZ : \Delta E.$$

Vergleicht man diese sofort aus der Figur hervorgehende Formel mit den Angaben unseres dritten Abschnittes, so kann man nicht umhin, mit aller Bestimmtheit auszusprechen: Die Dioptra der griechischen Astronomen klingt nicht nur an den Jakobsstab an, ist nicht allein ein verbesserungsfähiger Vorläufer desselben, sondern es ist dieser selbst.

Nach Hultsch (s. o.) haben wir uns die bewegliche Platte als mit Einschnitten versehen zu denken. Die Breite b derselben ist bei Proclus durch die Ungleichungen (in Daktylen) $\frac{5}{8} < b < \frac{7}{8}$ bestimmt, und da ein Daktylos zwischen 18,5 und 21,9 mm zu setzen ist, so kann der obigen Ungleichung die nachstehende substituiert werden: 13,9 mm $< b <$ 16,4 mm. Der einer normalen Beobachtung anhaftende Fehler wird im Mittel ungefähr 2′ betragen haben. Ptolemaeus durfte den zu erreichenden Genauigkeitsgrad sogar unterschätzt haben.

[1]) Man hat sich dabei auch zu erinnern, daß die griechische Physik den Sehprozeß anders, als wir es tun, auffaßte. Sie vertrat den Standpunkt der Betastungstheorie; der Sehstrahl ging vom Auge und nicht vom Objekte aus, und das Sehen selbst war ein Herumfühlen an dem betrachteten Gegenstande.

Seine Nachfolger haben, den einzigen Proclus ausgenommen, die Dioptra nicht weiter beachtet, und so verschwindet sie dem Anscheine nach aus der Geschichte der die Beobachtung und Messung pflegenden Disziplinen.

Allein wie auch in so vielen anderen Fällen ein neu auftretendes Volk die Erbschaft der antiken Kulturvölker antrat, so geschah dies auch diesmal. Allerdings läßt uns das eigentlich wissenschaftliche Schrifttum der Araber im Stiche; sie, denen man das erste großzügig angelegte Kompendium der astronomischen Beobachtungskunst[1]) zu danken hat, sind nicht als Erben des Archimedes, Hipparch und Ptolemaeus aufgetreten, aber immerhin ergibt sich, daß in ihrem Bereiche der nämliche Gedanke Wurzel geschlagen hatte — ob spontan, ob von außen hereingetragen, das wird sich nicht mehr entscheiden lassen. Eine gewisse Spur zwar deutete an, daß auch Astronomen von Fach ein neuartiges Instrument für indirekte Winkelmessung gebraucht hätten[2]). In einem biographischen Werkchen („Tod der Vornehmen") des Ibn Challikân wies Suter eine recht wohl in diesem Sinne zu interpretierende Stelle nach. In Frage kommt die Lebensskizze des Kamâl Ed-Dîn, der als hoch geachteter Lehrer der Mathematik gegen Ende des 12. Jahrhunderts in Arbela (Mosul am Tigris) lebte. Hier ist die Rede von seinem Zeitgenossen Scharaf Ed-Dîn aus der — bald nachher durch die Sternwarte des Nasr Ed-Dîn berühmt gewordenen — Stadt Tûs, und dieser Mann soll gegolten haben als Erfinder eines Linear-Astrolabiums, welches kurzweg Stab genannt wird. Bei Sédillot führt es den Namen „astrolabe linéaire ou baguette de Tousi", und es ward dortselbst die Zusage gegeben, daß näheres darüber an der Hand einer Pariser Handschrift (M. S. 1148) mitgeteilt werden solle. Sonst wird das Instrument

[1]) Der Verfasser derselben war Abul Hassân aus Marokko. Wir besitzen L. A. Sédillots Bearbeitung: Traité des instruments astronomiques des Arabes, Paris 1834—35.

[2]) H. Suter, Zur Geschichte des Jakobsstabes, Biblioth. Mathem., (2) 9. Band, S. 13 ff.

von Dorn[1]) zwar zitiert, ohne daß jedoch das Zitat irgend eine Kennzeichnung enthielte. Man kann verstehen, daß Suter an den Jakobsstab dachte, doch bemerkt er selber, Guckin de Slane, der Herausgeber des Ibn Challikân, teile diese Ansicht nicht. Und auf denselben Standpunkt stellt er sich in einer zweiten Note[2]). Carra De Vaux, der hervorragende Orientalist, hat das von Sédillot gegebene, nicht aber gehaltene Versprechen eingelöst und erkannt[3]), daß der „Stab" des Tusî nichts mit dem Jakobsstabe zu tun hat, daß er vielmehr nur eine Modifikation des Planisphärs[4]) war, dessen Mittagslinie er ersetzen sollte. Am besten eignete sich die neue Vorrichtung, die, wie Suter zeigt, niemals sehr zuverlässige Daten liefern konnte, für die Messung der meridionalen Sonnenhöhen. Die Verschiedenheit der beiden dem Wortlaute nach leicht zu verwechselnden Beobachtungswerkzeuge wird allein schon durch den Umstand bezeugt, daß zu Scharaf Ed-Dîns „Stab" notwendig auch ein Quadrant gehörte, daß er folglich direkte und indirekte Messung voraussetzte.

Was die arabische Astronomie im engeren Sinne vermissen ließ, das ersetzte ein Schwesterwissenszweig, die Nautik. Zwar stammt die den besten Aufschluß gewährende, uns hier angehende Notiz aus einer sehr viel späteren Zeit, allein das Buch, aus welchem sich diese Kunde schöpfen läßt, will nur ein Sammelwerk sein, worin alles vereinigt ist, was damals, als es verfaßt ward, an älteren und neueren Errungenschaften

---

[1]) Dorn, Drei in der kaiserl. Bibliothek befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften, St. Petersburg 1863.

[2]) H. Suter, Nochmals der Jakobsstab, Bibl. Math., (2) 10. Band, S. 13 ff.

[3]) Journal Asiatique, Mai-Juni-Heft 1895.

[4]) Die Worte Planisphär und Astrolab werden nicht selten als identisch gebraucht. Es sollte eben das letztere zugleich die uns (s. o.) bekannte Vorderseite eines für direkte Messung bestimmten Kreises bedeuten, und das erstgenannte war eine stereographische Abbildung der wichtigsten Kreise der Himmelskugel (Wolf, Gesch. d. Astron., S. 163), durch welche einfache Aufgaben der Sphärik ohne Zuhilfenahme von Rechnung gelöst werden konnten.

der islamitischen Navigationskunde überhaupt vorlag[1]). Seidî ʿAlî Ben Honein war unter Suleiman dem Großen Kapudan Pascha (Admiral). Als schriftgelehrter Mann — „Kâhib i Rûmî“, der rumelische Schreiber, war sein Beiname — starb 1562 und hinterließ zwei in ihrer Art bedeutende Werke, ein geographisches Lehrbuch („Spiegel der Länder“) und den „Seespiegel“, von dem bereits vor Jahrzehnten v. Hammer-Purgstall einige Abschnitte übersetzt[2]), und über den die Gegenwart durch das Zusammenwirken eines Orientkenners (Bittner) und eines Geographen (Tomaschek) nähere Nachrichten erhalten hat[3]). Das erste Kapitel trägt folgende Überschrift: „Orientierung, Messung des Himmelskreises und Berechnung der Sternhöhen“.

Die Polhöhen zu bestimmen, war damals wie jetzt eine hochwichtige Aufgabe des Seespiegels. Seidî mißt den Winkel nach „Fingern“, d. h. es wird der rechte Arm ausgestreckt, so daß er sich horizontal gegen den Meereshorizont im Meridiane richtet, und dann sucht der Beobachter den Daumen so senkrecht wie möglich zu stellen. Die Kulminationshöhe des Polarsternes wird dann in Daumenlängen („isba“) notiert. So war wenigstens die hergebrachte Art und Weise, aber die geschulten Seeleute sahen selbstverständlich ein, wie ungenügend dieses rohe Verfahren war, und ersetzten den Arm durch einen Stab von 32 Zoll 2 Linien Länge, an dessen Ende ein Grad-

[1]) Die christliche Wissenschaft ist nach Möglichkeit ausgeschlossen; arabische, persische, indische und, soweit angängig, türkische Berichte haben den Stoff zu dem Werke des wiederholt gegen die Westvölker im Kampfe gelegenen Seehelden geliefert. Vorzugsweise kommen Pilotbücher des Indischen Ozeans zur Geltung.

[2]) v. Hammer-Purgstall, Extrait from the Moḥît, Journal of the Bengal Asiatic Society, 1834, S. 543 ff.; 1836, S. 441 ff.; 1837, S. 805 ff.; 1838, S. 767 ff. Es sind wesentlich die auf Mathematische Geographie bezüglichen Teile. Ergänzungen zu dieser Übertragung lieferte ein Aufsatz von J. Prinsep in der gleichen Zeitschrift vom Jahre 1836 (On Measurement of Arabic Quadrant).

[3]) M. Bittner-W. Tomaschek, Die topographischen Kapitel des Indischen Seespiegels Moḥît, Wien 1897.

bogen gleich $\frac{1}{16}$ der Kreisperipherie angebracht war. In dieser Gestalt wäre das Winkelmeßinstrument also ebenso, wie das vorbeschriebene, ein Mittelding zwischen einem solchen für direkte und einem solchen für indirekte Messung gewesen. Das fühlte man offenbar als unzweckmäßig, und so ward wieder auf das Prinzip des Hipparch zurückgegriffen; daß das ptolemaeische Werk, dessen hohe Verehrung bei den Arabern allbekannt ist, den Anstoß gegeben habe, ist nicht unmöglich, aber keineswegs wahrscheinlich, da man es ja nur mit seemännischer Praxis und nicht mit wissenschaftlicher Bestrebung zu tun hat. „Als drittes Glied des Instrumentes trat ein dritter, am Visierpunkt beweglicher Stab hinzu, der bewegliche Radius, dessen Richtung durch die Höhe des Bärengestirnes geregelt wurde; zum Zwecke genauer Sicht wurde derselbe mit zwei Absehen versehen. So entstand naturgemäß ein dreigliedriges Instrument, der Vorläufer unseres Jakobstabes, dessen Erfindung vielleicht persisch-arabischen Piloten zugeschrieben werden darf. . . .“ [1]) Diese nicht sehr klare Schilderung bedarf wohl einer gewissen Umdeutung; daß an dem nämlichen Längsstabe ein Gradbogen und dazu noch der Querstab angebracht gewesen wäre, ist doch kaum anzunehmen, sondern es waren dies zwei verschiedene Instrumente, deren eines zur direkten, deren anderes zur indirekten Messung der Höhe des Polarsternes diente. Dieser letztere ward demnach von den Seeleuten noch mit dem Pole selbst verwechselt, was bei der geringen Genauigkeit, auf die es im gegebenen Falle ankam, ausreichen mochte. Wie man freilich die Umrechnung in Fingerhöhen annahm, ist nicht genügend einleuchtend. Vermutlich mit Recht wird die Möglichkeit ausgesprochen[2]), Marinus Tyrius und ihm folgend Ptolemaeus seien durch unrichtiges Verstehen des Begriffes der „Fingerhöhen“ zu ihrer Verzeichnung der Insel Taprobane (Ceylon) verleitet worden.

Das merkwürdigste nun ist gewiß, daß ein solches Werkzeug noch bis in die neueste Zeit herein im Indischen Ozean seine

---

[1]) Bittner-Tomaschek a. a. O., S. 15 ff.

[2]) Ebenda, S. 20.

bescheidene Rolle als Orientierungsmittel spielt. A. Schück, der Ende 1918 in hohem Alter verstorbene, vielfach verdiente Historiker der Nautik, berichtete 1892[1]), durch die Herren Hübbe und Lüders in Hamburg sei dem dortigen Völkerkunde-Museum ein Exemplar des Höhenmessers zum Geschenke gemacht worden, welches Kapitän Doher von der Küste Koromandel (Ostseite des hindostanischen Dreieckes) mitgebracht hatte. Ein rechteckiges Holzplättchen ist im Mittelpunkte durchlocht, und durch diese Öffnung ist eine dünne Schnur mit 16 Knoten gezogen. Mit deren Hilfe soll die Polhöhe von 160 Orten, die tabellarisch gebucht sind, ermittelt werden, d. h. der Pilot findet nach seiner Art die Breite des Punktes, an dem er sich gerade befindet, und sucht in seiner Tabelle den Ort, dem er hinlänglich nahe gekommen zu sein glaubt. In Fig. 5 soll C das Auge, AB eine durch das Loch B gezogene Senkrechte sein, so daß $AB = BD$ wird. BC ist die Länge der Schnur, $AD : DC = \text{tang}\,(\sphericalangle ACB)$. Insofern ist ein Fortschritt zu bemerken, als nicht mehr, wie früher, die Meridianhöhe des Polarsternes gemessen, sondern der Moment seiner größten azimutalen Abweichung vom Meridian abgewartet wird.

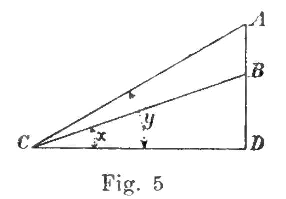


Fig. 5

Später ist Schück noch ausführlicher auf die Sache zurückgekommen[2]). Im Jahre 1554, als der Moḥît entstand, taucht

[1]) Schück, Ein altes indisches und arabisches Instrument zum Bestimmen der Polhöhe, Ausland, 65. Band, S. 814.

[2]) Schück, Der Jakobsstab, München 1896 (Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Geographischen Gesellschaft in München 1894/95), S. 130 ff. Diese Monographie kann als Muster einer geschichtlichen Arbeit gelten, doch beginnt sie erst mit der Erfindung des den bekannten Namen tragenden Instrumentes und verzichtet auf dessen Vorgeschichte, die für uns hier im Vordergrunde steht. Nur chronologisch kommt auch das Verfahren der Indienfahrer zur Besprechung, welches wir vorauszunehmen genötigt waren, um die Basis klarzustellen, auf welcher sich die sozusagen offizielle Erfindung von 1542 vollzog.

für das arabisch-indische Werkzeug der Name Kamâl zuerst auf[1]), allein es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß die Methode, wenn man diese Bezeichnung auf eine ziemlich rohe Empirie anwenden will, weit älter ist und stark ins Mittelalter zurückgreift. Ist es doch bekannt, mit welcher Zähigkeit Leute der Praxis an Regeln festhalten, deren eigentlicher Sinn sich ihnen verbirgt, von denen sie jedoch zu wissen vermeinen, sie hätten sich als gut und nützlich von Generation zu Generation fortgepflanzt. Den Abendländern wurde erst ganz am Schlusse des 15. Jahrhunderts eine nur sehr schattenhafte Kunde von dieser Beobachtungsart, und sie haben offensichtlich damit nichts rechtes anzufangen gewußt. Der arabische Lotse nämlich, welchem der Sultan von Melinde die Geleitung der Expedition Vasco da Gamas an die indische Westküste anvertraut hatte (1498), zeigte den Portugiesen, wie er seine Besteckaufnahme nach landesüblicher Weise vorzunehmen pflege, und erregte dadurch ihr Erstaunen. Die Berichte der Europäer waren aber so undurchsichtig, daß Breusing[2]), der vor Schücks Auftreten eifrigste Historiker der Seefahrtskunde, an das ptolemaeische Triquetrum (s. o. S. 300) dachte. Verschiedene Autoren[3]) klei-

[1]) Ob dieses Wort irgendwie an jenen Kamâl Ed-Dîn erinnern soll, dessen oben (S. 313) Erwähnung getan ward, müssen wir hier dahingestellt sein lassen. Unmöglich wäre es eben nicht, denn von Mosul bis Basra, einem der meistbesuchten Häfen des orientalischen Mittelalters, ist auf dem Tigris kein allzu weiter Weg, und daß gerade der Persische Meerbusen besonders belebt von Fahrzeugen war, kann auch als sicher gelten.

[2]) A. Breusing, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten, Bremen 1890, S. 36; im wesentlichen eine Rekapitulation früher ausgesprochener und lange für maßgebend gehaltener Ansichten (Zur Geschichte der Geographie, Regiomontanus, Martin Behaim und der Jakobsstab, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 1869, S. 97 ff.). Unser nächster Abschnitt wird der Breusingschen Namen-Kombination näherzutreten Ursache haben.

[3]) So D. Kopke-A. da Costa Paiva, Roteiro da Viagem que fez Vasco da Gama en 1497, Oporto 1838, S. 28. Das für die Entdeckungsgeschichte wichtige Sammelwerk „Paesi novamente retrovati" (Vicenza 1507, lib. II, cap. 58), eine italienische Übertragung portugiesiicher Vor-

deten die Mitteilung des Eingeborenen so ein, daß sie sagten, die Schiffer hätten Kompasse, hölzerne Quadranten und Segelanweisungen genuesischen Musters (?) besessen, und erst hundert Jahre später fand Crescentio[1]), der anscheinend selbst Erfahrungen gesammelt hatte, den richtigen Ausdruck („con il fino in nodi conforme l'usano i Mori nell'India"). Es soll später auf diese Frage zurückgekommen werden, wenn wir uns mit der bewußten nautischen Anwendung des Instrumentes zu beschäftigen haben, welches den von den arabischen Seeleuten nur halb unbewußt angestreckten Zweck mit vollem wissenschaftlichen Verständnis zu erfüllen bestimmt war.

III. Levi Ben Gerschom und Regiomontanus.

Die Wissenschaftsgeschichte hat nicht selten die Tatsache zu registrieren, daß eine Neuerung, wie man zu sagen pflegt, in der Luft lag, daß alle Vorbedingungen für ihr Auftreten gegeben waren, und daß man sich eher wundern muß, weil ihr Erscheinen trotzdem so lange auf sich warten ließ. Hierher gehört auch das Höhenmeßinstrument, welches im Laufe der Zeiten mit einer üppigen Fülle abweichender Bezeichnungen gekennzeichnet wurde, als Jakobsstab dagegen sich wohl am meisten in der Fachliteratur eingebürgert hat[2]). Man kann

lagen, spricht sich ähnlich aus; ebenda (cap. 61) nennt der Jude Gaspar „Quadranten aus Holz".

[1]) Schück, Der Jakobsstab, S. 131; B. Crescentio, Nautica Mediterranea, Venedig 1607, S. 455.

[2]) Die Entstehung des sonderbaren Ausdruckes dürfte Steinschneider (Miszellen zur Geschichte der Mathematik, Bibl. Mathem., (2) 3. Band, S. 36 ff.) richtig gedeutet haben, indem er sich auf Genesis, lib. 30, V. 37 beruft. Eneström bemerkt hiezu, daß schon J. Bartsch, Keplers Schwiegersohn, auf die dort geschilderte Schlauheit des Erzvaters Jakob hingewiesen habe (Planisphaerium stellatum, Nürnberg 1692, S. 96), und daß auch der Württemberger Schickard spontan auf dieselbe Hypothese verfallen sei (W. Schickard sen., Astroscopium nunc denuo in usum reipublicae literariae locupletius recusum, ed. W. Schickard jun., Stuttgart-Leipzig 1698, S. 55 ff.). Zweifellos trifft diese Hypothese weit eher den Nagel auf den Kopf, als die neuerdings von Cohn — in seiner

für ihn die nachstehende Reihe von Namen anführen[1]): Balestilha (portugiesisch), Baculo de Santiago oder Balestrilla oder Cruz geometrica (spanisch), Baton astronomique oder Flèche (französisch), Croß Staff (englisch), Graedboog (holländisch), Gradstock, Hammer (deutsch); aber auch als Radius astronomicus, als Radius geometricus, als Radius visorius kommt er in deutschen Schriften vor. Die apodiktische Behauptung Delambres[2]), er sei arabischen Ursprunges, ist in dieser Form, wie wir wissen, unzutreffend; in Wirklichkeit war die Provence sein Vaterland.

Vielleicht war diese Gegend im 14. Jahrhundert, als Avignon den Mittelpunkt der römisch-christlichen Welt darstellte, ganz besonders dazu geeignet, wissenschaftliche Anregungen, die aus verschiedenen Gegenden stammten, zusammenzufassen und weiter auszugestalten. Noch war in Spanien, obwohl die arabische Herrschaft schon beträchtlich zurückgedrängt erschien, ein lebhaftes geistiges Leben nicht erloschen; der Handel Frankreichs und Deutschlands mit Lyon und Marseille war sehr lebhaft; und in dieser großen Seestadt verkehrten auch Männer, die mit den Fahrten nicht blos im Mittelländischen, sondern auch im Indischen Meere wohl vertraut sein mochten. Zumal für einen geistig hochstehenden, das gelehrte Rüstzeug des Zeitalters voll beherrschenden Israeliten war die Gelegenheit gegeben, das Wissen des Altertums mit den praktischen Erfahrungen der Gegenwart zu vereinigen. Und ein solcher Mann ist Levi Ben Gerschom (oder Gerson) gewesen, der seit dreißig Jahren als tatsächlicher

---

später zu besprechenden Rezension der Schriften Bensaudes — aufgestellte. Ihm zufolge wäre an das Kreuz zu denken, welches die nach San Jago de Compostella in Spanien wallfahrenden Pilger trugen, und welches wieder auf den im Volksmunde so zubenannten „Jakobsstab" der drei Sterne δ, ε, ζ im Gürtel des Sternbildes Orion zurückweise.

[1]) Einige, aber keineswegs alle Bezeichnungen findet man angeführt bei O. Peschel-S. Ruge, Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. Humboldt und C. Ritter, München 1877.

[2]) Delambre, Histoire de l'Astronomie au moyen-âge, Paris 1819, S. 284.

Erfinder des Jakobsstabes anerkannt ist[1]). Als eine polyhistorisch angelegte Natur war er vorher bereits bekannt[2]); seine Hauptleistung soll uns nunmehr beschäftigen.

Über ihn liegt eine gründliche Monographie Steinschneiders[3]) vor, die jedoch, wie erwähnt, gerade diesen Punkt noch nicht zu berücksichtigen in der Lage war. Levi, der wohl auch als Leo Hebraeus[4]), Leo Judaeus und Ger-

---

[1]) Vgl. S. Günther, Die erste Anwendung des Jakobsstabes zur geographischen Ortsbestimmung, Bibl. Math., (2) 4. Band, S. 73 ff.

[2]) Eben mit Rücksicht auf seine Vielseitigkeit und sein Erfindertalent schreibt von ihm der konsequente Gegner der Sterndeuterei Pico von Mirandola (Disputatio in Astrologiam Divinatricem, Bologna 1496, lib. X, cap. 8: „Leo Hebraeus vir insignis et celeber mathematicus, quasi veteribus parum fidens, excogitavit novum instrumentum, cujus vidimus canones, mathematica subtilitate praecellentes". Auf diese Regeln kommen wir noch zu sprechen. In Deutschland haben, wie Th. v. Murr (Notitia trium codicum autographorum Johannis Regiomontani, Nürnberg 1881, S. 11 ff.) bemerkt, Kepler und Weidler schon des „Sepher Tegunoch" Levis gedacht. Der Nürnberger Historiker hält Levi für einen Spanier, und dieser Irrtum hat sich dann bis in die jüngste Vergangenheit fortgepflanzt.

[3]) Steinschneider, Levi ben Gerson (oder Gerschom), Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste (von Ersch und Gruber), 2. Sektion, 38. Teil, Leipzig 1885, S. 370 ff. Der Autor beruft sich auch auf eine einschlägige Notiz des Fürsten B. Boncompagni, Atti dell' Accademia (Pontificia) dei Nuovi Lincei, 1863, S. 741 ff. Auf Steinschneider stützt sich selbstverständlich großenteils die lesenswerte Schrift von J. Carlebach (Levi ben Gerson als Mathematiker, ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden, Berlin 1910), wo insbesondere auch daran erinnert wird, daß Levi als Begründer der elementaren Kombinationslehre anzuerkennen sei. Wir wollen auch nicht vergessen, daß bei ihm zuerst der Gedanke erwachte, die Ablesung am Limbus in dem Sinne zu verbessern, wie dies nachmals durch Nonius und Tycho Brahe in umfassender Weise durchgeführt wurde (W. Lührs, ein Beitrag zur Geschichte der Transversalteilungen und des „Nonius", Zeitschrift für Vermessungswesen, 1910, Heft 7, 8, 9).

[4]) Ungewiß ist es, ob Levi in späteren Lebensjahren zum Christentum übertrat und den Namen Leo empfing, oder ob da bloß, was wahrscheinlicher, eine willkürliche Latinisierung des Vornamens platzgegriffen hat. Jedenfalls trägt die Ingolstädter Handschrift die Aufschrift: „Et hic tractatus fuit translatus de Hebraeo in Latinum anno Christi 1342.

sonides in der Literatur auftritt, war 1287 oder 1288 in dem zwischen Avignon und Orange gelegenen Städtchen Bagnolos[1]) geboren und starb 1344; sein Leben spielte sich auf dem kleinen Raume ab, der soeben umschrieben ward. Er war Philosoph, Arzt, Astronom, selbstverständlich mit besonderer Hinneigung zur Astrologie. Ob er Latein verstand, ist ungewiß; wohl aber war er des Arabischen mächtig und übersetzte viele in dieser Sprache abgefaßte Bücher in die eigene, die hebräische. Handschriftlich gibt es von ihm mehrere Bibelkommentare, talmudistische Erläuterungen, Sonnen- und Mondtafeln, mathematische und optische Traktate[2]), Prognostika und philosophische Betrachtungen[3]). Als Astronom war er ein Gegner des Alpetragius, sonach jedenfalls ein Anhänger des Ptolemaeus. Sein bedeutendstes Werk war „Der Entschleierer der Geheimnisse“ (revelator secretorum), von welchem in Paris drei Kodizes existieren (Nr. 724 und 725 vollständig; ein weiteres Manuskript nur in Bruchstücken). Als Steinschneider dieses niederschrieb, konnte er noch keine Kenntnis haben von dem sehr bald nachher wahrgenommenen Umstande, daß ein Student der Universität Ingolstadt sich im Jahre 1610 einen Sammelband angelegt hatte (Cod. lat. Monac. 8089), worin neben den „Conclusiones Geometricae“ des Levi auch ein Bestandteil des „Relevator“ handschriftlich und mit Federzeichnungen enthalten ist, nämlich das uns hier angehende siebente

---

Pontificatu domini Clementis Papae VI. anno primo“. Im folgenden Jahre ist (s. o.) Levi verstorben.

[1]) Die Ortschaft liegt somit nicht, wie lange geglaubt ward, in Katalonien; sie gehört zum Departement Gard, zum Arrondissement Uzès.

[2]) Levi hatte das Prinzip der Dunkelkammer wahrscheinlich zuerst erkannt, obwohl man die Idee derselben auch bei Alhazen (Ibn Haitham) vorgebildet aufzeigen kann, von dem sie dann auf G. Porta und D. Barbaro überging und für die Praxis verwertet ward (P. Liesegang, Vom Geisterspiegel zum Kino, Düsseldorf 1918). Desgleichen ist beizuziehen eine neue Abhandlung von Liesegang (Die Kamera obscura bei Porta, Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, Heft 80/81, 1919, S. 1 ff.).

[3]) Vgl. J. Weil, Philosophie réligieuse de Levi ben Gerson, Paris 1868.

Kapitel: „Structura Baculi Jacob, ex libro manuscripto". Dessen Anfang, schon früher erwähntermaßen vom Schreiber dieser Zeilen veröffentlicht, geben wir seines hohen allgemeinen Interesses halber hier nochmals wieder.

„Fiat baculus unus cum superficiebus planis, et rectis, in uno capite illius ponatur una tabula quae aequaliter sit cornuta cujus alterutrum cornu experientiae tempore sit in alterutrum oculum collectum, et fiant in hoc tabulae diversarum quantitatum perforatae in medio, superficies rectas habentes, per quae foramina intrare possit baculus ante dictus, et sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi, et duae earum simul ponantur in baculo uno latere inaequales, ita quod minor sit propinquior oculo, et ambae super baculum faciant angulos rectos, et sint parallelae. . . ." In diesem Sinne soll die scheinbare (angulare) Entfernung zweier Sterne gemessen werden (cap. IX heißt: „Usus hujus instrumenti ad distantias Stellarum"). Daß Levi seinen Stab auch den nämlichen Messungen dienstbar zu machen bereit war, für welche das antike Analogon desselben bestimmt war, bekundet die Fassung von Kap. XIII: „Altitudinem Solis, Lunae et aliorum Siderum, eorum Diametrum, et loca; latitudinem cujuslibet stellae; item horas diurnas, et nocturnas beneficio hujus instrumenti indagare"[1]). Weiterhin wird der Gebrauch des Planisphärs (s. o. S. 303) für die Behandlung sphärischer Aufgaben auseinandergesetzt, wie man denn überhaupt die ganze Schrift als ein Kompendium der Sphärik zu bezeichnen ein Recht hätte.

In Fig. 6 geben wir den Jakobsstab Levis wieder, wie Curtze sein Wesen nach der soeben mitgeteilten Originalbeschreibung sich zurecht gelegt hatte[1]). Die beiden senkrecht zum Längsstabe angebrachten, in A und B perforierten Täfelchen tragen die Fortsätze („cornua") C_1 und C_2, D_1 und D_2.

---

[1]) Schück (a. a. O., S. 108) denkt sich auf das Schubplättchen Spitzen als „Hörner" aufgesetzt, um die Sterne möglichst scharf anvisieren zu können. In der Tat wählte auch Regiomontan (s. u. S. 327) zugespitzte Stäbe, die er auf dem Hauptstabe hin- und herschob.

Gemessen soll der Hauptkreisbogen zwischen den Sternen S_1 und S_2 werden. Das Auge[1]) bei O blickt nach den beiden Sternen, die bezüglich mit C_1, D_1 und C_2, D_2 in gerader Linie liegen. Dann gelten für $\sphericalangle S_1 O S_2 = \alpha$ die beiden Formeln[2]):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC_1}{\sqrt{AO^2 + AC_1^2}} = \frac{BD_1}{\sqrt{BO^2 + BD_1^2}}.$$

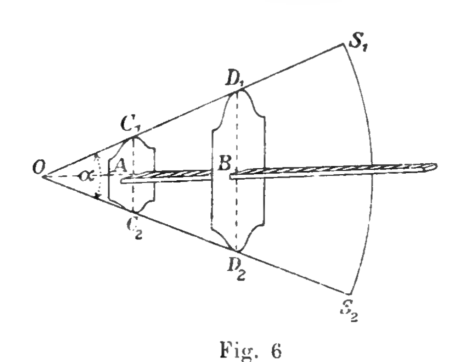


Fig. 6

Die Tangentenrechnung kannte Levi noch nicht, was einigermaßen wundernehmen möchte, wenn es sich so verhält, daß ihm das gelehrte Wissen der spanischen Mauren zu Gebote stand; es läßt sich indessen nicht leugnen, daß die Westaraber nicht alle die Fortschritte kannten und verwerteten, welche bei den Ostarabern gemacht worden waren. Um so besser wußte Levi Bescheid mit der Sinus-

---

1) Daß O nicht hart am Stabende liegen kann, wußte der Beobachter recht wohl. Deshalb muß der Fehler ausgeglichen werden („Cap. XIV. Cautelae quaedam adhibentur, ne Error committatur in usu hujus instrumenti").

2) Selbstredend wäre nur ein einziger Querstab unentbehrlich. Werden aber zwei solche Stäbe verwendet, so wird die Gesichtslinie nach dem Sterne genauer werden, und zudem hat man den Vorteil, daß die eine der beiden Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$ zur Kontrolle der anderen dient. Curtze war allerdings der Meinung, der kleinere Querstab habe lediglich zur Beseitigung des Augenfehlers dienen sollen, allein es scheint, da auch die Folgezeit mehrere Stäbe anwandte, die obige Auffassung manches für sich zu haben. So hielt ersterer auch dafür, das Wort „gehörnt" beziehe sich blos auf die Okularplatte, um den Stab bequem ans Auge legen zu können; das ist gewiß zutreffend, doch wird dadurch nicht ausgeschlossen, daß eine solche Gestalt auch bei den anderen Platten das Anvisieren erleichterte; Levi setzte je nach den Umständen, unter denen er beobachtete, sechs verschiedene Querstäbe außer $C_1 C_2$ auf.

rechnung[1]); es wird von ihm, einer Angabe v. Braunmühls zufolge[2]), erstmalig der Sinussatz der ebenen Trigonometrie in klarer Wortfassung formuliert.

Stellen wir nun die Frage, ob der südfranzösische Jude einer ganz neuen Erfindung sich rühmen durfte, oder ob von anderer Seite ihm bereits derart vorgearbeitet war, daß es nur noch auf die Einsetzung eines Schlußsteines in ein nahezu fertiges Gebäude ankam, so dürfen wir sagen:

Gersonides mußte seiner ganzen Bildung nach mit dem „Almagest“ des Ptolemaeus bekannt sein, und er konnte sehr leicht auch davon wissen, daß eine Gruppe von Seeleuten zur Höhenmessung auf dem Meere eine Vorrichtung verwandte, welche bei aller Unvollkommenheit grundsätzlich mit der Dioptra des Hipparch übereinstimmte. Bei solcher Sachlage mußte sich das Instrument, weches „zur Entschleierung der Geheimnisse“ ausersehen war, ganz von selbst ergeben. Als einziges selbständiges, allerdings aber nicht zu unterschätzendes Verdienst bleibt das übrig, daß Levi sich nicht mehr engherzig an die Verwendung seiner Stäbeverbindung in der Meridian- oder doch in einer Vertikalebene hielt, sondern das Problem der sphärischen Distanzmessung in voller Allgemeinheit stellte und löste. Aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts liegt — vor Regiomontan — kein Beleg für die Annahme vor, Levis Erfindung sei in weitere Kreise durchgedrungen. Man müßte denn als eine historische Tatsache die in Walter Scotts Roman „Quentin Durward“ zu findende Notiz gelten lassen wollen, König Ludwig XI. von Frankreich habe seinem Hofastrologen einen Jakobsstab von Silber machen lassen.

---

[1]) Das erhellt auch aus den Kapitelaufschriften: „Cap. III. De Divisione Orbium, et Sphaerarum; Item quid dicatur arcus? quid Sinus, et quid Sagitta? Cap. IV. Declaratio Tabularum Sinuum.“ Die Sagitta ist soviel wie der Sinusversus.

[2]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 1. Teil, Leipzig 1900, S. 104 ff.

Ein moderner Leser könnte ja Anstoß daran zu nehmen geneigt sein, daß der mittelalterliche Erfinder ganz und gar keine Notiz von seinen Vorgängern nimmt, so daß, wer die Vorgeschichte des Instrumentes nicht näher kennt, an dessen spontaner Entstehung zu zweifeln keinen Grund hat. Der Begriff der Priorität und ihrer pflichtmäßigen Anerkennung ist jedoch eine Errungenschaft der Neuzeit. Erst sehr allmählich hat er sich in den gelehrten Kreisen durchgesetzt, und wir haben gleich nachher noch auf einen richtigen Plagiatfall Bezug zu nehmen, der schwerlich selbst dann, wenn er bekannt geworden wäre, Aufsehen erregt und Verurteilung gefunden haben würde.

Der Mann, welcher der Verwertung des Jakobsstabes in der gesamten Sternkunde, nicht blos in der Astronomischen Geographie, die Bahn brach, war der große Reformator Johannes Regiomontanus (Müller aus Königsberg in Franken, 1436—1476). Da sein hierauf bezügliches Werk im Drucke erschien, so lag es nahe genug, daß man ihn, der eines Vorläufers nicht gedachte, als den Erfinder ansprach, wie dies vielleicht zuerst durch den berühmten Porfugiesen Nunes (Nonius)[1] und späterhin von fast allen Schriftstellern, mit besonderer Energie zuletzt von Breusing (s. o. S. 318) geschehen ist. Doch ist zwischen Levi und Regiomontan noch eine Etappe zu bemerken; man kann feststellen, daß der Jakobsstab schon früher, in den vierziger Jahren des 15. Jahrhunderts, auch für die Aufgaben des Feldmessers verwendet worden ist[2]. Jedenfalls hat der Nürnberger Gelehrte als der erste das Instrument einem Zwecke dienstbar gemacht, welcher bis dahin

[1] Nonius, De regulis et instrumentis, Coimbra **1546**, lib. II, cap. 6; Opera cuncta, Basel **1566**, S. 73 ff.

[2] Ein Franziskaner Theodorich Ruffi gibt in einer zwischen **1445** und **1450** zusammengestellten Handschrift (Cod. lat. Monac. **11067**) eine Anweisung, wie der „baculus geometricus alias baculus Jacob“ zur Messung linearer Entfernungen und vertikaler Abstände nutzbar gemacht werden kann (Günther, Die Erfindung des Baculus Geometricus, Bibliotheca Mathematica, (1) 1885, S. 137 ff.; Schück, a. a. O., S. **104**).

ganz außerhalb des Gesichtskreises der mit jenem umgehenden Astronomen und Praktiker gelegen war.

Regiomontan ist auch der Begründer der Kometenastronomie; er war der erste, der die Beschäftigung mit den Schweifsternen, welche seit Aristoteles als Gebilde der sublunaren Welt angesehen wurden, aus der niedrigen Sphäre bloßer Spekulationen und Träumereien zu einer selbständigen wissenschaftlichen Spezialdisziplin erhob. Seine Kometenschrift ist allerdings erst lange nach seinem Scheiden zum Drucke befördert worden[1]), muß jedoch schon früher bekannt geworden sein. Er legte Gewicht darauf, die (scheinbaren) Größenverhältnisse eines im Jahre 1471 erschienenen großen Kometen zu ermitteln, und hiezu konnte nur ein Meßwerkzeug gebraucht werden, welches sich mit einer beliebigen Ebene im Raume zur Deckung bringen ließ[2]). Der Längsstab war in 1300 gleiche Teile geteilt, und von diesen gingen 210 auf die Volvella. Die berühmte „Tabula foecunda", deren Berechnung zu Regiomontans Hauptverdiensten um reine und angewandte Mathematik gehört, wurde nach Wolfs Ansicht nicht für die Auswertung der Beobachtungen benützt, weil ja nicht der halbe, sondern der ganze Winkel angestrebt worden sei, allein das dürfte doch kaum zutreffen, und wir stimmen in diesem Punkte mehr Breusing (s. o.) zu, wenn er sagt, gerade hier habe sich die neue „fruchtbare", d. h. Tangententafel besonders gut bewähren können. Übrigens bekundete der Jakobsstab seine Verwendbarkeit auch bei der Bestimmung der Entfernungen zwischen Planeten und Fixsternen, wie nachstehendes Beispiel erkennen läßt[3]): „1471 Die 9 Septembris mane Mars ab humero dextro Orionis 210 : 674, a Capite Gemini praeced. et septentr. 210 : 662". Wie wir erfuhren, hatte ja schon Leo

[1]) Regiomontanus, De cometae magnitudine longitudineque aede loco ejus vero problemata XVI, ed. J. Schoener, Nürnberg 1531.

[2]) Vgl. dazu R. Wolf, Gesch. d. Astron., S. 125 ff.

[3]) Vgl. auch Regiomontanus-Schoener (Schonerus), a. a. O., problema IX.

Messungen dieser Art auf sein Programm gesetzt, aber erst Regiomontan hat sie tatsächlich vorgenommen.

Da erhebt sich nun ganz von selbst die Frage: Wußte er etwas von seinem Vorläufer, oder ist er ganz aus eigener Kraft auf so wesentliche Verbesserungen der Instrumentaltechnik verfallen? Nun, es stellt sich — wir Angehörige einer neuen Zeit und Anhänger einer vervollkommneten literarischen Ethik müssen sagen leider — als Tatsache heraus: Der geniale Mann, dem die Wissenschaft so viel verdankt, und der es gewiß nicht nötig gehabt hätte, sich mit fremden Federn zu schmücken, war ein Plagiator[1]). Ohne von der Streitfrage, um die es sich in diesem Falle handeln kann, Kenntnis zu haben, ganz unabhängig und objektiv hat der Nürnberger Archivbeamte Petz bei seinen Untersuchungen über die große und zu einem erheblichen Teile verschleuderte Bibliothek J. Müllers die Wahrnehmung gemacht[2]), daß dieser die Schrift Levis nicht etwa nur gekannt, sondern selbst besessen hat. Der Katalog, den der Schüler, Gehilfe und Freund des 1475 aus Nürnberg nach Rom gewanderten und dort sehr bald verstorbenen Astronomen über dessen hinterlassene Bücherschätze ausgearbeitet hat, und der glücklicherweise auf uns gekommen ist, verzeichnet unter den Autoren ganz unzweideutig den „Leo de Baneolis“. Damit ist der Nachweis erbracht, daß dem Regiomontanus das

[1]) Hierüber äußerte sich der Verf. seinerzeit (1903) in einem Vortrage, den er in Rom auf dem Internationalen Historischen Kongresse hielt, und der von keiner Seite aus dem Kreise der Zuhörer Widerspruch erfuhr. Vgl. S. Günther, Lo sviluppo del celebre strumento astronomico-geodetico chiamato „Jakobsstab“ ovvero „radius astronomicus“, Atti del Congresso Internazionale di Science Storiche, 12. Band, Rom 1904, S. 187 ff. Wie früher angedeutet, haftet einem Plagiate des ausgehenden Mittelalters nicht jener ominöse Beigeschmack an, der nach unserer jetzigen Auffassung damit verbunden ist, weil eben ältere Arbeiten ala Gemeingut gelten — vorab dann, wenn etwa, wie hier der Fall, gewisse Verbesserungen nicht in Abrede zu stellen waren.

[2]) J. Petz, Mitteilungen des Vereines für Geschichte Nürnbergs, 7. Heft, S. 123.

Verdienst zuerkannt werden muß, den Jakobsstab umfassender angewandt und der Nachwelt als ein Instrument von hoher Brauchbarkeit überliefert zu haben; Erfinder desselben dagegen, wie Breusing[1]) meinte und mit der an ihm erprobten Zähigkeit immer wieder betonte, ist er nicht gewesen.

IV. Der Jakobsstab im Entdeckungszeitalter.

Um die Zeit, in deren Spielraum sich der vorige Abschnitt bewegt, hatte sich bei den beiden iberischen Nationen die gewaltige Bewegung durchzuringen begonnen, für welche die Bezeichnung Ära der Entdeckungen herrschend geworden ist[2]). Für die Kapitäne und Steuerleute, welche während der fruchtbaren Schaffensperiode Heinrichs des Seefahrers und gegen Ende des 15. Jahrhunderts im Gefolge Colóns und Vasco da Gamas tätig waren, stand die Notwendigkeit, zutreffende Bestimmungen der geographischen Breite zu erhalten, im Vordergrunde, während ernsthafte Bemühung um die Meereslänge freilich noch lange ein frommer Wunsch bleiben mußte. Daß die Geschichtschreibung auf diesem Arbeitsfelde es nicht an sich hat fehlen lassen, ist bekannt, und da der Jakobsstab schon erfunden war, so lag die Frage ungemein nahe, ob derselbe bereits bei den Fahrten, welche nach Westafrika, Westindien und Hindostan gerichtet waren, seine Rolle gespielt habe. Die Vermutung, es möge sich so verhalten haben, lag an sich nahe, denn der große Vorzug, den eine frei in der Hand zu haltende Stabverbindung gerade auf hoher See gegenüber den Instrumenten mit Kreisteilung im herkömmlichen Sinne besitzt, ein nachmals auch für den Spiegelsextanten charakteristischer Vor-

---

[1]) Noch in einem Vortrage, den der Altmeister 1883 auf dem 3. Deutschen Geographentage in Frankfurt a. M. hielt, war er von seiner Behauptung nicht abzubringen, obschon ihm damals bereits Ruffis feldmesserischer Jakobsstab als Gegenbeweis vorgeführt werden konnte.

[2]) Vgl. S. Günther, Das Zeitalter der Entdeckungen, 4. Auflage, Leipzig 1919.

zug liegt so klar zu tage, daß man ganz natürlich auf den Gedanken verfallen mußte, die portugiesischen und spanischen Seeleute müßten ein Instrument hoch geschätzt haben, das seinem Grundzuge nach doch schon bei ihren naiven Kollegen in den östlichen Meeren gebräuchlich war. Es wird sich indessen herausstellen, daß diese Annahme sich durch keinen erkennbaren Nachweis stützen läßt, wenigstens sofern derselbe ein literarisches Gepräge tragen soll. In unseren Tagen wäre ein solcher Nachweis etwas so selbstverständliches, daß mit seinem Fehlen die ganze Frage als erledigt angesehen werden dürfte. Ob auch für eine Zeit vor vier- bis fünfhundert Jahren derselbe Schluß durchaus gerechtfertigt erscheint, soll weiter unten einer besonderen Untersuchung unterstellt werden.

In den letzten Jahren hat man der Nautik zumal der Portugiesen eine gründliche Forschung zu teil werden lassen[1]), durch welche die in ihrer Art auch bereits sehr verdienstlichen Ergebnisse A. v. Humboldts[2]) nach allen Seiten hin erweitert und vertieft worden sind. Während Prinz Heinrich lebte, war eine Vervollkommnung des Instrumentariums noch nicht so dringend notwendig, wie sie es später wurde, denn bis 1460 behalf man sich in der Hauptsache mit reiner Küstenschiffahrt, und erst recht langsam wagte man zur Hochseefahrt überzugehen. Erstere war mit einer Schätzung des erreichten Ortes auf rein terrestrischem Wege, d. h. durch Kurswinkel und Fahrtlänge, zufrieden, und nur aushilfsweise stellte man bei einer Landung eine Höhenmessung des Polarsternes mit Hilfe des Astrolabiums an; schon bald frei-

[1]) Über viele einschlägige Probleme, die nur zum Teile mit dem uns hier beschäftigenden unmittelbar zusammenhängen, orientiert in sehr eingehender kritischer Darlegung H. Wagner (Die Entwicklung der wissenschaftlichen Nautik im Beginn des Zeitalters der Entdeckungen, Annalen der Hydrographie, 46. Band (1918), S. 105—118, S. 153—173, S. 215—253, S. 276—281).

[2]) A. v. Humboldt-L. Ideler, Kritische Untersuchungen über die Entwicklung der geographischen Kenntnisse von der Neuen Welt, Berlin 1852.

lich zeigte sich in Guinea, daß dieser Stern sich zu wenig über den Horizont erhob, um eine schärfere Höhenbestimmung zu ermöglichen, und daß man sehr betreten war, nach Überschreitung des Gleichers keine entsprechende Sternmarke am Südhimmel vorzufinden, ist bekannt. Die erste zielbewußte Polhöhenbestimmung hat anscheinend Diogo Gomes de Cintra 1462 vorgenommen[1]), als mithin der große Patron der afrikanischen Entdeckungen nicht mehr unter den Lebenden weilte[2]). Die lusitanische Literatur über astronomische Seefahrtskunde datiert erst aus einem späteren Dezennium, wird jedoch dann schon bald viel reichhaltiger, als dies noch vor kurzem allgemeiner geglaubt ward. Ein portugiesischer Schriftsteller, der

[3]) Mit Fug bemerkte L. Hugues (Storia della geografia e delle scoperte geografiche, Turin-Florenz-Rom 1891, S. 254 ff.), es sei auffallend, daß von Gomes in den Geschichtswerken nicht mehr gesprochen werde. Er weist hin auf die Münchener Manuskriptsammlung (s. u.), welche dem Valentim Fernandes ihre Entstehung dankt, und welche die beiden Reisen des Erstgenannten an die afrikanische Westküste ins Licht stellt. Kontrovers ist übrigens noch die Frage, ob Gomes der tatsächliche Entdecker der Kapverden war (vgl. J. Rackl, Die Reise des Venetianers Cà da Mosto an der Westküste Afrikas, Nürnberg 1898; Günther, Geschichte der Erdkunde, Wien-Leipzig 1904, S. 74).

[4]) Den Einfluß des Infanten auf den eigentlich wissenschaftlichen Teil der Schiffahrt richtig abzuschätzen, ist nicht leicht. Als erfinderischen Kopf suchte ihn, gewiß mit Unrecht, R. Guimarães (Les Mathématiques en Portugal, Coimbra 1909, S. 8 ff.) herauszuheben, allein das ist er nicht gewesen, wie Wagner (a. a. O.) dargetan hat. Seine Bedeutung lag stets auf dem weiten Felde der Organisation. Den Prinzen und seinen Hilfsarbeiter würdigte schon in früherer Zeit C. Lusitano, (Vita do Infante Dom Enrique, Lissabon 1758, S. 196 ff.) und in neuerer Hamy (Cresques le Juheu; note sur un géographe juif Catalan de la fin du quinzième siècle, Paris 1891). Daß 1438 der katalonische Jude Jafuda (Jaime) Cresques nach Sagres berufen ward, um dort die auf den Balearischen Inseln — er stammte von Mallorca — zu einer gewissen Blüte gediehenen Kenntnisse einzubürgern, ist allerdings wahrscheinlich (M. Kayserling, Christoph Columbus und der Anteil der Juden an den spanischen und portugiesischen Entdeckungen, Berlin 1894, S. 5 ff.). Man rühmte ihm, der zuvor in Barcelona gelebt hatte, Verdienste um die Anfertigung von Kompassen und Astrolabien nach; als Kartenzeichner stand er einzig da.

seine Studien auch in Deutschland gemacht hatte, wurde von seiner Regierung beauftragt, das gesamte gedruckte Material zu sichten und neu, großenteils im Faksimile-Druck, herauszugeben. Drei der so der Gegenwart geschenkten Werke sind Inkunabeln; die drei übrigen reichen schon tiefer in das 16. Jahrhundert hinein[1]). Von ihnen handelt des näheren die genannte Wagnersche Monographie und eine ebenfalls bemerkenswerte Besprechung des Astronomen B. Cohn[2]), die, soweit sie sich auf das Fach des Referenten bezieht, völlige Beherrschung des Stoffes bekundet, der Geschichte der Geographie dagegen offenbar zu ferne steht[3]). Der Herausgeber

[1]) Wir geben nachstehend die sechs Werke an: I. Regimento do Estrolabio-Tratado da Spera, s. u. (Exemplar der Staatsbibliothek in München); II. Das nämliche Lehrbuch (Exemplar der Bibliothek von Evora, gewissen inneren Kennzeichen gemäß jünger als das Münchener); III. Almanach perpetuum des Abraham Zacuto, Leiria 1496; IV. Francisco Faleiro, Tratado da Esphera y del arte de marear con el Regimento de las alturas, Sevilla 1535; V. Pedro Nunes (s. o. S. 321), Tratado da Esphera, Lissabon 1537; VI. Valentim Fernandes, Repertorio dos Tempos, Lissabon 1563.

[2]) B. Cohn, Rezension, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 51. Jahrgang, 1. Heft.

[3]) Es wird die Art und Weise, wie die ältesten Druckvorlagen der Entdeckungsgeschichte die Breitenbestimmung sowohl durch Sonnen- als durch Polarsternhöhen schildern, allgemeinverständlich auseinandergesetzt; die erstere Methode ist durchaus die der Jetztzeit geläufige, während die zweite schon einer Erläuterung bedarf. Denn soviel wußte man, im Gegensatze zu der rohen Manier der indoarabischen Piloten (s. o. S. 315), daß eine gewisse, vom Stundenwinkel des Sternes abhängige Korrektur nicht umgangen werden kann, weil eben derselbe nicht mit dem Umdrehungspole zusammenfällt. Gleichzeitig mit der Höhe von Polaris wurden die Stellungen der „Wächter", zweier Sterne im Kleinen Bären, beobachtet; nach A. Wolfer waren es β und γ Ursae minoris. Eine einfache Rechnung liefert sodann die gesuchte Höhe. Wenn Cohn im Hinblick auf die bereits vorhandenen älteren Schriften (s. o. S. 302) die Ansicht ausspricht (S. 51), Quadrant und Astrolabium müßten ziemlich frühzeitig in Portugal bekannt gewesen sein, so daß ein späterer Import aus dem Auslande sich erübrigt habe, so kann man ihm darin nur vollständig beipflichten. Desto mehr überrascht eine sich anschließende Bemerkung, „ein gewisser Peutlinger (sic!) sei es gewesen, der die

des Ganzen, Joaquim Bensaude, hat auch eine zusammenfassende Übersicht über seine mühsame Pfadfindertätigkeit gegeben[1]), geleitet von dem berechtigten Gefühle, daß ein Volk von so ungeheurer Tatkraft, wie es das portugiesische im Zeitalter Heinrichs, Johanns II. und Emanuels I. war, unmöglich so stümperhaft in der wissenschaftlichen Grundlegung des Explorationswerkes gewesen sein könne, wie es der Mangel an Handschriften und Frühdrucken wahrscheinlich machen konnte.

Nunmehr vermögen wir uns also ein Bild von den Kenntnissen und Hilfsmitteln zu machen, welche damals, als Bartolomeu Dias die Vorbereitungen zu seiner an das Kap der guten Hoffnung führenden Reise traf, ihm und der vaterländischen Marine zu Gebote standen. Der Jakobsstab befindet sich, so viel steht fest, nicht darunter. Und daß er bereits einer auserlesenen Schar von Fachmännern mitgeteilt worden sei, ist zwar früher ziemlich allgemein angenommen, niemals jedoch erwiesen worden.

Wir sind damit bei der viel umstrittenen, völliger Klärung wohl überhaupt unzugänglichen Behaimfrage angekommen[2]).

Verbringung des „Regimento" nach München veranlaßt habe. Sollte dem Rezensenten die für den Geographen so wichtige, wenngleich nicht etwa als kartographisches Denkmal hervorragende „Tabula Peutingeriana" so sehr entgangen sein, daß sich die erwähnte Namensverstümmelung erklären läßt? Vgl. über die Tafel die zurzeit wohl inhaltreichste Schrift (A. Elter, Itinerarstudien, Bonn 1908), worin die drei dem 4. nachchristlichen Jahrhundert angehörigen Reisekarten verglichen und als wesentlich demselben leitenden Gesichtspunkte entstammend nachgewiesen werden.

[1]) J. Bensaude, L'astronomie nautique au Portugal à l'époche des grandes découvertes, Bern 1912. Eine kurze deutsche „Einleitung" liegt gleichfalls vor (München 1914).

[2]) Was vor dreißig Jahren über diesen Mann auszumitteln war, vereinigt eine Schrift des Verf. (Martin Behaim, Bayerische Bibliothek, Band 13, Bamberg 1890). Nicht geleugnet kann werden, daß sich dieselbe zu sehr auf den fast allseitig eingenommenen und zumal von Breusing vertretenen Standpunkt gestellt und ihren Helden günstiger geschildert hat, als dies für unsere gegenwärtige, durch zahlreiche Einzelforschungen geklärte und vertiefte Einsicht zulässig erscheint. In ein

Gewiß ist, daß König Emanuel zur Verbesserung der Nautik eine Kommission, die „Junta dos mathematicos“, niedersetzte, zu deren Mitgliedern jener Nürnberger Patrizier, dessen Charakterbild so stark in der Geschichte schwankt, gehört haben muß[1]). Die beiden Hauptpersonen waren die israelitischen Leibärzte des Fürsten, Josepe und Rodrigo. Anscheinend als auswärtiger Berater wurde zu ihren Arbeiten zugezogen der Bischof von Ceuta, ein geborener Spanier Diego Ortiz, der sich viel mit kosmographischen Dingen abgab[2]). Eine nicht ganz übersehbare Stellung jener Junta gegenüber müßte Abraham Zacuto eingenommen haben, dessen zwar erst 1496 gedruckter, aber schon zwanzig Jahre (1473—1478) verfaßter „Ewiger Almanach“ bereits eine Tabelle der solaren Deklinationen δ in sich schloß, wie sie erforderlich war, um nach der Regel $\varphi = 90^0 - h - \delta$ die Breite φ aus der Mittagshöhe h zu berechnen. Irgend eine Beeinflussung Zacutos durch Regiomontan ist[3]) nicht erkennbar, wiewohl nicht

---

freilich noch weit ausgesprocheneres pessimistisches Extrem verfiel die umfängliche Biographie von E. G. Ravenstein (Martin Behaim, his Life and his Globe, London 1905).

[1]) Über die Zusammensetzung der „mathematischen Vereinigung“ berichten mehrere Autoren; so vor allem auch Guimarães (a. a. O., S. 11 ff.). Die beiden jüdischen Ärzte hatten auch, unter Leitung eines Bischofs Calçadilha, die Herstellung jener Karten besorgt, mit denen Pedro da Covilão und Affonso da Païva ausgerüstet wurden, als man sie 1487 zum „Presbyter Johannes“ nach Habesch entsandte. Ortiz und Calçadilha hatten Johann II. widerraten, sich auf das Projekt des Columbus einzulassen. Mestre Josepe hieß von Hause aus Vizinho; von ihm wird erzählt, er habe 1485 auf königlichen Befehl Polhöhen von Orten Guineas gemessen. Auch wird er der Übersetzer von Zacutos „Almanach“ gewesen sein.

[2]) Von einem Moses, der die Junta unterstützt haben soll (Schück, a. a. O., S. 129), wissen andere Quellen nichts.

[3]) Der Umstand (Cohn, a. a. O., S. 49), daß für die Schiefe der Ekliptik Regiomontan und Zacuto verschiedene Werte haben (jeweils 23° 30′ und 23° 33′), ist kaum von Bedeutung; denn es liegt auf der Hand, daß der Iberer bei einem maurischen Astronomen, etwa bei Arzachel, sich leicht eine Zahl verschafft haben konnte, von welcher sein deutscher Fachgenosse nichts wußte. Auf die Beziehungen zwischen

grundsätzlich von der Hand zu weisen. Es ist demnach sehr wohl denkbar, daß der Lissaboner Ausschuß die ihm zugeschriebene Aufgabe, eine Tafel für die den einzelnen Tagen entsprechenden Meridianhöhen der Sonne auszuarbeiten, gelöst hat, indem er sich an den als Astronomen gut berufenen Zacuto wandte, der zwar damals noch nicht in Portugal wohnte[1]), immerhin aber als eine Art auswärtiges Mitglied der Kommission um Rat gefragt worden sein konnte.

Behaims gewiß nicht gleichgiltige Stellung am Lissaboner Hofe wurde von verschiedenen Autoren damit in Verbindung gebracht, daß man ihm die Übermittlung des Jakobsstabes und der Müllerschen „Ephemeriden“ beilegte. Beide Errungenschaften einer damals äußerst jungen Vergangenheit sollte er aus der Heimat, aus Nürnberg, mitgebracht haben, wo er angeblich Privatunterricht durch den Meister empfing. Ausgeschlossen ist das ganz und gar nicht, denn die großen ratsfähigen Familien der Reichsstadt waren gewiß nicht ohne Einfluß auf die Entschlüsse des Gelehrten, der seinerseits an dem aufgeweckten Jüngling von 15 bis 16 Jahren Gefallen gefunden haben mag. Allein alles ist nur Hypothese[2]),

---

Zacuto und Regiomontan uns einzulassen, sind wir an diesem Orte um so weniger verpflichtet, weil durch Wagner (a. a. O., S. 113 ff.) diese Frage bereits vollständig aufgehellt worden ist.

[1]) Zacuto mußte infolge einer der üblichen Moriskenverfolgungen Spanien verlassen und 1492 nach Portugal fliehen; freilich nur um 1502 daselbst einer neuen Hetze anheimzufallen. Er starb 1515 in seinem letzten Exil, in Kleinasien.

[2]) Soviel demnach auch an Behaims vermeintlichen Leistungen gestrichen werden mußte, so wird gleichwohl gegen die herabsetzende Art Ravensteins nach wie vor entschiedene Einsprache zu erheben sein. Auch anderwärts (Peschel-Ruge, a. a. O., S. 215; Cohn, a. a. O., S. 50) begegnet man immer dem Tadel, der berühmte Globus, den jetzt noch das Germanische Museum in Nürnberg verwahrt, weise eine Anzahl ganz falscher geographischer Breiten auf, und es wird daraufhin sogar geschlossen, Behaim habe gar nicht an der Fahrt Diogo Cãos zur Kongomündung teilgenommen. Dieser Vorwurf zerfällt in nichts, wenn man sich der Umstände erinnert, unter denen der „Erdapfel“ zustande kam. Dessen Verfertiger war 1493 nach Nürnberg gekommen.

und wenn doch der Jakobsstab verhältnismäßig früh im Westen der Pyrenäischen Halbinsel Eingang gefunden haben sollte, so kann nur Zacuto, nicht aber Behaim der Vermittler gewesen sein.

---

um dort eine schwierige Erbschaftsregulierung durchzuführen. Das ist urkundlich beglaubigt (Günther, M. Behaim, S. 33 ff.), und daß er da in seinem Koffer die authentischen Daten mitgeführt hätte, zu denen die verschiedenen Guineafahrten seinem Adoptiv-Vaterlande verholfen hatten, wird nicht leicht jemand glauben. In der Heimat sich geographisch zu betätigen, lag ihm gänzlich ferne, und nur dem Andringen der obersten Beamten Nürnbergs war das Werk zu danken, welches aus dem Stegreif entstehen mußte und trotzdem seinen Meister lobt. Eine Möglichkeit allerdings, wie Behaim durch einen ungefähr dem gleichen Zeitabschnitte angehörigen Wiegendruck zu falschen Eintragungen in die Karte Afrikas veranlaßt worden sein könnte, deutet Pater J. Fischer an („Der Deutsche Ptolemaeus aus dem Ende des 15. Jahrhunderts", Straßburg i. Els. 1910, S. 45). Aber auch der sogenannte Münzer-Brief spricht gegen die Annahme, Behaim habe in Portugal nur eine ganz untergeordnete Rolle gespielt. Über jenes Schreiben wurde man erstmalig durch eine Denkschrift Kunstmanns unterrichtet (Hieronymus Münzers Bericht über die Entdeckung von Guinea mit einleitender Erklärung, Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Histor. Klasse, VII, 2, S. 289 ff.). Der Mitteilung, welche der weitgereiste Nürnberger Arzt Münzer (Monetarius), ein geborener Vorarlberger aus Feldkirch, an König Johann II. richtete, war Kunstmann auf die Spur gekommen, aber über den genauen Wortlaut und Zusammenhang hat uns erst die neueste Zeit unterrichtet (R. Stauber-O. Hartig, die Schedelsche Bibliothek, Freiburg i. B. 1908; O. Hartig, Der Brief des Dr. Hieronymus Münzer vom 14. Juli 1493 über die Westfahrt nach Kathay in portugiesischen Druckwerken, Histor. Jahrbuch der Görres-Gesellschaft, München 1908, S. 834 ff.; H. Grauert, Die Entdeckung eines Verstorbenen zur Geschichte der großen Länderentdeckungen, ebd., 1908, S. 304 ff.). Die für uns bedeutsame Stelle, die auch Harrisse (The Discovery of North-America, Paris-London 1892, S. 393 ff.) seiner Aufmerksamkeit gewürdigt hat, ist diese (verdeutscht): „Wenn Du diese Expedition" — wie sie Columbus bereits geplant hatte — „aber durchführst, wird man Dich wie Gott erheben oder wie einen zweiten Hercules, und Du wirst, wenn es Dir beliebt, für diese Fahrt auch einen von unserm Könige Maximilian abgesandten Begleiter haben, den Herrn Martin Behaim . . ." Letzterer beendigte eben damals seinen fast zweijährigen Aufenthalt in Nürnberg, und man wird mit Grauert und

Denn daß ersterer den Levi ben Gerschom gekannt hat, ist als sicher zu betrachten[1]), und wenn es sich so verhielt, so mußte er, der sich in Salamanca eine gute wissenschaftliche Bildung geholt hatte, den hohen Wert des Instrumentes unbedingt begriffen haben. War er doch auch kein Spanier von Geburt, sondern ein Südfranzose, des Gersonides richtiger Landsmann. Aus dem uns bekannten Artikel Steinschneiders in der „Enzyklopädie“ (s. o. S. 321) geht hervor, daß Zacuto den „Revelator“ gekannt und demzufolge auch den Jakobsstab als ein für den Seemann ausnehmend geeignetes Winkelmeßinstrument erkannt haben muß.

So läßt sich denn also eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür nicht abstreiten, daß bereits in den letzten Dezennien des 15. Jahrhunderts die seemännische Welt Portugals in der Lage gewesen wäre, Beobachtungen mit einem Instrumente vorzunehmen, dessen hohe Verwendbarkeit auf dem Meere sich ganz von selbst verstand, dessen Überlegenheit im Vergleiche mit dem Astrolabium oder dem mittelalterlichen Quadranten gar nicht in Zweifel gezogen werden konnte. Wie sollte man es dann aber erklären können, daß die nautisch-astronomischen Lehrbücher, deren Inhalt jetzt klar vor uns liegt, kein Wort darüber enthalten? Freilich keinerlei Gewißheit, wohl aber die Möglichkeit einer Deutung der so sonderbar anmutenden Tatsache würde die von uns gleich in unserer ersten Veröffentlichung[2]) ausgesprochene Vermutung gewähren, daß die Verheimlichungspolitik der

E. do Canto (Archivio dos Azores, Ponte Delgada 1878—1880, S. 447 ff.) anzunehmen berechtigt sein, daß der an den portugiesischen Hof zurückgekehrte Ritter Behaim das wichtige Schriftstück selbst in des Königs Hände gelegt hat. Unbegreiflich dünkt es uns, daß man aus dieser so ehrenvollen Empfehlung hat den Schluß ziehen wollen, vor seiner Deutschlandreise sei die Stellung des Zurückgekehrten keine besonders geachtete gewesen — desselben Mannes, den schon 1494 Johann II. mit einer diplomatischen Sendung nach Belgien betraute (Günther, M. Behaim, S. 44 ff., S. 79).

[1]) Schück, a. a. O., S. 128.

[2]) Günther, Die erste Anwendung usw., S. 78.

Lissaboner Staatsmänner den Gebrauch des Jakobsstabes als Staatsgeheimnis gehütet hätte. Mit allem, was wir über die Engherzigkeit jener Zeit wissen, würde sich dieser Gedanke sehr wohl vereinbaren lassen. Insonderheit wird die nationale Eifersucht gegenüber dem größeren und kontinental mächtigeren Staate der Pyrenäischen Halbinsel das Abschließungssystem noch verschärft haben, denn Spanien wußte noch ziemlich viel später nichts von dem Meßapparate, der ihm, als es selber in die Reihe der Conquistodorenstaaten eintrat, von größtem Nutzen gewesen sein müßte[1]). Daß hernach die Spanier es nicht anders machten, wird ja jedermann begreiflich finden[2]). Man muß sich gegenwärtig halten, daß

---

[1]) Von R. Monléon (La nao Santa Maria, capitána de Cristóbal Colón en el descubrimiento de las Indias Orientales, reconstituida per iniciativa del Ministerio de Marina, Madrid 1892) wird behauptet, damals seien schon allgemein mehrere astronomische Instrumente im Gebrauch gewesen, so auch „balestilla, bàculo ó radio astronómico". Daß das nicht zutrifft, betont Gelcich in seiner Rezension (Ausland, 65. Band, S. 799 ff.). Keiner der zeitgenössischen und späteren Schriftsteller weiß davon etwas. Auf Diogo Ribeiras Karte seien alle üblichen Beobachtungswerkzeuge abgebildet, der Jakobsstab dagegen nicht. Pigafetta, des Magellan astronomischer Berater bei der ersten Erdumseglung, kennt die Balestilla so wenig wie der zeitlich erste spanische Kompendiograph der nautischen Geographie („Suma de Geografia", Sevilla 1519), der durch seinen Prozeß gegen Balboa, den Entdecker der Südsee, ziemlich unvorteilhaft in der Geschichte erscheinende Rechtsverständige Encisco.

[2]) E. Gelcich (Beiträge zur Geschichte der ozeanischen Schiffahrtsregeln und Segelanweisungen, Ausland, 65. Band, S. 792) macht nach dieser Seite hin eine beachtenswerte Mitteilung: „Der Neid und die Eifersucht, welche zwischen Spaniern und Portugiesen gegenseitig und zwischen diesen und den nordischen Seenationen bestanden, hatten die Folge, daß die Errungenschaften des einen seefahrenden Volkes nicht gleich auch den anderen zugute kamen; jedes hatte sogar auf die Ausfuhr von Seekarten, Segelanweisungen usw. die Todesstrafe gesetzt." Das wertvolle Werk des Asturiers Juan Escalante de Mendoza durfte nach Navarrete (Biblioteca maritima española, 2. Band, Mailand 1851, S. 559) laut Verfügung des Indienrates noch 1557 nicht an die Öffentlichkeit treten, „porque temió el gobierno et hacerla ostensible á les extranjeros". Die koloniale Zentralstelle in Sevilla, „Casa de Contratácion" genannt, trieb unter diesem Gesichtspunkte schändlichen Mißbrauch mit

solches Versteckenspielen mit wissenschaftlichen Neuerungen fast bis in unsere Tage herein den Staatslenkern eine Notwendigkeit dünkte, und daß so auch dem Landkartenwesen, weil man einem Feinde das Eindringen in das eigene Land tunlichst zu erschweren gedachte, schwerer Nachteil zugefügt ward[1]). Tritt man im Besitze dieser geschichtlichen Tatsachen, deren schriftliche Fixierung aus einleuchtenden Gründen unterblieb, an die Prüfung der hinsichtlich des neuen Instrumentes sich erhebenden Zweifel heran, so stellt sich manches in anderem Lichte dar. Des Nonius Werke (s. o. S. 326) sind die ersten von einem portugiesischen Gelehrten geschriebenen, welche eine im übrigen Europa längst verbreitete Erfindung dem eigenen Volke übermitteln.

V. Das 16., 17. und 18. Jahrhundert.

Man darf sagen, daß der Jakobsstab sich durch drei Jahrhunderte in der Geltung behauptete, die er sich, wie wir sahen, nicht ohne gewisse Schwierigkeiten, um die Wende des 15. Jahrhunderts zu erringen begonnen hatte. Zwar hätte man mutmaßen dürfen, daß ihm durch die Erfindung der Spiegelinstrumente der Rang endgiltig abgelaufen worden wäre[2]), allein so verhielt es sich bei dem zäh-konservativen Charakter der Seeleute keineswegs, und erst seit 1750 setzte sich der Oktant bei der britischen Marine allgemein durch. Zunächst war es auch vorzugsweise der geometrische Visierstab, der in den Kreisen der Praktiker sich viele Freunde erwarb;

der ihr staatlicherseits überwiesenen Aufgabe der Instrumentprüfung (Gelcich, Beiträge zur Geschichte der Entdeckungen, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 1885, S. 14 ff.).

[1]) Nach E. Oberhummer (Die Entstehung des Kartenbildes von Niederösterreich, Monatshefte des Vereins für Landeskunde von Niederösterreich, 1918, Nr. 9) durfte die „josephinische Landesaufnahme“ erst 1787 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden!

[2]) J. Newton und J. Hadley hatten das Prinzip dieser Apparate schon viel früher erkannt (s. Gelcich, Die geschichtliche Entwicklung der nautischen Winkelmeßinstrumente, Wien 1885, S. 8 ff.).

der astronomische folgt erst etwas später nach. Angesichts der enorm fleißigen Darstellung Schücks[1]) wird eine gedrängte Übersicht mit ein paar Ergänzungen genügen.

Für terrestrische Höhenmessungen aptierten G. Reysch[2]), der Verfasser eines enzyklopädischen Werkes von größter Verbreitung, und J. Köbel[3]), in seinem außerordentlich verbreiteten Leitfaden der Feldmeßkunst das Prinzip des Jakobsstabes in ihrer Weise; trigonometrische Rechnung durften sie ihren Lesern nicht zumuten, und so behalfen sie sich mit ähnlichen Dreiecken). Ein Stab von beliebiger Länge wird in gleiche Teile geteilt, und jeden Teilstrich bezeichnet ein Spalt, in dem man einen kürzeren Stab von bekannter Länge festmachen kann. Den Längsstab horizontal gegen das Objekt haltend, dessen Höhe zu bestimmen ist, bringt man das Auge an das eine Ende und visiert über die beiden Enden des Querstabes hinweg, bis man die Spitze des Turmes, den Gipfel des Baumes usw. über dem Stabende erblickt. Hierauf entfernt man sich von dem Gegenstande, zieht das Stäbchen aus

[1]) Schück, a. a. O., S. 113 ff.

[2]) Gr. Reysch, Margaritha Philosophica, Freiburg i. B. 1503, lib. VI, tract. II, cap. 4. Verstanden hat der gelehrte Sammler das Verfahren nicht, welches er zu lehren versuchte. Aus der „Margaritha" schöpfte auch ein Manuskript des schwedischen Bischofs Månsson (Sur trois petits traités mathématiques du savant suédois Peder Månsson, ed. Eneström, Bibl. Mathem. (2) 2. Band, S. 17 ff.). Der Autor schrieb um 1515 in Rom und starb 1534.

[3]) J. Köbel, Jakobs Stab künstlich uñ gerecht zu machen und zu gebrauchen, Frankfurt a. M. 1531; vgl. Schück, a. a. O., S. 113 ff. Der Querstab wird in zwei Varianten benützt; einmal ist die Beobachtungsweise die gewöhnliche, so daß der Querstab durch die Mittellinie des Längsstabes halbiert wird, und ein andermal wird nur der halbe Querstab verwendet. Noch ziemlich lange nachher war die unvollkommenere Form nicht beseitigt. Daniel Schwenter, der für seine „Deliciae Physico-Mathematicae" (Nürnberg 1636) ein analoges Werkchen des Franzosen Leurechon bearbeitete, nennt dessen Höhenmessungsvorschrift eine Entlehnung aus Reysch und bemerkt dazu (a. a. O., S. 153 ff.): „Ist also besser, wenn man das Stulbein auf- und niederschieben kann, und practiziert, wie es mit dem Jacobsstab gebräuchlich."

der Spalte und steckt es in den nächsten, um gleich die zweite Visierung abzuschließen; wenn a die Länge eines Abschnittes ist, so sind an und $a(n+1)$ die so erhaltenen Abstände der Stellung des Querstabes vom Auge. In Fig. 7 sehen wir die Messung selbst vor uns, in Fig. 8 das Bild des Rechnungsschemas. AB ist die zu ermittelnde Höhe; das Auge befindet sich zuerst in D und nachher in H. Die gleichgroßen Strecken JK und LM (senkrecht auf EH, wenn E den Mittelpunkt von AB bezeichnet) entsprechen den Querstäben bei beiden Messungen; DF und CH sind parallel AB. Die Figur ergibt $\Delta ABD \sim \Delta JKD$ und $\Delta ABH \sim \Delta LMH$, womit auch die Proportionen $AB : JK = BF : an$ und $AB : LM = (BF + CF) : a(n+1)$ gegeben sind. Mit Hilfe dieser Proportionen läßt sich dann leicht AE und, da CH bekannt ist, auch $AB = AE + CH$ erhalten.

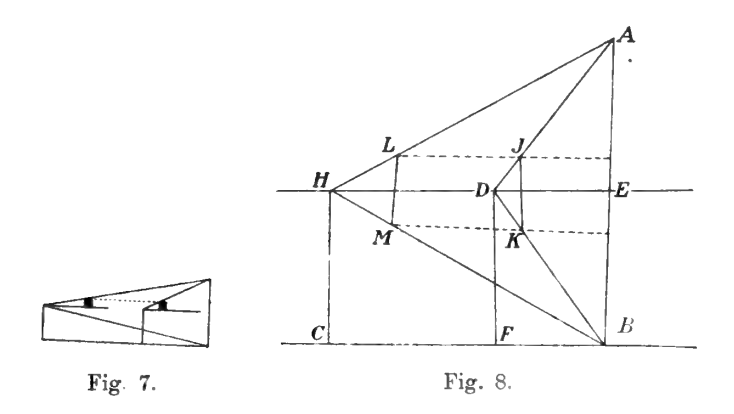


Fig. 7. Fig. 8.

So ziemlich jedes Lehrbuch der praktischen Geometrie bis tief in die Neuzeit herein betrachtet den Jakobsstab als unentbehrliches Requisit des Feldmessers[1]), ohne daß im allge-

[1]) Eine bemerkenswerte terrestrische Verwertung des Instrumentes lernen wir ungefähr um 1570 kennen, als der damals in Wien dozierende Botaniker Ch. Clusius (De l'Écluse) mit dem kaiserlichen Hofmathematiker J. Fabricius die niederösterreichische Gebirgswelt bereiste. Letzterer maß nämlich in der uns bekannten Weise von den Berggipfeln

meinen irgend namhafte Veränderungen ein anderes als das uns geläufige Bild entstehen lassen. Sehr gründlich befaßt sich mit dem Stabe der geachtete, in der Bartholomäusnacht ermordete Mathematiker Pierre de Rameé[1]), ein Forscher von ausgebreitetem geometrisch-geschichtlichen Wissen, welches sich in unserem Falle durch merkwürdige Notizen zu erkennen gibt[2]). Den ersten Vorschlag, die Gefahr des Geblendetwerdens durch farbige Gläser abzuhalten, scheint gegen Ende des Jahrhunderts der Belgier Coignet[3]) gemacht zu haben. Ob und

aus Azimutalwinkel; man wird nur vermuten können, daß das zum Zwecke der Herstellung von Panoramen geschah. S. hiezu J. v. Aschbach, Geschichte der Wiener Universität, 3. Band, Wien 1888, S. 121.

[1]) Petrus Ramus, Geometriae libri septem et viginti (posthum), Basel 1599, S. 63. Das Buch wurde von zwei angesehenen niederländischen Geometern in ihre Sprache übertragen: Meetkonst in XXVII boeken vervat, uit het Latijn in't Neerduyts overgheset van D. Houtman, oversien en verklaert door W. Snellium, Amsterdam 1622. Der Jakobsstab ist hier „ein Winkelhaken mit ungleichen Beinen"; „this een seer oudt Instrument, ende wordt ghemeenly de stock Jacobs" genannt, als wäre es vom Patriarchen Jakob selber erfunden.

[2]) Eine ähnliche Vorrichtung werde schon bei Hipparch, Plinius, Virgil, ja zuerst bei Archimedes erwähnt, komme auch bei den Arabern und dem Rabbiner Levi vor, sei jedoch allerdings erst durch die Deutschen — Ramus war ein Verehrer unseres Volkes — auf den gegenwärtigen Stand gebracht worden. Man sieht, daß eine gewisse Vertrautheit mit den wahren historischen Vorgängen aus diesen Worten spricht. Von Archimedes wird gesagt: „In arenae numero simile quidpiam notavit." Auch auf Thales' Distanzmesser, den er im Hafen von Milet aufgestellt haben soll, wird hingewiesen, aber dieses Instrument hatte ganz gewiß mit dem Radius nichts zu tun, denn das rechtwinklige Dreieck, welches zur Bestimmung der Entfernungen gedient zu haben scheint (M. Cantor, Vorlesungen, 1. Band, S. 134), entbehrt jeder verschiebbaren Kathete. Bemerkt zu werden verdient, daß Ramus dem Jakobsstabe auch eine gewisse Verwendbarkeit in der Artilleriekunst zusprechen zu sollen glaubte.

[3]) M. Coignet, Instruction nouvelle des poinctes plus excellentes et necessaires touchant l'art de naviguer, Antwerpen 1581; Schück, a. a. O., S. 141. Die erste Erwähnung der Blendgläser in der Instrumentaltechnik findet man bei Apian (s. Siegm. Günther, Peter und Philipp Apian, zwei bayerische Mathematiker und Kartographen, Prag 1882, S. 46).

wann gegebenenfalls daran gedacht worden ist, den Längsstab durch Einsetzen von Linsengläsern zum Fernrohre umzugestalten, weiß man nicht; nur eine gewisse bildliche Darstellung[1]) spricht dem Anscheine nach dafür, daß es versucht wurde.

Derjenige Gelehrte, der eine tiefer greifende Vervollkommnung des „Radius observatorius" — einen anderen Namen hat er nicht — angestrebt und erzielt hat, war J. Werner[2]). Sein Gedankengang war einfach der: Wäre nicht zweckmäßiger als eine Teilung in gleiche Teile, die durch Rechnung erst ihres wahren Nutzens teilhaftig werden kann, eine andere Teilung, welche ohne weiteres den gesuchten Winkel selbst ablesen ließe? Da eine einmalige Rechnung hiefür ausreicht, so ist in der Tat die Arbeit des Beobachters wesentlich erleichtert. Es könne dies schon mittelst einer Sinustafel geschehen, aber ungleich einfacher sei die Verwendung der Regiomontanschen Tangententafel (s. o. S. 327). Wie dies zu machen sei, lehrt er umständlicher, als es nach unseren Ansichten vielleicht erforderlich wäre; man darf jedoch nicht vergessen[3]), daß man es mit der ersten zielbewußten Ausnützung einer wichtigen mathematischen Neuerung zu tun hat, die sich erst langsam einbürgerte.

Als Kommentator Werners ist Peter Apian (Ingolstadt) aufgetreten, ohne indessen mehr als eine etwas übersichtlichere

---

[1]) Wir denken hiebei an ein Porträt des Kometen-Entdeckers P. J. B. Cysatus S. J. in v. Braunmühls Scheiner-Biographie (Bamberg 1891, S. 38). Der Gehilfe Scheiners hält in einer Hand den Jakobsstab, dessen Längsstab den Eindruck eines zylindrischen Fernrohres macht.

[2]) Werner, In primum librum Geographiae Claudii Ptolemaei argumenta, Nürnberg 1514, annot. III. Vgl. auch S. Günther, Johannes Werner von Nürnberg und seine Verdienste um Mathematische und Physikalische Geographie, Halle a. S. 1878.

[3]) Daß Werner als der Erste die Tangenten nach der „Fruchtbaren Tafel" Regiomontans (s. o., S. 327) geschickt benützte, bezeugt A. v. Braunmühl (Vorlesungen usw., 1. Teil, S. 133).

Konstruktion der Teilung zu Wege zu bringen[1]). Doch hegte der weitsehende Astronom bereits den richtigen Plan einer Längenbestimmung durch Monddistanzen mit Hilfe des Jakobsstabes[2]). Die Nautik als solche war dem Binnenländer selbstverständlich nur literarisch bekannt, und so verblieb die erste umfassende Einführung des Instrumentes in die Praxis einem Niederländer Gemma Frisius. Seine in drei Auflagen erschienene Anleitung[3]) entsprach ihrem Zwecke vollauf. Gleichwohl konstatiert man bei ihm schon eine Hinneigung[4]) zu gewissen Künsteleien, die nachmals sich mehr und mehr häufen.

Gegen die Mitte des Jahrhunderts lassen auch im Südwesten Europas die Druckwerke den Schleier fallen, der sie aus dem einen oder anderen Grunde zurückgehalten hatte, die Wahrheit zu verkünden. Daß Nonius 1546 in diesem Sinne handelte, haben wir oben (S. 326) erfahren. Um dieselbe Zeit jedoch sehen wir auch Spanien die neue Bahn betreten, und Breusings Aussage[5]), dort habe man um 1550 noch nichts

[1]) Petrus Apianus, Introductio Geographica in doctissimas Verneri Annotationes, Ingolstadt 1532. Schon das Titelblatt macht mit verschiedenen astronomischen und geodätischen Verwendungen des Jakobsstabes bekannt. Die Apiansche Modifikation erscheint unter folgendem Titel: „Compositio et Usus Radii Astronomici, qui ad omnem mensurationem geometricam adhiberi potest, partim jam recens a Petro Apiano inventus."

[2]) Die Apiansche Idee, durch Messung des Abstandes eines Fixsternes vom Mondrande die Meereslänge zu finden, war theoretisch richtig und hat viel später zu schönen Erfolgen bei See- und Landreisen verholfen. Der Jakobsstab genügte zur Verwirklichung freilich nicht, und ebenso hat es sich (Wagner, a. a. O., S. 278 ff.) als eine Fabel herausgestellt, daß schon 1499 Amerigo Vespucci in Vorwegnahme des Gedankens eine leidliche Längenbestimmung ausgeführt habe.

[3]) Gemma Frisius, De radio astronomico et geometrico liber, Löwen 1545, 1558, 1566. Vgl. dazu A. Quetelet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges, Brüssel 1871, S. 87. Der Friese schilderte die Nützlichkeit des von ihm teilweise wohl überschätzten Instrumentes in einem dem Vergil entlehnten Hexameter, der freilich nur gewaltsam für den Zweck hergerichtet werden konnte, den das 16. Jahrhundert im Auge hatte.

[4]) Schück, a. a. O., S. 120 ff. [5]) Breusing, a. a. O., S. 39.

von der seemännisch doch schon wichtig gewordenen Erfindung gewußt, trifft nicht zu. Die beiden bedeutendsten Kompendien der kastilianischen Literatur aus dieser Epoche geben entsprechende Auskunft; dasjenige von Medina[1]) und dasjenige von Cortez[2]). Von jenem ist als Besonderheit zu berichten, daß er, falls die natürliche Kimm sich dem Auge entzieht, einer Art künstlichen Horizontes sich bedient, um mit „einer kleinen Balestilla“ die Höhe des Nordsternes zu messen[3]). Cortez ist Inhaber einer neuen und bequemeren Methode, die Grade auf den Längsstab aufzutragen[4]). Im letzten Drittel des 16. Säkulums fangen auch die germanischen Seevölker an, die bequemste und zuverlässigste Messung in ihren Schriften zu lehren; Bourne[5]), Hood[6]), Blagrave[7]), der Grönlandfahrer Davis[8]) vertreten das in Einzelheiten nicht immer übereinstimmende Prinzip. Die am meisten eingreifende Änderung

[1]) P. De Medina, Arte de navegar, lib. V, cap. 2, Sevilla 1540; Regimiento de Navigación, Sevilla 1563, lib. III, cap. 5.

[2]) M. Cortez, Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar, Sevilla 1551.

[3]) Schück, a. a. O., S. 135.

[4]) Die Schrift von Cortez hat mehrfach zu Übersetzungen Anlaß gegeben. Die geometrische Regel zur Gradauftragung modifiziert etwas R. Çamorano: Compendio de la arte del navegar, Sevilla 1581; auch A. G. De Cespedes (Regimiento de Navegación, Sevilla 1606) lehrt eine Teilung durch Lineal und Zirkel. Von Cortez ist (Schück, a. a. O., S. 145) ganz abhängig auch das vielleicht erste auf amerikanischem Boden gedruckte Werk (D. G. De Palacio, Instructión Nauthica, para el buen vio y regimiento de las Naos ou traça y govierno conforme à la altura de Mexico, Mexico 1587.

[5]) W. Bourne, A Regiment for the Sea, London 1573; Schück, a. a. O., S. 137 ff.

[6]) The Hood, A Dialogue touching the Use of the Crosse Staffe, London 1590; A Dialogue touching the Use of the Jacobs Staffe, London 1590. Der Kreuzstab geht zunächst nur den Astronomen, der Jakobsstab nur den Geodäten an.

[7]) J. Blagrave, Baculum Familiare, Catholicon sive Generale, London 1590; Schück, a. a. O., S. 446 fl.

[8]) J. Davis, The Seamans Secrets, London 1607; Schück, a. a. O., S. 148 ff.

rührt auch von dem letztgenannten her[1]). Zumal die Niederländer betraten mit Vorliebe den vorgezeichneten Weg: Houtman, Andreas Metius, W. J. Blaeu, C. J. Lastman, E. De Decker, Th. Jacobs, J. van Breen, O. F. De Groot, C. J. Voogt[2]) u. a. Von Engländern sind namentlich der als Geomagnetiker bekannte H. Gellibrand, N. Colson und J. Harris[3]), von Spaniern ein Admiral José Gonzalez[4]), von Italienern G. Albrizzi[5]) anzuführen. Das bedeutendste französische Lehrbuch der Nautik aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, das von Bouguer[6]), behilft sich, da der Autor die Unvollkommenheit des ganzen Verfahrens wohl erkannt hat, mit einigen Künsteleien, die kaum einen wesentlichen Fortschritt bedeuten.

Auffallen muß, daß ein so gründlicher Forscher, wie Schück, des Deutschen nicht gedenkt, der seinerzeit gewiß der hervorragendste nautisch-astronomische Schriftsteller war, des Greifswalder Professors Röhl[7]). Aus seiner Darstellung geht hervor, daß im letzten Viertel des 18. Jahrhunderts die Anforderungen an die Schärfe der Winkelmessung doch schon genügend sich gesteigert hatten, um den Jakobsstab, der so lange Zeit seine Aufgabe in einer den Praktikern erwünschten Weise erfüllt hatte, auf den Aussterbeetat zu setzen. Derselbe sei, so meint Röhl bereits 1769, mehr und mehr „vom englischen Quartier verdrungen“ worden. Dieses Wort kenn-

---

[1]) J. Davis, The Seamans Secrets, London 1607; Schück, S. 148.

[2]) A. Metius, Primum mobile, astronomice nova methodo explicatum, Amsterdam 1631; Schück, S. 151 ff.

[3]) J. Harris, A Treatise of Navigation, London 1735; Schück, S. 167.

[4]) J. Gonzalez, Navigación especulativa y practica, Manila 1734; Schück, S. 168.

[5]) G. Albrizzi, Introduzione all' Arte Nautica, Venedig 1715; Schück, S. 166 ff.

[6]) P. Bouguer, Méthode d'observer sur mer les hauteurs des astres, Paris 1729; Traité complet de la Navigation, Paris 1746; Schück, S. 167 ff.

[7]) H. L. Röhl, Einleitung in die astronomischen Wissenschaften, 2. Teil, Greifswald 1769, S. 27 ff.; Anleitung zur Steuermannskunst, Greifswald 1778. S. 256 ff.

zeichnet jedoch noch nicht das Spiegelinstrument, sondern den Davisschen Quadranten. Erst neun Jahre nachher erscheint „der Hadleysche Oktant" nicht nur als gleichberechtigt mit jenem und dem „Gradstock", sondern als das beste Instrument, welches er ja auch ist.

In den nordischen Meeren hat sich der Jakobsstab jedoch sicher als sehr zählebig erwiesen[1]). Und nicht minder lange behauptete er sich im Mittelländischen Meere[2]). Im allgemeinen dürfte wohl die Jahrhundertwende als der Zeitpunkt zu gelten haben, von dem ab er in regelmäßiger Verwendung zu sein aufhörte und der Geschichte anzugehören begann. Staunenswert lange ist seine Lebensdauer somit auf alle Fälle gewesen; über viereinhalb Jahrhunderte spielte er seine maßgebende Rolle als Hauptinstrument der geographischen Ortsbestimmung. Späterhin ist das indirekte Messungsverfahren aus der Beobachtungskunst verschwunden; man müßte denn die Distanzmessung mittelst des Heliometers noch einbeziehen wollen.

---

[1]) Einen sprechenden Beweis hiefür liefert die Geschichte jener vier russischen Seeleute, welche sechs Jahre lang (1743—1749) auf der Insel Ostspitzbergen, wohin ein Sturm ihr Schiff verschlagen hatte, ein Robinsonleben zu verbringen gezwungen waren (O. Torell-A. E. Nordenskiöld, Die schwedischen Expeditionen nach Spitzbergen und Bären-Eiland, deutsch von L. Passarge, Jena 1869, S. 354 ff.). Der Steuermann Himkof erwidert auf die Frage, wie er sich denn über die Örtlichkeit seiner Gefangenschaft orientiert habe, er sei sofort darauf bedacht gewesen, sich aus dem aufgefundenen Holze „einen Stab" herzustellen, dessen er sich dann zu denselben Beobachtungen bedient habe, die ihm aus seiner Tätigkeit geläufig gewesen seien. Daß dies der Jakobsstab war, wird keinem Zweifel unterliegen können. S. auch: W. M. Conway, No Mans Land, a History of Spitzbergen from its discovery in 1596 to the beginning of the Scientific Exploration of the County, Cambridge 1906.

[2]) F. X. v. Zach, Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, 15. Band, S. 198.

Namen-Index.

Inhalt.



Zur Theorie der Kanalflächen.

Von A. Voss.

Vorgelegt in der Sitzung am 15. November 1919.

Eine Kanalfläche hängt im allgemeinen von drei willkürlichen Funktionen, den Radien R und T der Krümmung und Windung der Kurve C, welche die Mittelpunkte P ihrer erzeugenden Kugeln mit dem Radius r durchlaufen. R, T und r können dabei als Funktionen der Bogenlänge u der Kurve C angesehen werden. Im folgenden soll nun die Vorstellung festgehalten werden, daß die Fläche dadurch deformiert wird, daß T beliebig geändert wird, während R und r als Funktionen von u ungeändert bleiben. Bei allen diesen „Deformationen" der Kanal-, im speziellen bei konstantem r Röhrenflächen, bleiben die Hauptkrümmungshalbmesser derselben in entsprechenden Punkten ungeändert, wie im folgenden außer einigen andern Sätzen gezeigt werden soll.

§ I.

Die Gleichung der Kanal- und Röhrenflächen.

Unter einer Kanalfläche versteht man das Umhüllungsgebilde der Kugeln vom Radius r, deren Mittelpunkte eine Kurve C im Raume durchlaufen; dem speziellen Falle $r =$ konst entsprechen die Röhrenflächen. Die Koordinaten des Punktes P von C seien x, y, z, die eines zugehörigen Punktes Q der Umhüllungsfläche seien X, Y, Z. Dann hat man zur Bestimmung von X, Y, Z die beiden Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases}(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=r^2\\ (X-x)\,\alpha+(Y-y)\,\beta+(Z-z)\,\gamma=-rr'\end{cases}$$

in denen α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente von C im Punkte P bedeuten; r' ist die Ableitung von r nach u. Zur Auflösung von 1) führen wir die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale von C im Punkte P, nämlich

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,$$

ein, so daß der Punkt Q in Bezug auf das charakteristische Triëder von C die relativen Koordinaten A, B, C erhält. Dann ist

$$2)\quad \begin{cases}X-x=A\alpha+B\xi+C\lambda\\ Y-y=A\beta+B\eta+C\mu\\ Z-z=A\gamma+B\zeta+C\nu\end{cases}$$

wobei zwischen den Ableitungen der Richtungscosinus des Triëders die Frenetschen Formeln

$$\alpha'=\frac{\xi}{R},\quad \xi'=-\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\lambda}{T}\right),\quad \lambda'=\frac{\xi}{T}$$

nebst den durch Vertauschung der α, ξ, λ mit den β, η, μ; γ, ζ, ν entspringenden gelten. Nach 2) erhält man aus 1)

$$A^2+B^2+C^2=r^2$$
$$A=-rr'$$

so daß

$$3)\quad B=\varepsilon\cos v,\quad C=\varepsilon\sin v$$

wird, falls

$$4)\quad \varepsilon=+r\sqrt{1-r'^2}$$

gesetzt wird. Dabei ist jetzt v der Winkel, den die Projektionen von PQ auf die Normalebene der Kurve C im Punkte P mit der Hauptnormalen von C bildet. Setzt man noch

$$5)\quad \omega=rr'$$

so ist

$$6)\quad \begin{cases}X-x=-\alpha\omega+\varepsilon(\xi\cos v+\lambda\sin v)\\ Y-y=-\beta\omega+\varepsilon(\eta\cos v+\mu\sin v)\\ Z-z=-\gamma\omega+\varepsilon(\zeta\cos v+\nu\sin v)\end{cases}$$

und zugleich sind die Richtungscosinus Ξ, H, Z der Geraden PQ, oder der **Normale** der Kanalfläche im Punkte Q durch

$$7)\quad \begin{cases} \Xi = -\alpha r' + \sqrt{1 - r'^2}\,(\xi \cos v + \lambda \sin v) \\ H = -\beta r' + \sqrt{1 - r'^2}\,(\eta \cos v + \mu \sin v) \\ Z = -\gamma r' + \sqrt{1 - r'^2}\,(\zeta \cos v + \nu \sin v) \end{cases}$$

gegeben.

Die von den Punkten Q auf der Fläche bei konstantem u gebildete Kurve ist nach 1) der **Kreis vom Radius** ε, dessen Mittelpunkt im Abstande ω auf der (positiven) Tangente von C in P liegt und dessen Ebene auf dieser Tangente senkrecht steht. Er ist eine **Krümmungslinie** der Kanalfläche; die Richtungscosinus von PQ gegen die Axen des Triëders sind $-r'$, $\sqrt{1-r'^2}\cos v$, $\sqrt{1-r'^2}\sin v$.

§ II.

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche e, f, g.

Nach diesen unmittelbar evidenten Bemerkungen bestimmen wir die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Kanalfläche. Nach § I, 6 hat man

$$1)\quad \begin{cases} X_u = \alpha\left(1 - \omega_u - \varepsilon \dfrac{\cos v}{R}\right) + \xi\left(-\dfrac{\omega}{R} + \varepsilon_u \cos v + \varepsilon \sin v\right) \\ \qquad\qquad + \lambda\left(\varepsilon_u \sin v - \varepsilon \dfrac{\cos v}{T}\right) \\ X_v = \varepsilon\,(-\xi \sin v + \lambda \cos v) \end{cases}$$

wobei unter dem angefügten Index u, v jedesmal die Ableitung nach u verstanden werden soll. Aus 1) folgt:

$$2)\quad \begin{cases} e = \left(1 - \omega_u - \varepsilon \dfrac{\cos v}{R}\right)^2 + \left(-\dfrac{\omega}{R} + \varepsilon_u \cos v + \varepsilon \dfrac{\sin v}{T}\right)^2 \\ \qquad\qquad + \left(\varepsilon_u \sin v - \varepsilon \dfrac{\cos v}{T}\right)^2 \\ f = \varepsilon\left(\dfrac{\omega}{R} \sin v - \dfrac{\varepsilon}{T}\right) \\ g = \varepsilon^2 \end{cases}$$

Die Werte von f und g sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen Ableitungen nach u von ε überhaupt nicht auftreten. Aber dasselbe gilt auch für e, das nach einigen Umformungen die übersichtliche Gestalt

$$2') \qquad e = \left(\frac{1 - \omega_u}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{r \cos v}{R}\right)^2 + \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right)^2$$

annimmt. Setzt man noch

$$3) \qquad \frac{1 - \omega_u}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{r \cos v}{R} = P, \quad \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) = Q$$

so erhält man

$$4) \qquad \begin{cases} e = P^2 + Q^2 \\ f = \varepsilon Q \\ g = \varepsilon^2 \end{cases}$$

und somit für das Quadrat des Längenelementes der Fläche ds^2 und den Winkel θ der Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$,

$$5) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= (P^2 + Q^2)\, du^2 + 2 \varepsilon Q\, du\, dv + \varepsilon^2 dv^2 \\ &= P^2 du^2 + (Q\, du + \varepsilon\, dv)^2 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Aus 5) folgt:

Die zweite Schar der Krümmungslinien der Fläche ist durch die Gleichung

$$Q\, du + \varepsilon\, dv = 0$$

bestimmt.

Aber auch die Kurven u, v selbst haben eine Eigenschaft, die von Interesse ist. Da nämlich nach 4)

$$6) \qquad eg - f^2 = \varepsilon^2 P^2$$

ist, und P nach 3) von T unabhängig ist, ergibt sich der Satz:

Durch die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ werden alle deformierten Flächen in flächentreuer Weise aufeinander abgebildet[1]).

[1]) In besonderen Fällen, wie z. B. bei der Röhrenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie, die für $T = \infty$ in einen geschlossenen Ring übergeht, wird die äquivalente Abbildung sich unendlich oft wiederholen.

Endlich ist auch $\operatorname{tg}\theta = \frac{P}{Q}$.

Für den Fall $P = 0$ wird $eg - f^2 = 0$. In der allgemeinen Flächentheorie pflegt man anzunehmen, daß bei Voraussetzung *reeller* Koordinatenwerte, die auch hier allein in Betracht gezogen werden sollen, $eg - f^2$ von Null verschieden sei, so daß die aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix}$$

gebildeten Funktional-Determinanten nach u, v nicht gleichzeitig verschwinden, also auch eine unmittelbar bestimmte Tangentenebene vorhanden ist. Eine solche ist aber auch hier vorhanden, nämlich die Normalebene im Punkte Q. *Die von diesen Punkten Q gebildete Kurve auf der Kanalfläche ist die* — allerdings nicht notwendig reelle — *Rückkehrkurve der Kanalfläche.* Fügt man nämlich den Gleichungen 1) des § I noch die weitere durch Differentiation der zweiten Gleichung daselbst entstehende

$$(X - x)\,\xi + (Y - y)\,\eta + (Z - z)\,\zeta = (1 - \omega_u)\,R$$

hinzu, so ergibt sich nach § I, 6

$$\frac{\varepsilon \cos v}{R} = \frac{1 - \omega_u}{\sqrt{1 - r'^2}}$$

oder $P = 0$.

Der Ausdruck $eg - f^2$ ist übrigens auch dann Null, wenn $\varepsilon = 0$, oder, da r als von Null verschieden angenommen werden muß, wenn $r = \pm (u + c)$ gewählt ist. Setzt man $r = u + c$, $\omega = u + c$, so wird

$$X = x - \alpha(\eta + c), \quad Y = y - \beta(u + c), \quad Z = z - \gamma(u + c)$$

also ergibt sich gar keine Fläche, sondern nur eine *Kurve* Γ, deren Punkte Q auf der Tangente von C dem Punkte P zugeordnet sind, und das analoge Resultat folgt für $r = c_1 - u$. Dabei wird dann (es mag nur $r = u + c$ gesetzt werden)

$$X_u = -\frac{\xi(u+c)}{R}$$

also die Bogenlänge S der Kurve Γ bestimmt durch

$$\frac{dS}{du} = \frac{\sqrt{u+c}}{R}$$

Demnach ist

$$7)\qquad \begin{aligned} \frac{dX}{dS} &= -\frac{\xi(u+c)}{\sqrt{u+c}} \\ \frac{d^2X}{dS^2} &= +\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\lambda}{T}\right)\frac{R\theta}{\sqrt{u+c}} \end{aligned}$$

wo $\theta = \pm 1$ ist. Endlich erhält man auf demselben Wege auch den dritten Differentialquotienten von X nach S.

Es folgt daher für den Krümmungshalbmesser R_1 die Gleichung

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{(R^2+T^2)}{R^2T^2}\,\frac{(u+c)^2}{R^2}$$

und zur Berechnung der Torsion T' hat man die Formel

$$\frac{1}{T_1} = -R_1^2 \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix}$$

in der die Ableitungen der Koordinaten nach S durch Striche bezeichnet sind. Für die rechts stehende Determinante aber ergibt sich

$$\theta^3\,\frac{R^2}{(u+c)^2}\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \frac{\alpha}{R}+\frac{\lambda}{T}, & \frac{\beta}{R}+\frac{\mu}{T}, & \frac{\gamma}{R}+\frac{\nu}{T} \\ \frac{\alpha R'}{R^2}+\frac{\lambda T'}{T^2}, & \frac{\beta R'}{R^2}+\frac{\mu T'}{T^2}, & \frac{\gamma R'}{R^2}+\frac{\nu T'}{T^2} \end{vmatrix}$$

oder nach Multiplikation mit der Determinante des Trièders, welche gleich $+1$ ist,

$$\frac{1}{T_1} = \theta\,\frac{R'T - T'R}{R^2+T^2}$$

Das liefert den Satz: Die Kurven Γ werden dann und nur dann ebene Kurven, wenn die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie ist.

Über den oben erwähnten Fall, wo $eg - f^2 = 0$, seien hier noch einige Andeutungen gegeben. Die Darstellung der Fläche durch die Parameter u, v versagt dann zunächst, da, wenn die Tangentenebene der Fläche in der Nähe eines Punktes, wo die Differentialquotienten der Koordinaten nach v denen nach u proportional sind, gegen diesen Punkt konvergiert, sich im allgemeinen keine bestimmte Grenzlage für beliebige Konvergenz von u und v gegen Null bildet. Es wird sich daher empfehlen, wieder zu den x, y, z zurückzugehen. Dabei wird es genügen, den Fall, wo nur die beiden ersten Glieder einer analytischen Entwicklung nach u, v angesetzt sind, oder

$$\begin{aligned} x &= u_1 + k v_1 + u_1^2 a_1^1 + u_1 v_1 a_2^1 + v_1^2 a_3^1 \\ y &= u_1 + k v_1 + u_1^2 b_1^1 + u_1 v_1 b_2^1 + v_1^2 b_3^1 \\ z &= u_1 + k v_1 + u_1^2 c_1^1 + u_1 v_1 c_2^1 + v_1^2 c_3^1 \end{aligned}$$

oder, wenn $u_1 + k v_1 = u$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} x &= u + a_1 u^2 + b_1 u v + c_1 v^2 \\ y &= u + a_2 u^2 + b_2 u v + c_2 v^2 \\ z &= u + a_3 u^2 + b_3 u v + c_3 v^2 \end{aligned} \tag{8}$$

vorauszusetzen. Wenn die Determinante der a, b, c nicht Null ist, ergibt sich für

$$\begin{aligned} &p_1, p_2, p_3 \text{ mit } \Sigma(pb) = 0, \quad \Sigma(pc) = 0 \\ &q_1, q_2, q_3 \quad " \quad \Sigma(qc) = 0, \quad \Sigma(qa) = 0 \\ &r_1, r_2, r_3 \quad " \quad \Sigma(ra) = 0, \quad \Sigma(rb) = 0 \end{aligned}$$

falls man

$$x p_1 + y p_2 + z p_3 = X, \quad x q_1 + y q_2 + z q_3 = Y, \quad x r_1 + y r_2 + z r_3 = Z$$

setzt

$$\begin{aligned} X &= u \Sigma p + \delta u^2 \\ Y &= u \Sigma q + \delta u v \\ Z &= u \Sigma r + \delta v^2 \end{aligned}$$

wo δ die Determinante $(a\,b\,c)$ bedeutet, und die p, q, r direkt den Unterdeterminanten aus den a, b, c gleichgesetzt werden.

Wird noch

$$\Sigma(p) = A_1, \quad \Sigma(q) = A_2, \quad \Sigma(r) = A_3$$

gesetzt, so hat man, um die Gleichung zwischen X, Y, Z, welche nach den x, y, z wegen $\delta \neq 0$ auflösbar sind, zu erhalten, nur noch u, v zu eliminieren. Dabei ergibt sich eine Gleichung vierten Grades, deren niedrigste (quadratische) Glieder sich auf

$$(A_1 y + A_3 x)^2$$

zusammenziehen. Die Fläche hat also für $u = 0$, $v = 0$ einen konischen Punkt von der Beschaffenheit eines Uniplanarpunktes, und hieraus wird man einen Schluß ziehen können auf den Fall, wo längs einer Kurve die Bedingung $eg - f^2 = 0$ erfüllt ist.

Das Resultat gilt aber nur dann, wenn $A_2^2 - A_1 A_3 \neq 0$ ist. Ist dieser Ausdruck Null, so ergibt sich ein triplanarer Punkt, bei dem zwei Ebenen zusammenfallen. Ein ganz spezielles Beispiel dafür zeigt der Fall

$$\begin{aligned} x &= u + u^2 a \\ y &= \phantom{u + {}} uvb \\ z &= \phantom{u + {}} v^2 c \end{aligned}$$

Hier hat die entsprechende Fläche die Gleichung

$$\frac{y^2 z}{a c b^2} = \left(\frac{x z}{a c} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

welche einen singulären Punkt desselben Charakters im Anfang besitzt. Wenn dagegen die Determinante $\delta = (a\,b\,c)$ in den Gleichungen 8) Null ist, folgt aus denselben

$$xp + yq + zr = u(p + q + r).$$

Ist $p + q + r = 0$, so ist die Fläche eine Ebene. Andernfalls ist

$$u = \frac{xp + yq + rz}{p + q + r}$$

und durch Elimination von v aus zweien der Gleichungen ergibt sich eine Fläche, die wieder einen uniplanaren Knoten-

punkt hat. Trotzdem würde es unrichtig sein, wenn man die Gleichung $eg - f^2 = 0$ als einem Uniplanarpunkte äquivalent ansehen wollte. Schon das Beispiel

$$x = a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2$$
$$y = a_2 u^2 + b_2 uv + c_2 v^2$$
$$z = a_3 u^2 + b_3 uv + c_3 v^2$$

liefert, wenn die Determinante $\delta \neq 0$ ist, einen konischen Punkt.

§ III.

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung E, F, G.

Die Ermittelung von E, F, G aus den Gleichungen

$$E = \Sigma \Xi X_{uu}, \quad F = \Sigma \Xi X_{uv}, \quad G = \Sigma \Xi X_{vv}$$

würde die Bestimmung der zweiten Differentialquotienten von X nach u, bei der die Differentialquotienten von R und T auftreten, erfordern, die sich im Resultat wieder herausheben. Man vermeidet dies, wenn man von den Gleichungen

$$-E = \Sigma \Xi_u X_u, \quad -F = -\Sigma \Xi_u X_v = -\Sigma \Xi_v X_u,$$
$$-G = \Sigma \Xi_v X_v$$

ausgeht. Aus § I, 7 hat man, wenn zur Abkürzung

$$+\sqrt{1 - r'^2} = S$$

gesetzt wird

$$\text{1)} \qquad \Xi_u = -a\left(r'' + S\frac{\cos v}{R}\right)$$
$$+ \xi\left(-\frac{r'}{R} + S\frac{\sin v}{T} - \cos v\frac{r' r''}{S}\right) - \lambda\left(\frac{\cos v}{T}S + \sin v\frac{r' r''}{S}\right)$$
$$\Xi_v = S(-\xi \sin v + \lambda \cos v)$$

und aus § II, 1

$$X_u = a\left(1 - \omega_u - \varepsilon\frac{\cos v}{R}\right) + \xi\left(-\frac{\omega}{R} + \varepsilon_u \cos v + \varepsilon\frac{\sin v}{T}\right)$$
$$\text{2)} \qquad + \lambda\left(\varepsilon_u \sin v - \varepsilon\frac{\cos v}{T}\right)$$
$$X_v = \varepsilon(-\xi \sin v + \lambda \cos v).$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort

$$3)\quad \begin{aligned} -G &= \varepsilon S \\ -F &= \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) S = Q S \end{aligned}$$

Etwas weitläufiger ist die Bestimmung von $-E$. Zunächst erhält man durch Zusammenziehung und Aufhebung verschiedener Glieder

$$-E = -\left(r'' + S\frac{\cos v}{R}\right)\left(1 - \omega_{u} - \varepsilon\frac{\cos v}{R}\right)$$

$$+\frac{r'\omega}{R^2} + r'r''\omega\frac{\cos v}{RS} - 2\omega\frac{S\sin v}{RT} + \frac{\varepsilon S}{T^2} - \varepsilon_u \cos v\frac{r'}{R} - \varepsilon_u\frac{r'r''}{S}$$

oder, wenn man ε_u durch seinen aus § I, 4 folgenden Wert

$$\varepsilon_u = r'\left(\frac{1-\omega_u}{S}\right)$$

ersetzt, und die Glieder mit $(1-\omega_u)$ vereinigt

$$-E = -\left(\frac{1-\omega_u}{S}\right)\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right) + \frac{r'r''\cos v}{RS} + r\frac{\cos^2 v}{R^2}$$

$$+ rr'^2\frac{\sin^2 v}{R^2} + r\left(\frac{1-r'^2}{T^2}\right) - 2r'^2\frac{S\sin v}{TR}$$

also endlich

$$-E = \pm\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)\left(r\frac{\cos v}{R} - \frac{1-\omega_u}{S}\right)$$

$$+ r\left(r'\frac{\sin v}{R} - \frac{S}{T}\right)^2,$$

also nach der in § II, 3 eingeführten Bezeichnung nach 2), 3) und 4)

$$5)\quad \begin{cases} -E = -\left(\dfrac{r''}{S} + \dfrac{\cos v}{R}\right)P + \dfrac{1}{r}Q^2 \\ -F = \quad QS \\ -G = \quad rS^2. \end{cases}$$

Hieraus folgt nun

$$6)\quad EG - F^2 = -\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)PrS^2 = -\frac{P}{r}\varepsilon^2\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)$$

Da nach § II, 6 $eg - f^2 = \varepsilon^2 P^2$, so hat man für das Krümmungsmaß K die von T unabhängige Gleichung

$$K = -\frac{1}{rP}\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right) \tag{7}$$

Daher folgt:

Bei allen Deformationen der Kanalflächen behält das Krümmungsmaß in den Punkten gleicher Werte von u, v denselben Wert. Aber diese Flächen sind gleichwohl nicht aufeinander abwickelbar, wie ein Blick auf das in § II angegebene Längenelementsquadrat in Bezug auf die Kurven u, v zeigt.

Aber noch mehr: Da der eine Hauptkrümmungsradius ϱ_1 immer den Wert r hat, muß nach 7) der andere den Wert

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)$$

haben. Alle deformierten Flächen haben also in entsprechenden Stellen die nämlichen Hauptkrümmungshalbmesser; man kann sie als im unendlich kleinen kongruent bezeichnen.

Die Gesamtheit der deformierten Flächen ist von der willkürlich zu wählenden Funktion T von u abhängig, durch die die Kurve C selbst vermöge einer Riccatischen Gleichung bestimmt, und damit jedes einzelne Individuum der Gesamtheit erhalten wird.

Aus der allgemeinen Formel für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

ergibt sich für den Krümmungsradius längs der Kurve $u = \text{const}$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{G}{g} = -\frac{rS^2}{g} = -\frac{1}{r}$$

wie es sein muß, während für den Krümmungsradius für die Kurve $v = \text{const}$ der Wert

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{P\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right) - \frac{1}{r} Q^2}{P^2 + Q^2}$$

folgt, der für $P = 0$, d. h. für die Punkte der Rückkehrkurve wieder in $\frac{1}{r}$ übergeht, was übrigens selbstverständlich ist, da die beiden Kurven u, v hier überall zusammenfallen.

§ IV.

Kurvensysteme auf den Kanal- und Röhrenflächen.

Die Differentialgleichungen der wichtigsten Kurvensysteme sind auf den Kanalflächen im allgemeinen nicht einfach. Auch für die Röhrenflächen ergeben sich keine unmittelbar zu übersehenden Resultate; nur für die Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie kommt die Lösung auf verhältnismäßig einfache Quadraturen hinaus. Wir begnügen uns mit den folgenden Andeutungen:

1. Die zweite Schar der Krümmungslinien. Sie ist nach § II, 5 gegeben durch die Differentialgleichung

$$\left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) du + dv\, \varepsilon = 0.$$

Dies ist eine Riccatische Gleichung für v, die für $\zeta = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$ die Form

$$2\varepsilon \frac{d\zeta}{du} + 2 \frac{\omega \zeta}{R} - \varepsilon \left(\frac{1 + \zeta^2}{T}\right) = 0$$

annimmt. So erhält die Variabele ζ in der Normalebene von C im Punkte P eine unmittelbar ersichtliche geometrische Bedeutung, welche zugleich zeigt, wie aus drei Krümmungslinien durch eine ganz einfache Doppelverhältniskonstruktion jede vierte abgeleitet wird[1]). Die Riccatischs Gleichung ist

[1]) Man betrachte den am Ende des § I angegebenen erzeugenden Kreis der Kanalfläche vom Radius ε, dessen Radien bei der Projektion

für den Fall der Röhrenflächen durch Quadratur lösbar, und liefert

$$v = \int \frac{du}{T} + \text{const}$$

wodurch die Krümmungslinien der Fläche mit der Konstruktion der Evoluten der Kurve C in unmittelbare Beziehung gesetzt sind.

2. Konforme Abbildung der Kanalflächen. Zur Ausführung derselben hat man die Gleichung

$$du\left(\frac{1-\omega_u}{S} - \frac{r\cos v}{R}\right) + i\left(\frac{\omega \sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) du + i\varepsilon\, dv = 0$$

d. h. wieder eine Riccatische Gleichung zu lösen, welche durch die soeben benutzte Substitution die Form

$$2i\frac{d\zeta}{du} + \zeta^2\left(\frac{1-\omega_u}{S} + \frac{r}{R} - \frac{i\varepsilon}{T}\right) + 2i\frac{\omega\zeta}{R}$$
$$+\left(\frac{1-\omega_u}{S} - \frac{r}{R} - \frac{\varepsilon i}{T}\right) = 0$$

annimmt. Damit sind zugleich die Minimalkurven und die isothermen Kurvensysteme der Kanalflächen wenigstens definiert. Für den Fall der Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie ist wieder nur eine Quadratur auszuführen.

3. Die Rückkehrkurven der Kanalflächen sind nach § II gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1-\omega_u}{S} - r\frac{\cos v}{R} = 0.$$

---

auf die Normalebene von C in P mit der Hauptnormale von C den Winkel v machen. Der der Hauptnormale parallele Durchmesser derselben begegnet diesem Kreise in den Punkten A und B; dann bildet AQ mit diesem Durchmesser den Winkel $\frac{v}{2}$, demnach wird $AB\zeta$ gleich dem Abschnitt, der durch AQ auf der Tangente des Kreises in B gebildet wird; um das Doppelverhältnis dieser Abschnitte aber handelt es sich.

Auch diese ist von T unabhängig. Bei allen Deformationen behält also die Rückkehrkurve dieselbe relative Lage gegen das Triëder der Kurve C; ihre Koordinaten X_1, Y_1, Z_1 aber werden von T abhängig. Das Bogenelement z. B. wird

$$ds = \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon \frac{dv}{du}\right) du$$

wobei $\frac{dv}{du}$ als Funktion von u aus 1) zu entnehmen ist. Für den Fall der Röhrenfläche hat man insbesondere ($r = c$, $\omega = 0$, $\varepsilon = c$)

$$S = c\left(\int \frac{du}{T} + \arcsin\left(\frac{R}{c}\right)\right) + \text{const}$$

wobei das Integral wieder auf die Evolute von C hinweist.

Die Richtung der Rückkehrkurve fällt in jedem ihrer Punkte Q_1 mit der Tangente des erzeugenden Kreises zusammen, wie man übrigens auch leicht aus den allgemeinen Formeln des § II bestätigt. So hat man z. B.

$$\frac{dX_1}{du} = \left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon \frac{dv}{du}\right)(-\xi \sin v + \lambda \cos v).$$

4. Die Haupttangenten-Kurven der Kanalflächen. Die Rückkehrkurven sind selbst singuläre Haupttangenten-Kurven. Die allgemeine Gleichung der letzteren erhält nach § III die Form:

$$-\left(\frac{r''}{S} + \frac{\cos v}{R}\right)\left(\frac{1 - \omega_u}{S} - r\frac{\cos v}{R}\right) du^2 +$$
$$\frac{1}{r}\left(du\left(\omega \frac{\sin v}{R} - \frac{\varepsilon}{T}\right) + \varepsilon\, dv\right)^2 = 0$$

die freilich nur für den Fall der Röhrenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie auf eine einfache Quadratur führt.

5. Die geodätischen Kurven der Flächen. Für den Fall der Röhrenflächen erhält das Längelementsquadrat nach § II vermöge der Substitution

$$d\left(\frac{du}{T} - v\right) = v'$$

die Form

$$P^2 du^2 + dv'^2$$

so daß, wie übrigens geometrisch schon erhellen würde, die erzeugenden Kreise selbst geodätische Linien der Fläche sind.

Für die allgemeine Ermittelung der geodätischen Kurven wird man den folgenden Satz anzuwenden haben: Jeder Lösung der Gleichung

2) $$\Delta(\varphi) = 1$$

in der $\Delta(\varphi)$ den ersten Differentialparameter von φ in Bezug auf die Form

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

bedeutet, entspricht eine Schar paralleler Kurven der betreffenden Fläche, deren orthogonale Trajektorien geodätische Kurven derselben sind, und einer eine willkürliche Konstante c_1 (die nicht nur additiv vorkommt) enthaltenden entspricht nach Jacobi eine geodätische Kurve, deren Gleichung dann ohne neue Integration erhalten wird.

Die Gleichung 2) wird im vorliegenden Falle

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 (P^2 + Q^2) + 2\varepsilon Q \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = \varepsilon^2 Q^2.$$

Sie kann, wenn R, T, r Konstanten sind, d. h. für die Röhrenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie durch den eine willkürliche Konstante c_1 enthaltenden Ansatz

$$\varphi = c_1 u + \psi(v) + c_2$$

durch Quadratur gelöst werden. Denn für $S = 1$, $\omega = 0$, $\varepsilon = r = c$ erhält man

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 \left[\left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}\right] + 2\frac{c^2}{T} c_1 \frac{\partial\psi}{\partial v}$$
$$+ c^2 c_1^2 = c^2 \left(1 - c\frac{\cos v}{R}\right)^2$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}\left[\left(1 - c\,\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}\right] = + \frac{c^2 c_1}{T} + \sqrt{H},$$

wo

$$H = c^2\left(1 - c\,\frac{\cos v}{R}\right)^2\left[\left(1 - c\,\frac{\cos v}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2} - c^2\right]$$

Setzt man noch $\cos v = z$, so ist ψ gegeben durch das elliptische Integral

$$-\psi = \int \frac{c\left(1 - \frac{c\,z}{R}\right)}{\sqrt{1 - z^2}} \, \frac{\sqrt{\left(1 - c\,\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2} - c_1^2}}{\left(1 - c\,\frac{z}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{T^2}} \, dz$$

von dessen Auswertung hier wohl abzusehen ist. Damit sind aber alle geodätischen Kurven dieser allerdings sehr speziellen Röhrenfläche ermittelt.

Über gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2. Ordnung.

Von **Max Lagally**.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 15. November 1919.

1. Achsenaffin soll eine Fläche heißen, wenn es ein Büschel von Ebenen gibt, welche die Fläche in affinen Kurven schneiden; dabei soll die Achse des Büschels zugleich Affinitäts-Achse sein, und die Affinitäts-Richtung auf ihr senkrecht stehen.

Die Ebenen des Büschels sollen in erweitertem Sinn Meridianebenen, die affinen Kurven Meridiane heißen; die Affinitätsachse Achse der Fläche, ihre Schnittpunkte mit der Fläche Pole. Als Parallelkurven werden die untereinander ähnlichen Kurven der Fläche bezeichnet, welche durch die auf der Achse senkrechten Ebenen ausgeschnitten werden.

Als nächstliegendes Beispiel von achsenaffinen Flächen seien die Flächen 2. Ordnung erwähnt; jede Hauptachse ist eine Achse in dem oben festgelegten Sinn.

Im folgenden wird bewiesen, daß jede achsenaffine Fläche einer stetigen Verbiegung fähig ist, bei der sie achsenaffin bleibt; dabei bleiben sowohl die Meridiankurven als auch die Parallelkurven in ihrer Eigenschaft als solche erhalten. Die Aufstellung der Biegungsflächen erfordert nur die Ausführung einer Quadratur. Es ist also insbesondere möglich, in sehr einfacher Weise Biegungsflächen der Flächen 2. Grades aufzufinden, wobei jeder Hauptachse eine einfach unendliche Reihe solcher Biegungsflächen zugeordnet ist.

2. Nach einem Satz von D'Ocagne[1]) lassen sich Paare aufeinander abwickelbarer Rotationsflächen in folgender Weise erhalten: Ein beliebiger Zylinder wird durch eine auf den Mantellinien senkrechte Ebene E_0 in einer Kurve K_0 und durch eine beliebig geneigte Ebene E in einer Kurve K geschnitten; E_0 und E schneiden sich in einer Geraden Z. Wird der Zylindermantel abgewickelt, so geht K_0 in eine Gerade Z_1, K in eine Kurve K_1 über. Dann sind die beiden Rotationsflächen, die durch Umdrehung von K um Z und von K_1 um Z_1 entstehen, aufeinander abwickelbar; gleiches Krümmungsmaß herrscht in solchen Punkten der Meridiankurven K und K_1, welche auf dem Zylindermantel und seiner Abwicklung einander entsprechen.

Dieser Satz läßt sich verallgemeinern. Wir machen (Fig. 1) Z zum Träger eines Ebenenbüschels; dieses schneidet den Zylinder in einem Büschel von zueinander senkrecht affinen Kurven K $(K' \ldots)$ mit der Achse Z. Hieraus geht bei der Abwicklung des Zylindermantels ein Büschel K_1 $(K_1' \ldots)$ zueinander senkrecht affiner Kurven mit der Achse Z_1 hervor. Dann läßt sich beweisen: Ordnet man die Kurven K als Meridiankurven einer achsenaffinen Fläche F an, indem man ihre Ebenen um beliebige Winkel um die Achse Z

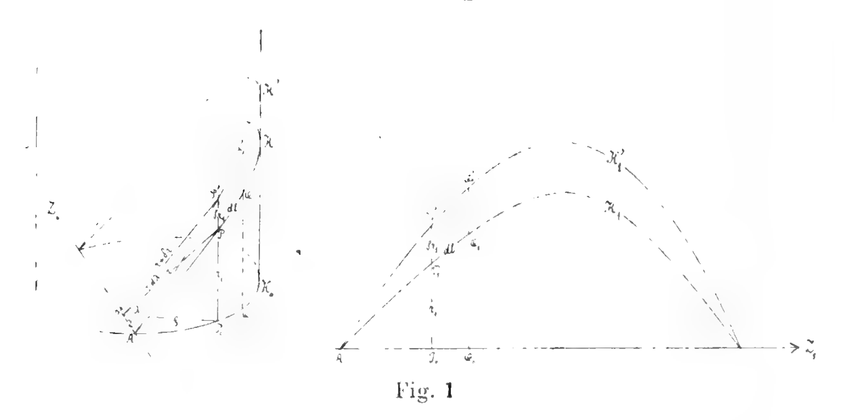


Fig. 1

[1]) D'Ocagne, Remarque sur la déformation des surfaces de révolution. Bulletin de la société mathématique de France 21, 1893, S. 85.

dreht, so ist es stets auf eine und nur eine Weise möglich, die Kurven K_1 als Meridiankurven einer auf F abwickelbaren achsenaffinen Fläche F_1 anzuordnen, indem man ihre Ebenen um geeignete Winkel um die Achse Z_1 dreht. Dabei herrscht auf F und F_1 gleiches Krümmungsmaß in solchen Punkten entsprechender Meridiankurven K und K_1, welche einander auf dem Zylindermantel und seiner Abwicklung entsprechen.

Wir legen einen Punkt P_0 der Kurve K_0 durch die rechtwinkligen Koordinaten $AP^* = z$, $P^*P_0 = \varrho$ fest. In der Ebene E der Kurve K mit dem Neigungswinkel λ gegen E_0 tritt für den Punkt P an Stelle von ϱ die Entfernung $P^*P = r = \varrho : \cos\lambda$. Die Koordinaten des entsprechenden Punktes P_1 der Abwicklung sind der explizit nicht benötigte Bogen AP_0 und $P_0P_1 = r_1 = \varrho \operatorname{tg}\lambda$.

Es sollen nun die Änderungen der Koordinaten beim Übergang von P zu einem benachbarten Punkt Q derselben Meridiankurve mit d bezeichnet werden; die Änderungen beim Übergang zu einem auf derselben Mantellinie gelegenen Punkt P' der benachbarten Meridiankurve mit δ.

Dann ist: $P_0Q_0^2 = dz_1^2 = dz^2 + d\varrho^2$

$$PQ^2 = P_1Q_1^2 = dl^2 = dz^2 + dr^2 = dz_1^2 + dr_1^2$$

$$dr = \frac{d\varrho}{\cos\lambda}; \quad dr_1 = \operatorname{tg}\lambda\, d\varrho$$

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial\lambda}d\lambda = \frac{\varrho\sin\lambda}{\cos^2\lambda}d\lambda; \quad \delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial\lambda}d\lambda = \frac{\varrho}{\cos^2\lambda}d\lambda.$$

Die achsenaffine Fläche F soll jetzt in der Weise hergestellt werden, daß der Winkel $d\lambda$ der Ebene E einer Kurve K mit der der benachbarten K' durch $d\varphi$ ersetzt wird, wo φ eine Funktion von λ ist (Fig. 2). Dann ist das Linienelement der Fläche F

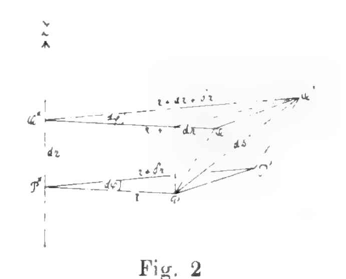


Fig. 2

$$PQ'^2 = ds^2 = r^2 d\varphi^2 + (dr + \delta r)^2 + dz^2.$$

Stellt man ebenso die Ebene E_1 einer Kurve K_1 mit der der benachbarten K_1' so zusammen, daß sie sich in Z_1 unter einem Winkel $d\psi$ schneiden, wo ψ eine Funktion von λ ist, so ist das Linienelement der so entstehenden achsenaffinen Fläche F_1

$$ds_1^2 = r_1^2 d\psi^2 + (dr_1 + \delta r_1)^2 + dz_1^2.$$

Es ist jetzt zu zeigen, daß die beiden Linienelemente ds^2 und ds_1^2 einander gleich gemacht werden können durch geeignete Wahl der beiden Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$.

Hiezu muß

$$r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dr\,\delta r + \delta r^2 + dz^2 = r_1^2 d\psi^2 + dr_1^2 + 2\,dr_1\,\delta r_1 + \delta r_1^2 + dz_1^2$$

werden. Wegen

$$dr^2 + dz^2 = dr_1^2 + dz_1^2 = dl^2$$

$$dr\,\delta r = dr_1\,\delta r_1 = \varrho \frac{\sin\lambda}{\cos^3\lambda} d\varrho\, d\lambda$$

folgt einfacher

$$r^2 d\varphi^2 + \delta r^2 = r_1^2 d\psi^2 + \delta r_1^2.$$

Führt man jetzt die Parameter λ und ϱ ein, so erweist sich diese Bedingungsgleichung als von ϱ frei; man erhält

$$\frac{d\varphi^2}{\cos^2\lambda} + \frac{\sin^2\lambda}{\cos^4\lambda} d\lambda^2 = \operatorname{tg}^2\lambda\, d\psi^2 + \frac{d\lambda^2}{\cos^4\lambda}$$

also

$$d\varphi^2 = d\lambda^2 + \sin^2\lambda\, d\psi^2.$$

Damit ist die Verallgemeinerung des D'Ocagneschen Satzes bewiesen. Insbesondere ist ersichtlich, daß eine der beiden Verteilungsfunktionen φ und ψ willkürlich angenommen werden kann; die andere ist dann durch eine Quadratur bestimmt. Man kann also aus jedem System von Schnittkurven eines beliebigen Zylinders mit einem Ebenenbüschel ∞ viele von einer willkürlichen Funktion abhängende Paare von aufeinander abwickelbaren achsenaffinen Flächen ableiten.

3. Nachdem die Existenz von Paaren achsenaffiner Flächen erkannt ist, die aufeinander abwickelbar sind derart, daß sich sowohl die Meridiankurven als auch die Parallelkurven auf beiden Flächen entsprechen, soll jetzt nach stetigen Verbiegungen achsenaffiner Flächen gesucht werden.

Stellt man einen Ausgangsmeridian in der Form

$$r = U(u); \quad z = z(u)$$

dar, so erhält man für jede dazu senkrecht affine Kurve

$$r = U(u)\,V(v); \quad z = z(u).$$

Dabei hängt der die Maßstabsänderung der r-Koordinaten bestimmende Faktor $V(v)$ mit dem Winkel w zusammen, den die allgemeine Meridianebene mit der Ebene des Ausgangsmeridians bildet; es ist also

$$w = w(v).$$

Somit ergibt sich für eine beliebige achsenaffine Fläche die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= U(u)\,V(v)\cos w(v) \\ y &= U(u)\,V(v)\sin w(v) \\ z &= z(u). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten ihres Linienelements

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

werden:

$$E = U'^2 V^2 + z'^2; \quad F = U U' V V'; \quad G = U^2(V'^2 + V^2 w'^2).$$

Es handelt sich bei der Aufsuchung von stetigen Verbiegungen achsenaffiner Flächen darum, von einem veränderlichen Parameter c abhängige Funktionen U, V, w, z zu finden, derart, daß E, F, G diesen Parameter nicht enthalten. Für eine Ausgangsfläche x_0, y_0, z_0 sollen die Veränderlichen u und v so definiert werden, daß $w_0 = v$ und $z_0 = u$ gesetzt wird; dann sind die Koeffizienten ihres Linienelements:

$$E_0 = U_0'^2 V_0^2 + 1; \quad F_0 = U_0 U_0' V_0 V_0'; \quad G_0 = U_0^2(V_0'^2 + V_0^2).$$

Als Bedingungen für die gesuchte Abwickelbarkeit ergaben sich die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} &a) \quad U'^2 V^2 + z'^2 = U_0'^2 V_0^2 + 1 \\ &b) \quad U U' V V' = U_0 U_0' V_0 V_0' \\ &c) \quad U^2 (V'^2 + V^2 w'^2) = U_0^2 (V_0'^2 + V_0^2). \end{aligned}$$

Zunächst erkennt man aus (c), daß sich U von U_0 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden kann; die Form des Linienelements läßt aber ersehen, daß ein Faktor von U auch in die Funktion V hineingenommen werden kann, so daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$1) \qquad U = U_0$$

setzen kann. Dann ergibt die Integration von b)

$$2) \qquad V^2 = V_0^2 + c; \quad V = \sqrt{V_0^2 + c},$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Dann folgt aus (a)

$$3) \qquad z = \int \sqrt{1 - c\, U_0'^2}\, du$$

und aus (c)

$$4) \qquad w = \int \frac{\sqrt{V_0^4 + c(V_0^2 + V_0'^2)}}{V_0^2 + c}\, dv$$

Die aus (1) – (4) erhaltenen Größen U, V, z, w bestimmen, da sie von einem Parameter c abhängen, eine einfach unendliche stetige Folge von aufeinander abwickelbaren achsenaffinen Flächen. Die zu z und w noch hinzutretenden additiven Konstanten sind unwesentlich und verschieben nur den Anfangspunkt der Zählung.

4. Je nach dem Vorzeichen von c haben die Biegungsflächen verschiedenen Charakter, ähnlich wie das bei der Verbiegung der Rotationsflächen bekannt ist.

a) Für $c > 0$ wird $V^2 > V_0^2$; alle Punkte der Fläche vergrößern bei der Verbiegung ihren Abstand von der Achse. Jedoch ist z und somit ein Punkt der verbogenen Fläche nur reell, so lange $1 - c\, U_0'^2 > 0$, also $U_0'^2 < \frac{1}{c}$ ist. Der reelle

Teil der verbogenen Fläche endet mit einer oder mehreren, auch ∞ vielen Parallelkurven, deren Parameter $u = \bar{u}$ die Gleichung $U_0'^2 = \frac{1}{c}$ erfüllen. In den Endpunkten des reellen Teils der Meridiankurven ist somit $\frac{dz}{du} = 0$; und da $\frac{dr}{du} = U' V = U_0' \sqrt{V_0^2 + c}$ nicht gleichzeitig verschwinden kann, ist $\frac{dz}{dr} = 0$; also besitzt die Fläche in einer derartigen ebenen Grenzkurve des reellen Teiles eine der ganzen Grenzkurve gemeinsame, auf der Achse senkrechte Tangentialebene.

Auf der Ausgangsfläche entsprechen diesen Grenzkurven ebene Parallelkurven, für welche

$$z_0 = \bar{u}; \quad \frac{dz_0}{dr_0} = \frac{1}{U_0' V_0} = \pm \frac{\sqrt{c}}{V_0}$$

ist. Die Richtung der Tangente einer Meridiankurve in einem Punkt einer solchen Parallelkurve ist also nur von dem Parameter v des Meridians, nicht von dem Parameter $\bar{u}$ der Grenzkurve, bzw. der Parallelkurve abhängig. Sämtliche Tangenten der Meridiane längs einer Parallelkurve bilden einen Kegel; seine Spitze liegt auf der Achse und hat von der Parallelebene die Entfernung $r_0 \frac{dz_0}{dr_0} = \pm U_0 \sqrt{c}$. Hat also die verbogene Fläche mehr als eine Grenzkurve, so wird die Ausgangsfläche längs der entsprechenden Parallelkurven, die im allgemeinen nur ähnlich sind, von kongruenten, bzw. symmetrischen Kegeln berührt.

b) Für $c < 0$ wird $V^2 < V_0^2$; alle Punkte der Fläche verkleinern bei der Verbiegung ihre Entfernung von der Achse. z bleibt für jeden Wert von U_0' reell. Pole der Ausgangsfläche, in denen die Tangentialebene auf der Achse senkrecht steht, gehen in Knotenpunkte der verbogenen Fläche über; es treten dann spindelartige Flächen auf.

Eine Singularität, welche bei der Verbiegung der Rotationsflächen kein Seitenstück besitzt, ergibt sich aus Gleichung (2). Die verbogene Fläche wird imaginär, wenn $V_0^2 + c < 0$ wird. Der reelle Teil der Biegungsfläche endet also an den Meridiankurven, deren Parameter $v = \bar{v}$ die Gleichung $V_0^2 = -c$ erfüllen. Für diese Werte wird $V = 0$ und $r = 0$; die die Grenze des reellen Teiles bildenden Meridiane sind also Gerade und fallen in die Achse. Diese Singularität entsteht in der Weise, daß ein von Meridianen begrenztes Stück der Ausgangsfläche so lange in Richtung der Achse gestreckt werden kann, bis der kürzeste Meridian in eine Gerade übergegangen ist. Gleichzeitig wird nach (4) $\frac{dw}{dv} = \infty$, wenn nicht auch der Zähler $= 0$ wird für einen Wert $v = \bar{v}$, der $V_0^2 + c = 0$ erfüllt. Der Wert, den w selbst annimmt, wenn das in (4) auftretende Integral bis an eine Nullstelle des Nenners erstreckt wird, erfordert eine besondere Untersuchung, die hier nur mit einer Einschränkung Platz finden soll: Setzt man voraus, daß V_0' für $v = \bar{v}$ nicht verschwindet, so kann man V_0 in eine Reihe entwickeln von der Form

$$V_0 = \sqrt{-c} + c_1 (v - \bar{v}) + c_2 (v - \bar{v})^2 + \cdots,$$

wo $c_1 \neq 0$ ist. Dann ist der Zähler $\sqrt{V_0^4 + c(V_0^2 + V_0'^2)}$ regulär und von Null verschieden für $v = \bar{v}$; der Nenner wird

$$V_0^2 + c = 2\sqrt{-c}\, c_1 (v - \bar{v}) + \cdots,$$

folglich besitzt $\frac{dw}{dv}$ für $v = \bar{v}$ einen Pol erster Ordnung und mithin w selbst einen logarithmischen Pol.

Läßt man obige Einschränkung fallen, so verschwindet der Zähler von $\frac{dw}{dv}$ gleichzeitig mit dem Nenner; doch zeigt sich, daß hiedurch im allgemeinen das Unendlichwerden von $\frac{dw}{dv}$ und w selbst nicht aufgehoben wird.

Es wird also der zu einem singulären, in eine Gerade ausartenden Meridian gehörige Zentriwinkel unendlich; die Fläche umschließt den singulären Meridian spiralig in ∞ vielen Windungen.

5. Als Beispiel sei eine einfache Verbiegung des 3achsigen Ellipsoids

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

behandelt. Unter Benützung der oben eingeführten Normierung der Parameter für die Ausgangsfläche erhält man für die Koordinaten:

$$x_0 = \frac{ab}{c}\sqrt{\frac{c^2 - u^2}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \cos v$$

$$y_0 = \frac{ab}{c}\sqrt{\frac{c^2 - u^2}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \sin v$$

$$z_0 = u.$$

Dabei ist

$$U_0 = \frac{ab}{c}\sqrt{c^2 - u^2}; \quad V_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}; \quad w = v.$$

Dann sind die entsprechenden Größen für die Biegungsflächen, wenn man, um Verwechslungen mit der Halbachse c zu vermeiden, die Konstante c der allgemeinen Untersuchung durch γ ersetzt:

$$U = \frac{ab}{c}\sqrt{c^2 - u^2}; \quad V = \sqrt{\frac{1 + \gamma(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}$$

$$z = \int \sqrt{1 - \gamma \frac{a^2 b^2}{c^2} \frac{u^2}{c^2 - u^2}}\, du$$

$$w = \int \frac{\sqrt{1 + \gamma \frac{a^4 \sin^2 v + b^4 \cos^2 v}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}}{1 + \gamma(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}\, dv$$

Hieraus folgen ohne weiteres die Koordinaten einer stetigen Folge von Biegungsflächen des Ellipsoids; sie sollen hier nicht

vollständig angegeben, sondern statt dessen ein besonderer Fall weiter verfolgt werden.

Es sei $a > b$ vorausgesetzt; dann ist der in der YZ-Ebene liegende Meridian der kürzeste. Das Ellipsoid soll unter spindelartiger Verbiegung soweit gestreckt werden, daß dieser Meridian in eine Gerade übergeht. Der Meridian gehört zu dem Parameter $v = \frac{\pi}{2}$; für diesen Wert muß also $V = 0$ werden. Hieraus ergibt sich die Konstante $\gamma = -\frac{1}{a^2}$.

Für diese spezielle Biegungsfläche erhält man also:

$$U = \frac{ab}{c}\sqrt{c^2 - u^2}; \quad V = \frac{e}{a}\,\frac{\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}},$$

wo $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist;

$$z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}\,\frac{u^2}{c^2 - u^2}}\,du$$

$$w = \frac{ab}{e}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\cos v\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} =$$

$$\left[\frac{b}{e}\lg\frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]_{v_0}^{v}.$$

Dabei muß erwähnt werden, daß hier gerade der Fall eintritt, daß außer dem Nenner von $\frac{dw}{dv}$ zunächst auch der Zähler für $v = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, wenn auch von niedrigerer Ordnung als der Nenner. w selbst nimmt für $v = \frac{\pi}{2}$ den Wert ∞ an. Das bedarf für das positive Vorzeichen der Quadratwurzel keiner weiteren Überlegung; für das negative Vorzeichen läßt die Umformung

$$\frac{a \sin v - \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v} = \frac{-b \cos v}{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}$$

erkennen, daß für $v = \frac{\pi}{2}$ der Logarithmand Null, also $w = \infty$ wird.

Es entspricht somit dem kürzesten Meridian des Ellipsoids auf der Biegungsfläche eine Gerade, um die sich die Fläche spiralig windet.

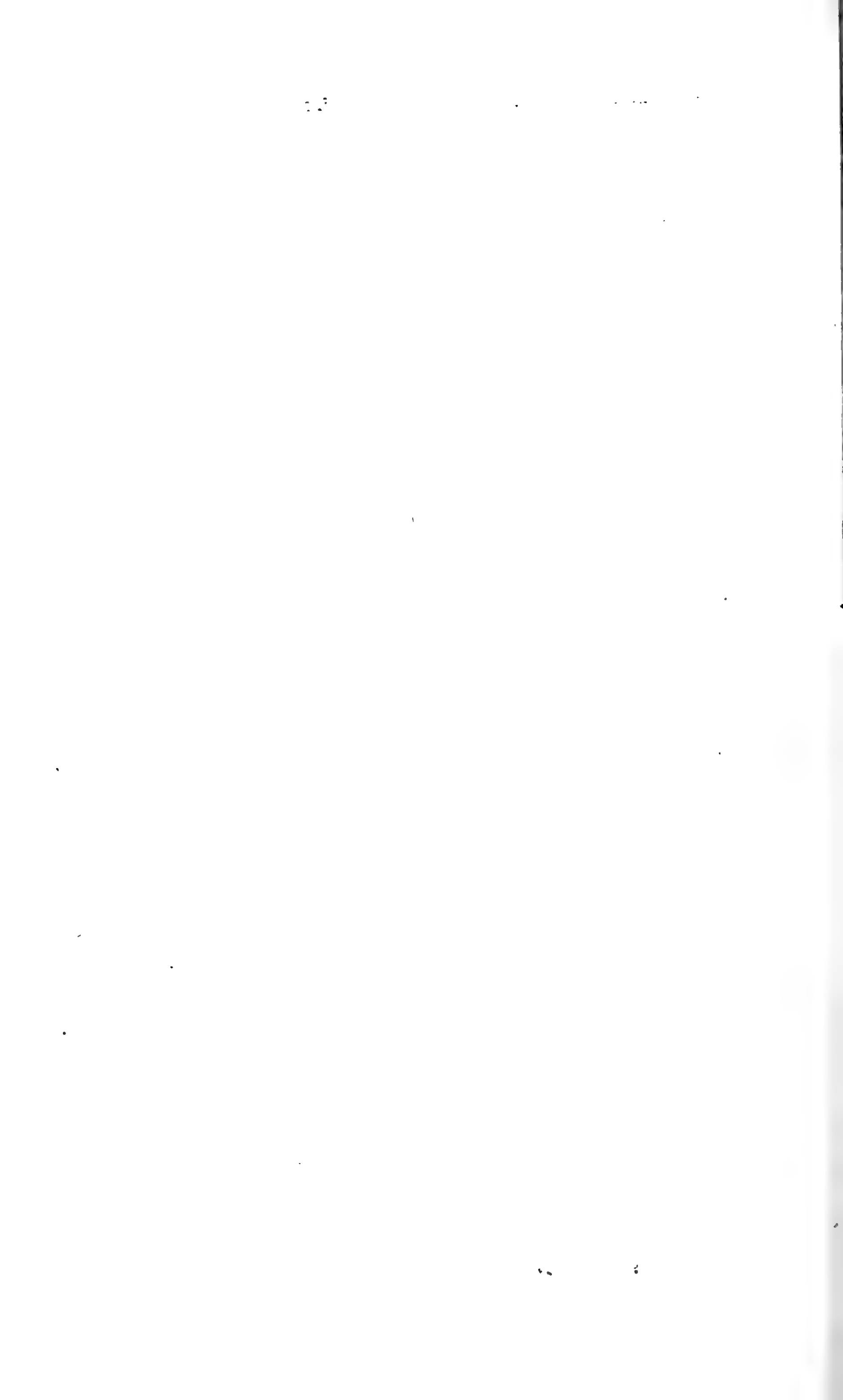
Die Koordinaten der Biegungsfläche sind, wenn $v_0 = 0$ gesetzt wird:

$$x = \frac{be}{c} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \cos\left[\frac{b}{e} \lg \frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]$$

$$y = \frac{be}{c} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \sin\left[\frac{b}{e} \lg \frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]$$

$$z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2} \frac{u^2}{c^2 - u^2}}\, du.$$

Man bestätigt nachträglich leicht die Isometrie der gefundenen Fläche mit dem Ellipsoid durch Berechnung des Linienelements.



Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems.

Von **Hans Hamburger** (Berlin).

(Vorläufige Mitteilung.)[1]

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 15. November 1919.

---

§ I.

1. Es sei eine formale Potenzreihe der Form

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z_2} + \frac{c_2}{z_3} - \cdots \tag{1}$$

vorgelegt, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt wird. Man bilde aus ihren Koeffizienten die Hankelschen Determinanten

$$C_m = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots, & c_{m-1} \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m-1}, & c_m, & \ldots, & c_{2m-2} \end{vmatrix}, \quad B_m = \begin{vmatrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_m \\ c_2, & c_3, & \ldots, & c_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_m, & c_{m+1}, & \ldots, & c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

und mache die Voraussetzung, daß sämtliche c_m reell, C_m und B_m von Null verschieden sind. Dann läßt sich die Potenzreihe (1) formal durch ein einfaches Divisionsverfahren in einen Kettenbruch von der Gestalt

---

[1]) Die hier vorliegenden Resultate mit den ausgeführten Beweisen sind von der philosophischen Fakultät zu Berlin als Habilitationsschrift angenommen worden.

$$(2) \qquad S(z) = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

entwickeln, wo sämtliche a_ν reelle von Null verschiedene Zahlen bedeuten. Zu jeder Potenzreihe (1) existiert ein und nur ein solcher Kettenbruch (2) und umgekehrt[1]).

Bezeichnet man mit $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ den m-ten Näherungsbruch von $S(z)$, so ergibt sich unmittelbar aus der Gestalt des Kettenbruches: die $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ sind Polynome in z und zwar sind $P_{2n}(z)$ und $P_{2n-1}(z)$ vom Grade $n-1$, $Q_{2n}(z)$ und $Q_{2n-1}(z)$ vom Grade n. Ferner ist für $z = 0$

$$Q_{2n-1} = 0, \quad P_{2n-1} = 1, \quad Q_{2n} = 1.$$

Endlich läßt sich der Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ in eine für hinreichend große Werte von z konvergente Potenzreihe der Gestalt

$$\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{c_0^{(m)}}{z} - \frac{c_1^{(m)}}{z^2} + \frac{c_2^{(m)}}{z^3} - \cdots$$

entwickeln, und zwar wird, wie man auf Grund der Fundamentalformeln für Kettenbrüche

$$\frac{P_{m+1}(z)}{Q_{m+1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{(-1)^m}{Q_{m+1}(z)\, Q_m(z)} \text{ [2])}$$

leicht erkennt,

$$c_\nu^{(m)} = c_\nu \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Durch die letzte Eigenschaft ist der Kettenbruch (2), wenn die Potenzreihe (1) vorgegeben ist, eindeutig bestimmt.

[1]) Vgl. etwa Oskar Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Leipzig 1913, S. 301—307 und S. 375; in folgendem kurz mit Perron, Lehrbuch, zitiert.

[2]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 382.

2. Macht man nunmehr die Voraussetzung

$$C_m > 0 \text{ für alle } m,$$

so werden sämtliche Koeffizienten a_{2n+1} positiv und umgekehrt folgt aus

$$a_{2n+1} > 0 \text{ für alle } n,$$

$$C_m > 0 \text{ für alle } m.$$

In diesem Falle sind die Nullstellen der Polynome $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ sämtlich einfach und reell und es gelten die Partialbruchzerlegungen

$$(3) \qquad \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n{}_\nu \frac{N_\nu^{(n)}}{z + \lambda_\nu^{(n)}}, \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M_0^{(n)}}{z} + \sum_1^n{}_\nu \frac{M_\nu^{(n)}}{z + \omega_\nu^{(n)}},$$

wobei die Zähler $M_\nu^{(n)}$ und $N_\nu^{(n)}$ sämtlich > 0 und die $\omega_\nu^{(n)}$, $\lambda_\nu^{(n)} \neq 0$ sind.

Stieltjes setzt nun bei seinen Untersuchungen noch außerdem

$$B_m > 0 \text{ für alle } m$$

voraus, was mit der Voraussetzung

$$a_{2n} > 0 \text{ für alle } n$$

oder auch mit der Voraussetzung

$$\omega_\nu^{(n)} > 0, \quad \lambda_\nu^{(n)} > 0 \text{ für alle } n \text{ und } \nu$$

gleichbedeutend ist[1]).

3. Nunmehr beweist Stieltjes durch passende Erweiterung bekannter Sternscher Konvergenzkriterien für Kettenbrüche[2]):

I. Divergiert die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu a_\nu$, so konvergiert der Kettenbruch $S(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der

[1]) T. J. Stieltjes, „Recherches sur les fractions continues". Ann. de la fac. des sc. de Toulouse, Bd. VIII und IX (1894 und 1895), im folgenden kurz mit Stieltjes VIII bzw. IX zit. Vgl. insbes. S. 10—12.

[2]) M. A. Stern, „Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs". Journ. für r. u. angew. Math., Bd. 37 (1848), S. 255—272. Stieltjes, VIII, S. 30—39 und S. 61—65. Perron, Lehrbuch, S. 234—235.

kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält, gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$, obgleich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche für sich betrachtet divergieren.

II. Konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$, so konvergieren die vier Folgen von Polynomen $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene gleichmäßig gegen ganze transzendente Funktionen:

$$\lim_{n=\infty} P_{2n}(z) = p(z), \qquad \lim_{n=\infty} P_{2n-1}(z) = r(z)$$

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}(z) = q(z), \qquad \lim_{n=\infty} Q_{2n-1}(z) = s(z).$$

Außerdem ist

$$r(z)\,q(z) - s(z)\,p(z) = 1. \tag{4}$$

Es konvergieren also sowohl die geraden als auch die ungeraden Näherungsbrüche, aber gegen die wegen (4) voneinander verschiedenen Funktionen

$$f_1(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad f_2(z) = \frac{r(z)}{s(z)}.$$

Der Kettenbruch divergiert also.

4. Durch Grenzübergang gelangt Stieltjes von der Partialbruchzerlegung (3) der Näherungsbrüche zu einer fundamentalen Integraldarstellung der Grenzfunktionen $f(z)$, bzw. $f_1(z)$, $f_2(z)$ und zwar erhält er: im Falle I

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}\text{[1]} \tag{5}$$

im Falle II

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u} \tag{6}$$

[1]) Eine ausführliche Darstellung des Stieltjesschen Integralbegriffs siehe Stieltjes, VIII, S. 68—71; Perron, Lehrb., S. 362—374. — Der zit. Satz findet sich bei Stieltjes, VIII, S. 76—90; Perron, Lehrb., S. 402—410.

Hierbei bedeuten $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ im Intervall $0 \leq u < \infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktionen und die Integrale sind Stieltjessche.

Es gelten ferner die sogenannten Momentengleichungen; im Falle I:

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi(u) \tag{7}$$ [1],

im Falle II:

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_1(u) = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_2(u).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß die Funktionen $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ der Formeln (5) und (6) durch die Potenzreihe (1) asymptotisch dargestellt werden[2]).

5. Das Problem zu einer vorgelegten Folge von Koeffizienten c_ν eine im Intervall $0 < u < \infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ zu finden, die den Gleichungen (7) genügt, nennt Stieltjes das Momentenproblem. Man findet leicht eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Momentenproblems, indem man berücksichtigt, daß die mit den Koeffizienten (7) gebildeten quadratischen Formen

$$\sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota x_\varkappa = \int_0^\infty (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa+1}\, x_\iota x_\varkappa = \int_0^\infty u (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

für jedes n positiv definit, also ihre Determinanten C_n und B_n sämtlich > 0 sind.

Durch die bisher angegebenen Sätze ist aber auch bewiesen, daß, wenn die aus den vorgegebenen Koeffizienten c_ν gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv sind, das Momentenproblem immer mindestens eine Lösung besitzt, die durch Grenzübergang aus dem Kettenbruch (2) gewonnen wird.

---

[1]) Stieltjes, VIII, S. 92—93; Perron, Lehrbuch, S. 410—411.

[2]) Stieltjes, VIII, S. 35; Perron, Lehrbuch, S. 413.

Stieltjes beweist ferner, daß im Falle I außer der durch den Grenzübergang (5) gewonnenen Funktion $\varphi(u)$ keine weitere Lösung des Momentenproblems existiert[1]). Im Falle II gibt es außer den Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ der Formeln (6) noch unendlich viele andere Lösungen des Problems. Im Falle I nennt Stieltjes das Momentenproblem bestimmt, im Falle II unbestimmt.

§ II.

6. An diese klassischen Resultate schließen sich die Ergebnisse der vorliegenden Mitteilung an.

Wir lassen die Voraussetzung $B_m > 0$ fallen, verzichten damit also auf $a_{2n} > 0$, $\omega_\nu^{(n)} > 0$, $\lambda_\nu^{(n)} > 0$; behalten aber die Voraussetzung $C_m > 0$ für alle m bei und damit auch die Beziehungen $a_{2n+1} > 0$ und die Partialbruchzerlegungen (3) mit reellen $\omega_\nu^{(n)}$, $\lambda_\nu^{(n)}$ und positiven $M_\nu^{(n)}$, $N_\nu^{(n)}$.

Für diesen Fall gilt ein Satz des Herrn Grommer[2]):

Aus der Folge der Näherungsbrüche $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ kann eine Teilfolge $\frac{P_{m_p}(z)}{Q_{m_p}(z)}$ von der Beschaffenheit ausgewählt werden, daß diese Teilfolge in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, mit wachsendem p gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$ konvergiert, die sich wieder durch ein Stieltjessches Integral darstellen läßt. Doch wird sich dieses Integral in Anbetracht, daß jetzt die Näherungsbrüche auch für negative Werte von

[1]) Stieltjes, VIII, S. 97—104; Perron, Lehrbuch, S. 390—391 und S. 417.

[2]) Jakob Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Diss., Göttingen 1914, abgedr. im Journ. f. r. u. angew. Mathematik, Bd. 144 (1914), S. 140—166; vgl. insbes. S. 137 ff. Herr Grommer betrachtet hier allerdings einen andern Kettenbruch, dessen Näherungsbrüche mit der Folge der Näherungsbrüche gerader Ordnung $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$ übereinstimmen.

z Pole haben können, von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Es ergibt sich also

$$(8) \qquad \lim_{p=\infty} \frac{P_{m_p}(z)}{Q_{m_p}(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

wo $\varphi(u)$ eine im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktion bedeutet.

Außer dem Grommerschen Auswahltheorem war bisher über den Fall $C_m > 0$, $B_m \gtrless 0$ nichts bekannt. Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die Integrale

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \, d\varphi(u)$$

für alle ganzzahligen nicht negativen Werte von ν existieren und gleich c_ν werden. Demzufolge wird die Funktion $f(z)$ der Formel (8) durch die Potenzreihe (1) asymptotisch dargestellt; das heißt aber, das Momentenproblem, wobei die Momente jetzt die Gestalt (9) annehmen, besitzt immer mindestens eine Lösung, wenn die Determinanten C_m sämtlich positiv und die Determinanten B_m sämtlich von 0 verschieden sind.

Daß die Bedingung $C_m > 0$ für die Lösbarkeit des Momentenproblems in seiner neuen Gestalt auch notwendig ist, bemerkt man unmittelbar, wenn man die positiv definite Form

$$(10) \qquad \sum_{0}^{n-1} {}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

betrachtet.

7. Es bleibt jetzt noch übrig, die Frage nach der Bestimmtheit des Momentenproblems im Zusammenhang mit dem Problem der Konvergenz des Kettenbruchs $S(z)$ zu untersuchen. Während im Stieltjesschen Falle sich die Konvergenzeigenschaften des Kettenbruchs $S(z)$ direkt angeben lassen, und man aus der Konvergenz (Divergenz) von $S(z)$ auf die Bestimmtheit (Unbestimmtheit) des Momentenproblems (7) schließt, werden im Falle $B_m \gtrless 0$ die Konvergenzeigenschaften

von $S(z)$ erst aufgeklärt, nachdem über die Bestimmtheit oder Unbestimmtheit des Momentenproblems (9) entschieden ist.

Im folgenden soll ein Kettenbruch kurz als konvergent bezeichnet werden, wenn er in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, gleichmäßig konvergiert, in allen andern Fällen soll er divergent heißen.

Es gelten nun folgende Sätze: Man setze

$$\sigma_n = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}.$$

I'. Dann ist das Momentenproblem (9) bestimmt, wenn mindestens eine der beiden Reihen

$$\sum_0^\infty n\, a_{2n+1}, \quad \sum_1^\infty n\, a_{2n+1}\, \sigma_n^2 \tag{11}$$

divergiert.

II'. Konvergieren beide Reihen (11), so ist das Momentenproblem unbestimmt.

Im Falle I' ist der Kettenbruch konvergent, das heißt es ist

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

während die $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ für sich genommen nicht konvergieren.

Im Falle II' existieren gleichmäßig in jedem ganz im endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} P_{2n-1}(z) = r(z), \quad \lim_{n=\infty} Q_{2n-1}(z) = s(z), \tag{12}$$

wo $r(z)$ und $s(z)$ ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen sind.

Die Grenzwerte von Zähler und Nenner der Näherungsbrüche gerader Ordnung existieren im allgemeinen Falle nicht. Trotzdem gelingt es, die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ so aufzuspalten, daß ihre Konvergenzeigenschaften klar hervortreten. Setzt man nämlich

$$P_{2n}(z) = G_n(z) + \sigma_n P_{2n+1}(z), \quad Q_{2n}(z) = H_n(z) + \sigma_n Q_{2n+1}(z),$$

so konvergieren im Falle II' die Polynome $G_n(z)$ und $H_n(z)$ in jedem ganz im endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene mit wachsendem n gleichmäßig gegen ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen; es ergibt sich also

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} G_n(z) = g(z), \quad \lim_{n=\infty} H_n(z) = h(z).$$

Außerdem besteht zwischen den vier ganzen transzendenten Funktionen $r(z)$, $s(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ in Analogie zu (4) die Beziehung

$$r(z)\,h(z) - s(z)\,g(z) = 1\,.$$

Die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ konvergieren also einzeln im Falle II' dann und nur dann, wenn ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \sigma$ existiert.

Ist $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \infty$, das heißt besitzt die Menge der Zahlen σ_n keinen im endlichen gelegenen Häufungspunkt, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{r(z)}{s(z)};$$

dann und nur dann ist also der Kettenbruch $S(z)$ konvergent für den Fall, daß das zugehörige Momentenproblem (9) unbestimmt ist.

Wenn alle $B_m > 0$ und damit auch alle $a_{2n} > 0$ sind, die Reihen (11) beide konvergieren und $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \infty$ ist, so ist nach den Stieltjesschen Sätzen I das Momentenproblem (7) bestimmt, das Momentenproblem (9) nach unsern Sätzen II' unbestimmt.

8. Eine fast noch größere Rolle als der Kettenbruch der Gestalt (2) spielt in der mathematischen Literatur der Kettenbruch[1])

$$(14) \qquad K(z) = \frac{k_1}{z + l_1} + \frac{k_2}{z + l_2} + \cdots.$$

[1]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 322—326 und S. 376.

wo die l_ν reell (auch Null), die k_ν reell, aber nicht Null sind. Der Kettenbruch (14) wird aus der Potenzreihe (1) durch ein dem Euklidschen Algorithmus nachgebildetes Divisionsverfahren gewonnen. Er hat vor dem Kettenbruch (2) voraus, daß er nicht an die Bedingung $B_m \neq 0$ gebunden ist, sondern immer dann und nur dann existiert, wenn sämtliche Derminanten $C_m \neq 0$ sind.

Dann und nur dann, wenn für alle m die Determinante $C_m > 0$ ist, ergibt sich $k_\nu < 0$ für alle $\nu > 2$, $k_1 > 0$. Mit dem Kettenbruch (2), falls dieser existiert, ist er durch die Beziehung

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

verbunden, wenn mit $K_n(z) = \dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ der Näherungsbruch n-ter Ordnung von $K(z)$ bezeichnet wird.

Die Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche $K_n(z)$ dient zunächst dazu, eine Lösung des Momentenproblems auch für den Fall zu konstruieren, daß einige der Determinanten B_m verschwinden.

Außer den Näherungsbrüchen $K_n(z) = \dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ betrachten wir auch die Quotienten

$$K_n(z;t) = \frac{U_n(z) + t\,U_{n-1}(z)}{V_n(z) + t\,V_{n-1}(z)} = \frac{k_1}{z+l_1} \,\Big|\, + \cdots + \frac{k_{n-1}}{z+l_{n-1}} \,\Big|\, + \frac{k_n}{z+l_n+t}$$ [1]

wo t einen reellen Parameter bedeutet und nennen $K_n(z;t)$ einen verallgemeinerten Näherungsbruch n-ter Ordnung von $K(z)$.

Wir sagen ferner: der Kettenbruch $K(z)$ *konvergiert vollständig* gegen die Funktion $f(z)$, wenn zu jeder vorgegebenen, beliebig kleinen positiven Zahl ε und zu jedem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, sich eine Zahl $N = N(\varepsilon, \mathfrak{B})$ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß, wenn $n > N$ ist, für alle Punkte z von $\mathfrak{B}$ und alle reellen Werte von t

$$|K_n(z;t) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{wird.}$$

[1] Diese bequeme Schreibweise des Kettenbruches ist von Herrn Pringsheim eingeführt worden. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 3.

Nunmehr zeigt sich, daß *das Momentenproblem dann und nur dann bestimmt ist, wenn der Kettenbruch $K(z)$ vollständig konvergent ist.*

Setzt man unter Benutzung einer bekannten Fundamentalformel der Kettenbruchtheorie

$$\Delta_{n-1} = V_{n-1}(0)\, U_n(0) - V_n(0)\, U_{n-1}(0) = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \dots k_n,$$

so lassen sich die Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ mit Hilfe der Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ durch die Formeln definieren:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{2n-1}(z) &= \frac{V_{n-1}(0)\, U_n(z) - V_n(0)\, U_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ Q_{2n-1}(z) &= \frac{V_{n-1}(0)\, V_n(z) - V_n(0)\, V_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ G_n(z) &= -\frac{U_{n-1}(0)\, U_n(z) - U_n(0)\, U_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ H_n(z) &= -\frac{U_{n-1}(0)\, V_n(z) - U_n(0)\, V_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln gelten auch, wenn der Kettenbruch $S(z)$ der Form (2) nicht existiert, wofern nur sämtliche Determinanten $C_m \neq 0$ bzw., wie in unserm Falle, sogar > 0 sind, und liefern für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, dieselben Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$, $H_n(z)$ wie die alten Definitionen.

Andererseits ist offenbar

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = K_n\left(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right), \quad \frac{G_n(z)}{H_n(z)} = K_n\left(z; -\frac{U_n(0)}{U_{n-1}(0)}\right)$$

d. h. die Quotienten

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{G_n(z)}{H_n(z)}$$

ergeben sich als diejenigen verallgemeinerten Näherungsbrüche n-ter Ordnung von $K(z)$, die für $z = 0$ einen Pol haben bzw. dort verschwinden. Die Nenner in den Formeln (15) sind so bestimmt, daß $P_{2n-1}(0) = 1$ und $H_n(0) = 1$ wird.

Die Reihen $\sum_0^\infty{}_n a_{2n+1}$ bzw. $\sum_0^\infty{}_n a_{2n+1}\sigma_n^2$ lassen sich durch die allgemeineren Reihen

$$(16) \qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{V_n^2(0)}{\Delta_n} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}_n \frac{U_n^2(0)}{\Delta_n}$$

ersetzen, die für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, mit den Reihen (11) übereinstimmen.

Die alten über die Folge von Polynomen $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ bzw. über die Reihen (11) bewiesenen Sätze gelten nunmehr auch für den Fall, daß beliebig viele der Determinanten B_m verschwinden, wofern man nur die Polynome bzw. die Reihen durch die allgemeineren Beziehungen (15) bzw. (16) definiert.

Aus unsern allgemeinen Sätzen lassen sich auch leicht notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne von $K(z)$ ableiten.

Außerdem wird für beide Kettenbrüche der Gestalt (2) und (14) der Satz bewiesen:

Ist der Kettenbruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) für einen beliebigen reellen oder komplexen Wert von z konvergent, so konvergiert der Kettenbruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält.

9. Es soll jetzt dem Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems eine Form gegeben werden, die unmittelbar von den Eigenschaften der mit den c_ν gebildeten quadratischen Formen (10) $F_n(x) = \sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa} c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa$ ausgeht und nicht erst auf die zugehörigen Kettenbrüche $K(z)$ und $S(z)$ zurückgreift. Wegen $C_m > 0$ für alle m ist die quadratische Form $F_n(x)$ positiv definit, besitzt also für $x_0 = 1$ ein Minimum $M^{(n)} > 0$. Mit wachsendem n können nun aber die Zahlen $M^{(n)}$ nie zunehmen, es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} M^{(n)} = M > 0.$$

Die formale quadratische Form von unendlich vielen Veränderlichen $\sum_0^\infty{}^{\iota,\varkappa} c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa$, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt ist, wird eigentlich definit (uneigentlich definit) genannt, je nachdem die ihr zugehörige Zahl $M > 0$ ($M = 0$) ist.

Der Hauptsatz läßt sich nun auch in folgender Weise aussprechen:

Das Momentenproblem ist dann und nur dann bestimmt, wenn mindestens eine der beiden quadratischen Formen

$$\sum_0^\infty{}^{\iota,\varkappa} c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa, \quad \sum_0^\infty{}^{\iota,\varkappa} c_{\iota+\varkappa+2} x_\iota x_\varkappa$$

uneigentlich definit ist.

Oder damit gleichbedeutend:

Das Momentenproblem ist bestimmt oder unbestimmt, je nachdem der Grenzwert der stets abnehmenden positiven Determinantenquotienten $\dfrac{C_n}{C_n'}$ Null ist oder nicht.

Hierbei ist zur Abkürzung

$$C_n' = \begin{vmatrix} c_4, & c_5, & \ldots, & c_{n+1} \\ c_5, & c_6, & \ldots, & c_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+1}, & c_{n+2}, & \ldots, & c_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt.



Über unendliche Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 15. November 1919.

1. Der eingliedrig-periodische Kettenbruch: $\left[\frac{a}{1}\right] = \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots$, wo a eine beliebige Zahl ist, konvergiert bekanntlich, mit Ausnahme der reellen Werte von a, die $< -\frac{1}{4}$ sind und für die er wesentlich divergiert. Die nächsteinfache Klasse von Kettenbrüchen, die eingliedrig-limitärperiodischen[1]) Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, wo $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ eine bestimmte Zahl ist — wobei aber die reellen a, die $\leqq -\frac{1}{4}$ sind, von der Betrachtung ausgeschlossen werden — sind zunächst nur im weiteren Sinne konvergent; sie konvergieren auch schlechthin, abgesehen von gewissen Ausnahmefällen. Herr Perron[2]) hat weiter erkannt, daß es dazu genügt, wenn nur

[1]) Nach der Bezeichnung von A. Pringsheim: Diese Berichte, Jahrg. 1910, Abh. 6, S. 36.

[2]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, § 56, Satz 40. — Herr Perron behandelt dort Kettenbrüche von der etwas allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo die a_ν bzw. b_ν in der Nähe zweier Zahlen a bzw. b liegen. Die im Text vorgenommene Beschränkung auf die Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ist keine wesentliche, da ja jene allgemeinere Form durch äquivalente Transformation stets in die speziellere übergeführt werden kann.

von einem ν an alle a_ν in einer gewissen Nähe von a liegen (ohne daß $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a$ sein müßte); solche Kettenbrüche mag man nach dem Vorgange von Herrn Pringsheim als nahezu eingliedrig-periodisch bezeichnen. Ist diese Bedingung schon von $\nu = 2$ an erfüllt, so ist der Kettenbruch stets schlechthin (und dann unbedingt) konvergent; man kann auch sagen, ein derartiger Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ liege in der Umgebung des Kettenbruches $\left[\frac{\dot{a}}{1}\right]$.

Das Perronsche Resultat besagt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn die a_ν in einem gewissen Kreise um den Punkt a liegen. Herr von Pidoll hat dasselbe in seiner Inaugural-Dissertation[1]) aufs neue bewiesen und neuerdings hat Herr Pringsheim[2]) eine vereinfachte Fassung und Herleitung des betreffenden Satzes angegeben. Inzwischen hatte ich das Perronsche Problem dahin verallgemeinert, daß ich Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ betrachtete, die in der Umgebung eines andern Kettenbruches $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (also mit von ν abhängigen Teilzählern c_ν an Stelle der oben mit a bezeichneten festen Zahl) liegen[3]). Die hierbei angestellten Überlegungen haben mich dazu geführt, auch dem auf Kettenbrüche der zuvor erwähnten spezielleren Form bezüglichen Perronschen Resultat eine erheblich verbesserte Fassung zu geben. Dieselbe liefert als Konvergenzbedingung eine formal überraschend einfache „Um-

---

[1]) Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, München 1912; insbesondere § 3.

[2]) Diese Berichte, Jahrg. 1918, S. 65—92; insbesondere § 2.

[3]) Journ. f. Math. 147 (1917), S. 132—160. — Mathematikai és Természettudományi Értesítö, Budapest, Bd. 35 (1917), p. 503—543. — Ich benutze daselbst, wie Herr Perron, die allgemeinere Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

gebung" $|a - a_\nu| \leq r$, welche nicht nur alle bisher gefundenen umfaßt oder überragt, sondern auch den speziellen Vorzug besitzt, nicht, wie jene, gleichzeitig mit a gegen Null abzunehmen, und auch für $a = 0$ Geltung behält[1]); doch erfordert die vollständige Einordnung dieses Falles in das Hauptresultat die Heranziehung des bekannten Konvergenzkriteriums $|a_\nu| < \frac{1}{4}$[2]). Zugleich erkennt man, daß der auf diese Weise für $a = 0$ zum Vorschein kommende Umgebungsradius $|a_\nu| = \frac{1}{4}$ wirklich mit diesem Werte sein Maximum erreicht, da ja der periodische Kettenbruch $\left[\frac{-\frac{1}{4} - a}{1}\right]$ $(a > 0)$ bereits divergiert. Aus dem-

---

1) Nur die Pidollsche Fassung kann leicht dahin ergänzt werden, daß sie auch für $a = 0$ eine Umgebung liefert.

2) Vgl. Pringsheim, Diese Berichte, Bd. 28, 1898, S. 295—324, insbesondere S. 322. Daselbst gibt Herr Pringsheim unter anderem die Konvergenzbedingung

$$|a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_\nu| \leq \tfrac{1}{4} \ (\nu \geq 3),$$

wobei er später (Diese Berichte, Bd. 35, 1905, S. 359—380, insbesondere S. 369—372) auch den Fall $|a_2| = \frac{1}{2}$ berücksichtigt. Es ist erwähnenswert, daß das Konvergenzkriterium $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ $(\nu \geq 2)$ schon J. Slechinsky (Mémoires de la section mathématique de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie, Odessa, Bd. X, 1889, S. 201—255) gefunden hat. Soweit ich aus den Formeln der in russischer Sprache geschriebenen Arbeit ersehen konnte, geht Slechinsky, ebenso wie Herr Pringsheim, von dem Konvergenzkriterium

$$|b_\nu| \geq |a_\nu| + 1, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ aus, und sein Beweis für dieses Kriterium scheint dem Pringsheimschen ganz analog zu sein. Übrigens kann das Kriterium $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ $(\nu \geq 2)$ schon einer viel älteren Arbeit von J. Worpitzky [Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche. Friedrichs-Gymnasium und Realschule, Jahresbericht (S. 3—39), Berlin 1865; insbesondere § 22] entnommen werden. — Ohne Hinzuziehung dieses Kriteriums erhalte ich allenfalls noch alle inneren Punkte des Kreises mit dem Radius $\frac{1}{4}$, d. h. die Konvergenz-Umgebung $|a_\nu| \leq \frac{\varrho}{4}$, wo $0 < \varrho < 1$. Vgl. hierzu die Fußnote auf S. 403.

selben Grunde ist dann offenbar für alle Stellen der Strecke $0 > a > -\frac{1}{4}$ die größte Umgebung $|a_\nu - a| \leq \frac{1}{4} + a$[1]).

2. Das Resultat, das sich im folgenden ergeben wird, kann so zusammengefaßt werden:

Die Teilzähler des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ seien beliebige komplexe Zahlen, die Null inbegriffen; a sei eine beliebige Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, die $\leq -\frac{1}{4}$ sind. Die Wurzeln z, z' der Gleichung

$$(1) \qquad y^2 - y - a = (y - z)(y - z') = 0$$

sind dann ungleichen absoluten Betrages, und es sei

$$(2) \qquad |z| > |z'|, \quad \frac{z'}{z} = q.$$

Ist dann

$$(3) \qquad |a - a_\nu| \leq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2, \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ im allgemeinen konvergent, und nur in gewissen Ausnahmefällen außerwesentlich divergent. Die Konvergenz besteht ausnahmslos, wenn außerdem $|q| < \frac{1}{3}$ ist; sie besteht auch

---

[1]) Für den Grenzfall $a = -\frac{1}{4}$ läßt sich noch eine Konvergenz-Umgebung des periodischen Kettenbruches $\left|\frac{-\frac{1}{4}}{1}\right|$ bestimmen, wenn man den Begriff „Umgebung" allgemeiner faßt, so daß der Kreis, in dem a_ν liegen soll, einen von ν abhängigen Radius r_ν hat. Natürlich muß nach obigem $\lim\limits_{\nu \to \infty} r_\nu = 0$ sein. Eine solche Umgebung habe ich in meinen auf S. 396, Fußn. 3 zitierten Arbeiten (S. 147—148 bzw. S. 527—528) bestimmt. Bei dieser Gelegenheit sei ein sinnstörender Schreibfehler berichtigt: auf S. 148 bzw. 528 soll es $a_{\nu+1} + \frac{1}{4}$ statt $a_{\nu+1} - \frac{1}{4}$ heißen.

In den oben zitierten Arbeiten von Herrn Perron, Pidoll und von mir spielt die von Herrn Pringsheim (s. die auf S. 395, Fußn. 1 zitierte Arbeit) zur Behandlung des limitärperiodischen Kettenbruches angewandte Methode eine wichtige Rolle; ihr Kernpunkt besteht in einer gewissen Auflösung der dreigliedrigen Rekursionsformel $D_{\nu+1} = D_\nu + a_{\nu+1} D_{\nu-1}$. Das Nähere wird aus Nr. 2 ersichtlich.

ohne diese Einschränkung jedenfalls in dem engeren Bereich

(4) $$|a - a_\nu| \leqq \frac{(|z| - |z'|)^3 \, [2 - |z'| \, (1 - |q|)]}{[2 + |z| \, (1 - |q|)^2]^2}, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

Insbesondere ist in jedem Fall

(5) $$|a - a_\nu| \leqq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - |q|), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

ein Konvergenzbereich. Die Konvergenz ist bei beliebiger Veränderlichkeit der a_ν gleichmäßig im Bereich (3) für $|q| \leqq \frac{1}{3}$, und im Bereich (4) bezw. (5) für irgend ein a; die Konvergenz ist auch unbedingt.

Für den Beweis bemerke man zunächst, daß wegen (1) und (2)

(6) $$z + z' = 1, \quad zz' = -a, \quad |z'| < |z|$$

ist, und daß dann der eingliedrig-periodische Kettenbruch $\left[\frac{\dot{a}}{1}\right]$ konvergiert und den Wert $-z'$ hat.

Es sei nun z_1' eine zunächst beliebige Zahl, und die Zahlen $z_1, z_2', z_2, z_3', \ldots$ seien nach und nach aus den Gleichungen berechnet

(7) $$z_\nu + z_\nu' = 1, \quad z_{\nu+1}' z_\nu = -a_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

diese Bestimmung ist eindeutig, wenn kein z_ν verschwindet. Es sei ferner α_1 eine positive Zahl, die der Bedingung

(8) $$\alpha_1 < |z| - |z'|$$

genügt, und man setze

(9) $$\alpha_2 = \alpha_1 (|z| - |z'| - \alpha_1).$$

Nun führe ich die Bedingungen ein:

(10) $$|a - a_\nu| \leqq \alpha_2, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

und

(11) $$|z_1' - z'| \leqq \alpha_1;$$

ich zeige zunächst, daß dann

(12) $$|z - z_\nu| \leqq a_1 \text{ und } z_\nu \neq 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist. Für $\nu = 1$ folgt dies sofort, denn es ist nach (6), (7) und (11)

$$|z - z_1| = |z_1' - z'| \leqq a_1;$$

sodann ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf die Ungl. (8)

$$|z_1| = |z_1 - z + z| \geqq |z| - |z - z_1| \geqq |z| - a_1 > |z'| \geqq 0.$$

Angenommen nun (12) gelte bereits für $\nu = n$ $(n \geqq 1)$, so ist z_{n+1} eindeutig bestimmt und ich beweise die Gültigkeit von (12) für $\nu = n + 1$. Man erhält nämlich aus (7)

$$z_{n+1} = 1 - z'_{n+1} = 1 + \frac{a_{n+1}}{z_n},$$

und dann wird mit Rücksicht auf (6)

$$z - z_{n+1} = 1 - z' - z_{n+1} = -z' - \frac{a_{n+1}}{z_n} = -\frac{z_n z' + a_{n+1}}{z_n};$$

fügen wir hier im Zähler $zz' + a$ $(= 0)$ hinzu, so folgt

$$z - z_{n+1} = \frac{1}{z_n}\left[z'(z - z_n) + a - a_{n+1}\right].$$

Da nun nach Voraussetzung $|z - z_n| \leqq a_1$ ist, so erhält man mit Hilfe von (10)

$$|z - z_{n+1}| \leqq \frac{1}{|z_n|}(a_1 |z'| + a_2);$$

ferner ist

(13) $$|z_n| = |z_n - z + z| \geqq |z| - |z_n - z| \geqq |z| - a_1,$$

und nach (9)

$$a_1 |z'| + a_2 = a_1(|z| - a_1),$$

somit wird

$$|z - z_{n+1}| \leqq \frac{a_1 |z'| + a_2}{|z| - a_2} = a_1.$$

Schließlich erhält man

$$|z_{n+1}| \geqq |z| - |z_{n+1} - z| \geqq |z| - a_1 > 0;$$

somit gilt (12) und auch (13) allgemein.

Nun schätze ich den Quotienten $\frac{z'_\nu}{z_\nu}$ ab; es ist nach (6) und (7)

$$\frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{z'}{z} + \frac{z'_\nu}{z_\nu} - \frac{z'}{z} = \frac{z'}{z} + \frac{(1-z_\nu)z-(1-z)z_\nu}{z z_\nu} = \frac{z'}{z} + \frac{z-z_\nu}{z z_\nu},$$

also mit Berücksichtigung von (12) und (13)

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| \leq \left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{a_1}{|z|(|z'|-a_1)}. \tag{14}$$

Setzt man daher voraus, daß

$$\left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{a_1}{|z|(|z'|-a_1)} < 1 \tag{15}$$

ist, so wird sicherlich die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{z'_2 \ldots z'_\nu}{z_2 \ldots z_\nu}\right| \tag{16}$$

konvergent. Nun folgt aus (7)

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_1}{z_1+z'_1}, \frac{-z_{\nu-1}z'_\nu}{z_\nu+z'_\nu}\right]_2^\infty,$$

und vermöge einer bekannten Eulerschen Formel erhält man[1])

$$\left[\frac{a_1}{z_1+z'_1}, \frac{-z_{\nu-1}z'_\nu}{z_\nu+z'_\nu}\right]_2^n = \begin{cases} \frac{a_1}{z_1}\left(1+\frac{z'_2}{z_2}+\frac{z'_2 z'_3}{z_2 z_3}+\cdots+\frac{z'_2\ldots z'_n}{z_2\ldots z_n}\right) & \text{für } z'_1 = 0 \\ \frac{a_1}{z'_1}\left(1+\frac{1}{1+\frac{z'_1}{z_1}+\cdots+\frac{z'_1\ldots z'_n}{z_1\ldots z_n}}\right) & \text{für } z'_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Im Falle $z'_1 = 0$ folgt hieraus nach (16) ohne weiteres die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, während im Falle $z'_1 \neq 0$ noch im allgemeinen Konvergenz auftritt, abgesehen von dem Ausnahmefalle

[1]) Vgl. meine auf S. 396, Fußn. 3 zitierten Arbeiten; daselbst ist nur vorausgesetzt: $z_\nu \neq 0$ $(\nu \geqq 1)$, während z'_ν auch Null sein darf.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z_1' \ldots z_\nu'}{z_1 \ldots z_\nu} = -1;$$

in diesem Falle ist der Kettenbruch außerwesentlich divergent.

Ich setze zunächst

$$z_1' = 0;$$

die Bedingung (11) geht dann in

$$|z'| \leqq a_1$$

über. Wählt man speziell

$$a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2},$$

so heißt dies

$$2|z'| \leqq |z| - |z'|,$$

oder

$$\left|\frac{z'}{z}\right| < \frac{1}{3}. \tag{17}$$

Zugleich wird

$$a_2 = \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2,$$

und die Bedingung (10) lautet nun

$$|a - a_\nu| \leqq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2, \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Aus der Bedingung (15) wird schließlich

$$\left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{|z| - |z'|}{|z|(|z| + |z'|)} < 1,$$

oder

$$\frac{1 - |q|}{|z| + |z'|} < 1 - |q|,$$

das heißt

$$1 < |z| + |z'|.$$

Dies gilt in der Tat (nach (6)) mit der einzigen Ausnahme, daß z und z' dieselbe Amplitude haben. In letzterem Falle sind aber wegen (6) z und z' reell und $\geqq 0$, also a reell und $\leqq 0$; somit ist

$$-\tfrac{1}{4} < a \leqq 0.$$

Eine leichte Rechnung ergibt nun

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad z' = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

$$a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4a},$$

und aus (10) wird

$$a - a_\nu \leqq \tfrac{1}{4}(1 + 4a), \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

Dann ist aber

$$|a_\nu| \leqq |a| + \tfrac{1}{4} + a = \tfrac{1}{4}, \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

und hieraus folgt in bekannter Weise die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$.[1]

Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert (und dann offenbar unbedingt), wenn (17) und (18) gilt. Es ist auch leicht zu sehen, daß die Konvergenz gleichmäßig gilt, wenn die a_ν im Bereich (18) beliebig variieren.

Wähle ich $z_1' \neq 0$, so kann die Bedingung (11) stets erfüllt werden (man braucht ja nur $z_1' = z'$ oder hinreichend nahe an z' zu setzen), also unter der alleinigen Voraussetzung (18) ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ im allgemeinen konvergent und nur in Ausnahmefällen außerwesentlich divergent.

---

[1]) Will man dieses bekannte Kriterium (vgl. Fußn. 2 auf S. 397) nicht heranziehen, so setze man $a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2}(1 - \vartheta)$ $(\vartheta > 0)$; man erkennt leicht, daß dann die Bedingung (15) stets erfüllt ist und erhält für $|q| < \frac{1}{4}$ den Umgebungsradius $a_2 = \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - \vartheta^2)$ $(\vartheta > 0)$. Speziell für $a = 0$ wird $a_2 = \frac{1 - \vartheta^2}{4}$.

Für hinreichend kleine $|a|$ liefert das Kriterium $|a_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ auch eine Konvergenz-Umgebung, nämlich diese:

$$|a - a_\nu| \leqq \tfrac{1}{4} - |a|, \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Bereich stets in (18) enthalten ist.

Um hier mit Sicherheit auf Konvergenz im engeren Sinne schließen zu können, ist eine weitere Abschätzung nötig. Offenbar ist

$$\left|\frac{z_1'\ldots z_\nu'}{z_1\ldots z_\nu}-\left(\frac{z'}{z}\right)^\nu\right| < \prod_{\lambda=1}^{\nu}\left\{\left|\frac{z'}{z}\right|+\left|\frac{z_\lambda'}{z_\lambda}-\frac{z'}{z}\right|\right\}-\left|\frac{z'}{z}\right|^\nu,$$

und

$$\left|\frac{z_\lambda'}{z_\lambda}-\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{z-z_\lambda}{z\,z_\lambda}\right| \leq \frac{a_1}{|z|\,(|z|-a_1)},$$

wobei für $\lambda = 1$ sicher das $<$ Zeichen gilt, wenn z_1' — worüber wir ja im Rahmen der Bedingung (11) verfügen können — hinreichend nahe an z' gewählt ist.

Somit wird

$$\left|\frac{z_1'\ldots z_\nu'}{z_1\ldots z_\nu}-\left(\frac{z'}{z}\right)^\nu\right| < \left(\left|\frac{z'}{z}\right|+\frac{a_1}{|z|\,(|z|-a_1)}\right)^\nu-\left|\frac{z'}{z}\right|^\nu, \tag{19}$$

setzt man zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z_1'\ldots z_\nu'}{z_1\ldots z_\nu}=s,\qquad \frac{z'}{z}=q,$$

so folgt aus (19), (falls (15) gilt)

$$\left|s-\frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1-|q|-\dfrac{a_1}{|z|\,(|z|-a_1)}}-\frac{1}{1-|q|}. \tag{20}$$

Nun ist

$$|1+s| = \left|\frac{1}{1-q}+s-\frac{q}{1-q}\right| \geq \frac{1}{1+|q|}-\left|s-\frac{q}{1-q}\right|,$$

und daher $|1+s|>0$, wenn nur

$$\left|s-\frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1+|q|}$$

ist; hierzu genügt aber nach (20):

$$\frac{|z|\,(|z|-a_1)}{|z|\,(|z|-a_1)(1-|q|)-a_1}-\frac{1}{1-|q|} \leq \frac{1}{1+|q|}.$$

Dies mit (10) und (15) zusammen zieht also stets die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ nach sich.

Man kann somit a_1 durch die Gleichung bestimmen

$$|z|(|z|-a_1)(1-|q|^2) = 2|z|(|z|-a_1)(1-|q|)-2a_1,$$

woraus sich

$$a_1 = \frac{(|z|-|z'|)^2}{2+|z|(1-|q|)^2} = \frac{(|z|-|z'|)^2}{2+\frac{1}{|z|}(|z|-|z'|)^2}$$

ergibt. Man bestätigt leicht, daß dann die Bedingung (15) erfüllt ist, denn diese lautet nach einer einfacheren Umformung

$$a_1 < \frac{|z|(|z|-|z'|)}{1+|z|-|z'|},$$

und es ist in der Tat

$$\frac{|z|-|z'|}{2+\frac{1}{|z|}(|z|-|z'|)^2} < \frac{|z|}{1+|z|-|z'|},$$

denn die rechte Seite ist hier $\geq \frac{|z|}{2}$.

Aus (9) wird jetzt schließlich

$$a_2 = \frac{(|z|-|z'|)^3[2-|z'|(1-|q|)]}{[2+|z|(1-|q|)^2]^2}.$$

Es ist bemerkenswert, daß wir hier einen für alle Werte von a gültigen Umgebungsradius erhalten, der auch für $a = 0$ einen brauchbaren Wert $\left(a_2 = \frac{2}{9}\right)$ liefert.

Für $|q| \leq \frac{1}{3}$ haben wir in (18) einen besseren Konvergenzbereich, und für $|q| > \frac{1}{3}$ läßt sich a_2 durch einen einfacheren, allerdings zugleich kleineren Wert ersetzen. Schreibt man nämlich a_2 in der Gestalt

$$a_2 = \frac{(|z|-|z'|)^3}{|z|} \cdot \frac{\frac{2}{|z|}-|q|(1-|q|)}{\left[\frac{2}{|z|}+(1-|q|)^2\right]^2},$$

und benutzt man die Beziehung

$$\frac{1}{|z|} = \frac{|z + z'|}{|z|} < 1 + |q|\,,$$

so ergibt sich zunächst mit bekannten Hilfsmitteln der Differentialrechnung leicht

$$\frac{\frac{2}{|z|} - |q|(1 - |q|)}{\left[\frac{2}{|z|} + (1 - |q|)^2\right]^2} \leq \frac{2 + |q| + |q|^2}{(3 + |q|^2)^2}\,,$$

und dieser Bruch ist für $1 \geq |q| \geq \frac{1}{3}$ stets $\geq \frac{1}{4}$. Somit ist für $|q| \geq \frac{1}{3}$

$$|a - a_\nu| \leq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - |q|), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

ein Konvergenzbereich; wegen (18) gilt dies auch für $|q| < \frac{1}{3}$.

Auch hier ist, wie leicht zu sehen, die Konvergenz gleichmäßig bei beliebiger Veränderlichkeit der a_ν im Konvergenzbereich. Aus der Form der Ungleichungen folgt auch unmittelbar, daß die Konvergenz eine unbedingte ist.

Somit ist der eingangs formulierte Satz in vollem Umfange bewiesen.

Berichtigung

zu meiner Arbeit: Über nichtnegative trigonometrische Polynome, diese Berichte, Jahrg. 1917.

S. 309, Formel (2), statt $s = 1, 2, \ldots$ lies: $\nu = 1, 2, \ldots$

S. 313, die Formel in Z. 10 ist mit der Nr. (9) zu versehen.

S. 320, letzte Formel, statt $\frac{2 \cdot 1}{\nu - 1}$ lies: $\frac{2 \cdot 1}{\nu + 1}$.

Zur Theorie der Planetenbahnen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

Die von Einstein entwickelte allgemeine Relativitätstheorie hat bekanntlich eine wesentliche Stütze dadurch erhalten, daß es ihm mittels derselben gelang[1]), die von Leverrier festgestellte Bewegung des Perihels der Merkurbahn theoretisch zu begründen.

Das Studium dieser Abhandlungen und insbesondere der lichtvollen Darstellung dieser Theorien durch Bäcklund[2]) hat die folgende Untersuchung veranlaßt. Man kann die Bewegung des Merkur bekanntlich so darstellen, als ob sich die Bahnellipse in ihrer Ebene mit gewisser Geschwindigkeit um die Sonne drehe. Diese Geschwindigkeit kann man als konstant ansehen; sie ist so klein, daß ihr Quadrat vernachlässigt werden darf. Stellt man sich nun umgekehrt die Aufgabe, Kräfte anzugeben, welche (unter der Annahme der klassischen Dynamik) eine solche Bewegung veranlassen würden, so ist diese Aufgabe, da nur erste Potenzen der Geschwindigkeit in Betracht kommen, notwendig unbestimmt. Soll die Geschwindigkeit konstant sein, so ergeben sich leicht Gleichungen,

---

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Bd. 47, 1915; vgl. die Darstellung bei Weyl: Raum-Zeit-Materie, Berlin 1918.

[2]) Zusammenstellung einer Theorie der klassischen Dynamik und der neuen Gravitationstheorie von Einstein, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Svenska vetenskapsakademie, Bd. 14, Nr. 11, Stockholm 1919.

deren Integration nicht auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; es sind die Gleichungen (4a). Vernachlässigt man aber ω^2, so entstehen die Gleichungen (7), die sich vollständig behandeln und durch Quadraturen erledigen lassen. Die in (10) und (11) aufgestellten Integrale müssen dann für kleine Werte von ω wieder zu den sonst bekannten Resultaten führen.

Beziehen sich die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η und x, y auf denselben Anfangspunkt und dreht sich das System ξ-η mit konstanter Geschwindigkeit ω gegen das feste System x-y, so ist[1])

$$(1) \quad x = \xi \operatorname{cosin} \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + y \operatorname{cosin} \omega t$$

und durch Differentiation nach t:

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= \xi' \cos \omega t - \eta' \sin \omega t - \omega y, \\ y' &= \xi' \sin \omega t + \eta' \sin \omega t + \omega x. \end{aligned}$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich:

$$(3) \quad \begin{aligned} x'' &= \xi'' \operatorname{cosin} \omega t - \eta'' \sin \omega t - 2\omega y' + \omega^2 x, \\ y'' &= \xi'' \sin \omega t + \eta'' \operatorname{cosin} \omega t + 2\omega x' + \omega^2 y. \end{aligned}$$

Bewegt sich der Punkt ξ, η nach dem Newtonschen Gesetze um den Anfangspunkt, so ist

$$(4) \quad \xi'' = -\frac{M\xi}{r^3}, \quad \eta'' = -\frac{M\eta}{r^3}, \quad \text{wo } r^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2.$$

---

[1]) Die Koordinaten ξ, η beziehen sich auf ein Inertialsystem, die Koordinaten x, y auf ein empirisches System, in dem Sinne, wie v. Seeliger allgemein die Drehung des letzteren Systems gegen das erstere im Raume untersucht hat, um die auf den Planeten wirkenden Störungen darzustellen: Über die sogenannte absolute Bewegung, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 36, Jahrg. 1906. Während im Texte rein mathematisch die Integration der Bewegungsgleichungen (7) untersucht wird, kommt es bei v. Seeliger auf die Frage an, ob durch die Störungen der anderen Planeten eine Drehung des einen Systems um das andere (mit Geschwindigkeit ω) verursacht sein kann bei Vernachlässigung von ω^2.

Aus (3) und (1) erhält man also:

$$(4\,a)\qquad \begin{aligned} x'' &= -\frac{Mx}{r^3} - 2\,\omega\, y' + \omega^2 x, \\ y' &= -\frac{My}{r^3} + 2\,\omega\, x' + \omega^2 y. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stellen im Systeme x-y die Komponenten derjenigen Kräfte dar, welche wirken müssen, um eine Drehung der im Systeme ξ-η stattfindenden elliptischen Bewegung gegen das feste System mit der Geschwindigkeit ω hervorzurufen. Es wird:

$$\frac{x''x}{r} + \frac{y''y}{r} = -\frac{M}{r^2} - \frac{2\,\omega}{r}(x\,y' - y\,x') + \omega^2 r.$$

Hierin ist

$$(5)\qquad x\,y' - y\,x' = r^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

wenn

$$(6)\qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

gesetzt sei; also:

$$\frac{x''x}{r} + \frac{y''y}{r} = -\frac{M}{r^2} - 2\,\omega\, r\,\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 r.$$

Senkrecht zum Radiusvektor ergibt sich die Komponente

$$y''\frac{x}{r} - x''\frac{y}{r} = 2\,\omega\,\frac{x\,x' + y\,y'}{r} = 2\,\omega\,\frac{dr}{dt}.$$

Die Größe der ergänzenden Kraft R ist also bestimmt durch

$$(6\,a)\qquad \begin{aligned} R^2 &= 4\,\omega^2\left[r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] - 4\,\omega^3 r^2 \frac{d\varphi}{dt} + \omega^4 r^2 \\ &= 4\,\omega^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

wenn man höhere Potenzen von ω vernachlässigt, und die Richtung ψ der Kraft gegen die X-Axe bestimmt durch

$$(6\,b)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{-d\log r}{d\varphi} = -\operatorname{cotg}\lambda,\ \text{also: } \psi = \lambda + \frac{\pi}{2},$$

wenn λ den Winkel der Tangente der Kurve gegen den Radiusvektor bezeichnet. Die Kraft wirkt also bei kleinen Werten von ω in Richtung der Tangente der Bahnkurve und ist der Geschwindigkeit des Planeten in dieser Bahnkurve proportional.

Um eine Drehung der Bahnellipse um die in einem Brennpunkte stehende Sonne mit konstanter Geschwindigkeit ω hervorzurufen, muß also der Newtonschen Gravitationskraft eine in Richtung auf die Sonne wirkende Kraft von der Größe $-2\omega r\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2 r$ und senkrecht dazu eine solche von der Größe $2\omega\frac{dr}{dt}$ hinzugefügt werden. Ist ω sehr klein, so kann das Glied $\omega^2 r$ vernachlässigt werden.

Unabhängig von vorstehend geschildertem Anlasse soll im folgenden die Aufgabe behandelt werden, die Bewegung eines Punktes zu bestimmen, auf den vom Anfangspunkte aus eine Kraft mit den Komponenten $-\frac{M}{r^2}-2\omega r\frac{d\varphi}{dt}$ und $2\omega\frac{dr}{dt}$ wirkt, wo ω eine Konstante bezeichnet. Größe und Richtung der ergänzenden Kraft sind dann durch die Gleichungen (6a) und (6b) bestimmt.

Wird die Masse des bewegten Punktes gleich 1 gesetzt, so lauten jetzt die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$x''=-\frac{Mx}{r^3}-2\omega y', \quad y''=-\frac{My}{r^3}+2\omega x'. \tag{7}$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird, wenn v die Geschwindigkeit und h eine Konstante bezeichnet:

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{M}{r}+h, \tag{8}$$

also ebenso wie im Falle $\omega=0$. Der Flächensatz wird:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\omega r^2+c. \tag{9}$$

wo c eine Konstante bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$(10)\qquad t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-c^2 - 2\omega c r^2 - \omega^2 r^4 + 2hr^2 + 2Mr}} + C,$$

$$(11)\qquad \varphi = \int \frac{(c + \omega r^2)\,dr}{r\sqrt{-c^2 - 2\omega c r^2 - \omega^2 r^4 + 2hr^2 + 2Mr}} + C',$$

wo C und C' Konstante bedeuten. Maximum und Minimum von r (d. h. Aphel und Perihel) werden durch die Gleichung

$$(12)\qquad 2Mr + 2hr^2 - (c + \omega r^2)^2 = 0$$

bestimmt. Bezeichnen wir die linke Seite mit $\psi(r)$ und sei

$$\psi(r) = a_0 r^4 + 4a_1 r^3 + 6a_2 r^2 + 4a_3 r + a_4,$$

so sind die Invarianten i und j dieses Ausdrucks 4. Grades (in der Clebschschen Bezeichnungsweise):

$$i = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) = 2\left[c^2\omega^2 + \tfrac{1}{3}(h - c\omega)^2\right],$$

$$j = 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3)$$
$$= 2c^2\omega^2(h - c\omega) + \tfrac{3}{2}M^2\omega^2 - \tfrac{2}{9}(h - c\omega)^3;$$

und es wird die Diskriminante:

$$i^3 - 6j^2 = -4M^2\omega^2(h - c\omega)^3 - \tfrac{8}{3}c^2\omega^2(h - c\omega)^4$$
$$- 16c^4\omega^4(h - c\omega)^2 + 8c^6\omega^6,$$

also für kleine Werte von ω sehr klein; für solche Werte sind daher zwei Wurzeln reell (wie für $\omega = 0$), die beiden andern fallen nahe zusammen und sind unendlich groß, wenn $\omega = 0$ wird. Die Gleichung $\psi(r) = 0$ hat folglich für kleine Werte von ω zwei reelle Wurzeln; nennen wir dieselben r_1 und r_2 und sei

$$r_1 < r_2,$$

so sind die Konstanten h und c durch r_1 und r_2 bestimmt. Es ist nämlich:

$$\psi(r) = \psi(r) - \psi(r_1) = 2M(r - r_1) + 2h(r^2 - r_1^2) - 2c\omega(r^2 - r_1^2)$$
$$- \omega^2(r^4 - r_1^4) = (r - r_1)\left[2M + 2(r + r_1)(h - c\omega)\right.$$
$$\left. - \omega^2(r^2 + r_1^2)(r + r_1)\right] = (r - r_1)\,\chi(r),$$

und: $\chi(r)\cdot(r_1+r_2) = \chi(r)\cdot(r_1+r_2) - (r+r_1)\,\chi(r_2)$
$$= 2M(r_2-r) - \omega^2(r+r_1)(r_2+r_1)(r^2-r_2^2)$$
$$= -(r-r_2)\,[2M+\omega^2(r_1+r_2)(r+r_1)(r+r_2)],$$

also:

(13) $\psi(r)\cdot(r_1+r_2) = -(r-r_1)(r-r_2)\,[2M+$
$$\omega^2(r_1+r_2)(r+r_1)(r+r_2)] = -(r-r_1)(r-r_2)\cdot f(r),$$

und:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{(c+\omega r^2)\sqrt{r_1+r_2}}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(r)}}.$$

Zwischen c, h, r_1, r_2 bestehen die Relationen:

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2hr_1r_2 + (c+\omega r_1 r_2)^2 &= \omega^2 r_1 r_2 (r_1^3 + r_2^2 + 3r_1r_2),\\ c^2(r_1+r_2) &= r_1r_2(2M+\omega^2(r_1+r_2)r_1r_2). \end{aligned}$$

Die Konstante c ist nach (7) positiv, wenn φ mit wachsender Zeit wächst (für kleine Werte von ω). Für $\omega = 0$ und folglich für kleine Werte von ω sind die Wurzeln r_1 und r_2 positiv.

Wir können es immer so einrichten, daß $t=0$ und $\varphi=0$ ist für $r=r_1$, dann tritt infolge von (12) zu den Relationen (14) die weitere hinzu:

$$(c+\omega r_1^2)^2 = 2Mr_1 + 2hr_1^2,$$

und die Integrale (10) und (11) werden:

$$(15)\qquad t = \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr\sqrt{r_1+r_2}}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)f(r)}},$$

$$(16)\qquad \varphi = \int_{r_1}^{r} \frac{(c+\omega r^2)\,dr\sqrt{r_1+r_2}}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)f(r)}},$$

wo $f(r)$ durch (13) definiert ist. Zur Auswertung der Integrale setzen wir

$$(17)\qquad \begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}\,[(r_1+r_2)+(r_1-r_2)\,\text{cosin}\,\theta]\\ (r-r_1)(r_2-r) &= \tfrac{1}{4}\,(r_2-r_1)^2\sin^2\theta, \end{aligned}$$ also aus (16):

$$\varphi = \int_0^{\Theta} \frac{2\,c\,d\,\Theta \cdot \sqrt{r_1 + r_2}}{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\,\text{cosin}\,\Theta]\,\sqrt{f(r)}}$$

$$+ \frac{\omega}{2} \int_0^{\Theta} \frac{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\,\text{cosin}\,\Theta]\,d\,\Theta}{\sqrt{f(r)}} \sqrt{r_1 + r_2}.$$

Die genaue Auswertung könnte leicht durch Einführung elliptischer Funktionen geschehen. Wir beschränken uns auf den Fall kleiner Werte von ω, so daß die Glieder mit ω^2 vernachlässigt werden können. Dann kann $f(r)$ zufolge (13) durch $2M$ ersetzt werden, und $c^2(r_1 + r_2)$ zufolge (14) durch $2Mr_1r_2$. Wir setzen noch

(18) $$r_1 = a(1 - \varepsilon), \quad r_2 = a(1 + \varepsilon),$$

so daß c durch $\sqrt{aM(1 - \varepsilon^2)}$ ersetzt werden kann, und finden:

$$\varphi \sim \int_0^{\Theta} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot d\,\Theta}{(1 - \varepsilon\,\text{cosin}\,\Theta)} + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}}\,\omega \int_0^{\Theta} (1 - \varepsilon\,\text{cosin}\,\Theta)\,d\,\Theta$$

$$\sim \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\varepsilon - \text{cosin}\,\Theta}{1 - \varepsilon\cos\Theta}\right) + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} \cdot \omega \cdot (\Theta - \varepsilon\sin\Theta).$$

Setzen wir $\Theta = 2\pi$, so ergibt sich das Vorrücken des Perihels nach einem vollen Umlaufe gleich

(19) $$\delta = \frac{2\,\pi\,\omega\,a^{3/2}}{\sqrt{M}};$$

und für $\Theta = \pi$ ist die Vorrückung des Aphels gleich der Hälfte dieser Zahl. Hierin bedeutet a die halbe große Axe der Bahnellipse und M das Verhältnis der Masse der Sonne zur Masse des Merkur.

Das Zeitintegral wird infolge der Substitution (17):

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{r_1 + r_2} \int_0^{\Theta} \frac{[r_1 + r_2 + (r_1 - r_2)\cos\Theta]\,d\,\Theta}{\sqrt{f(r)}}$$

und (wenn wieder Glieder mit ω^2 vernachlässigt werden):

$$t \sim \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} \int_0^{\Theta} (1 - \varepsilon \cos \Theta)\, d\Theta = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{M}} (\Theta + \varepsilon \sin \Theta),$$

wie bei der Keplerschen Gleichung, also die Umlaufszeit:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{M}}$$

und folglich das Vorrücken des Perihels nach (19):

$$\delta = \omega T. \tag{20}$$

Nach der Einsteinschen Theorie soll angenähert

$$\delta = \frac{24 \pi^3 a^2}{\lambda^2 T^2 (1 - \varepsilon^2)} \tag{21}$$

sein, wenn λ die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Der Wert (21) stimmt überein mit dem Werte, den Bäcklund für die Geschwindigkeit der Drehung der Ellipse berechnet, wenn man (wie es bei ihm geschieht), das Quadrat von ε vernachlässigt[1]).

Vernachlässigt man das Quadrat der Exzentrizität und wendet das dritte Keplersche Gesetz an, so erhält man aus (21)

$$\delta = \frac{6 \pi M}{\lambda^2 a}.$$

Für einen anderen Planeten mit der mittleren Entfernung a_1 von der Sonne wird also die entsprechende Verrückung des Perihels

$$\delta_1 = \frac{6 \pi M}{\lambda^2 a_1} = \delta \frac{a}{a_1}.$$

Für den Merkur findet Bäcklund $\delta = 41''$ in Übereinstimmung mit Einstein und mit der Erfahrung. Die Exzentrizitäten von Venus, Erde und Mars sind so gering und infolge dessen die Lage der Perihele dieser Planeten so wenig genau festzustellen, daß sich für sie eine Prüfung durch die Erfahrung nicht machen läßt.

---

[1]) S. 38 f. in der oben zitierten Abhandlung.

Für die im vorstehenden gemachte Annahme einer die Drehung bewirkenden äußeren Kraft kann durch einen Vergleich mit den anderen Planeten eine Entscheidung nicht getroffen werden, denn die Konstante ω in (20) ist nicht (wie λ^2 bei Einstein) notwendig eine universelle Konstante; sie kann vielmehr für jeden Planeten einen andern Wert haben. Man könnte sich nämlich die Tatsache, daß die eine Komponente der ergänzenden Kraft proportional der Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor gesetzt wurde, etwa dadurch zu erklären versuchen, daß Ströme von Massenteilchen oder Gasen aus dem Weltraum auf die Sonne stürzen und dabei die Bewegung des Planeten beeinflussen; die andere Komponente der Kraft würde entsprechend auf solche rechtwinklig zum Radiusvektor gerichtete Ströme deuten; beide zusammen auf schräg gegen die Sonne gerichtete Ströme. Je größer die Zahl solcher Ströme ist, die den Planeten auf seiner Bahn trifft, je stärker wird diese Einwirkung ausfallen; sie würde daher der Geschwindigkeit des Planeten proportional sein müssen.

Ohne auf derartige Gedanken Wert zu legen, könnte man andererseits das in den Formeln (7) zu Grunde gelegte Anziehungsgesetz rein formal als eine Ergänzung des Newtonschen Gesetzes ansehen, nur darauf fußend, daß es im Stande ist, die Bewegung des Perihels zu begründen, wie man auch andere Erweiterungen des Newtonschen Gesetzes zu dem Zwecke vorgeschlagen hat[1]).

Wie Bäcklund in seiner Darstellung der Einsteinschen Gravitationstheorie zeigt, führt letztere, übertragen in die Sprache der klassischen Dynamik, auch auf eine Erweiterung des Newtonschen Gesetzes; denn wenn man als Zeit die Eigenzeit des bewegten Planeten zu Grunde legt, ergeben sich die Einsteinschen Formeln, indem man im Gravitationsgesetze der im umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kraft

[1]) Vgl. darüber v. Seeliger, Das Zudiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, Sitzungsberichte der Münchener Akademie der Wissenschaften, mathem.-physikal. Klasse, Bd. 36. S. 595 ff., 1906.

ein Glied hinzufügt, das der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Gemeinsam ist der obigen Darstellung und der Behandlung durch Einstein das Auftreten elliptischer Integrale; bei letzterem aber ist φ durch ein Integral erster Gattung als Funktion von r dargestellt, r also eine eindeutige, doppelt periodische Funktion von φ. Oben aber in (11) tritt ein Integral dritter Gattung auf, dessen Umkehrung nicht so einfach geschehen kann; für reelle Variable kann man die umgekehrte Funktion nach Weierstraß[1]) durch eine trigonometrische Reihe darstellen.

Nachtrag.

Für das allgemeinere räumliche Problem, das v. Seeliger a. a. O. näherungsweise, soweit es für das Störungsproblem nötig war, behandelt hat, treten an Stelle der Gleichungen (7) die drei Gleichungen:

$$(22)\quad x'' = -\frac{Mx}{R^3} + 2wy' - 2vz', \quad y'' = -\frac{My}{R^3} + 2uz' - 2wx',$$
$$z'' = -\frac{Mz}{R^3} + 2vx' - 2uy',$$

wo R die Entfernung des bewegten Punktes vom Anfangspunkte bezeichnet. Da man u, v, w als Komponenten einer Drehung um eine gewisse Axe auffassen kann, wird man diese Axe als neue Z-Axe einführen, und dann lauten die Differentialgleichungen:

$$(23)\quad x'' = -\frac{Mx}{R^3} - 2\omega y', \quad y'' = -\frac{My}{R^3} + 2\omega x', \quad z'' = -\frac{Mz}{R^3}$$

Bezeichnet wieder U die Kräftefunktion der Newtonschen Anziehung $\left(U = \frac{M}{R}\right)$, so gilt der Satz von der lebendigen Kraft:

$$(24)\qquad \tfrac{1}{2}v^2 = U + h,$$

wie vorhin in (8); und der Flächensatz in Bezug auf die Z-Axe ergibt wieder:

$$xy' - yx' = r^2 \varphi' = \omega r^2 + C. \tag{25}$$

Multipliziert man die Gleichungen (23) bzw. mit x, y, z und addiert, so wird:

$$\begin{aligned} xx'' + yy'' + zz'' &= -\frac{M}{R} - 2\omega(y'x - x'y) \\ &= -U - 2\omega[\omega(x^2 + y^2) + C], \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 R^2}{dt^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = -U - 2\omega^2(R^2 - z^2) - 2\omega C$$

und in Folge von (24):

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 R^2}{dt^2} - U - 2h + 2\omega^2 R^2 + 2\omega C = 2\omega^2 z^2, \tag{26}$$

also:

$$\sqrt{2} \cdot \omega \cdot z = \sqrt{V}, \tag{27}$$

wenn V die linke Seite von (26) bezeichnet. Durch Differentiation folgt wegen der dritten Gleichung (23):

$$\sqrt{2} \cdot \omega \cdot z'' = \frac{1}{2}\frac{V''}{\sqrt{V}} - \frac{1}{4}\frac{V'^2}{V^{3/2}} = -\omega\sqrt{2}\frac{M}{R^3}z = -\frac{M}{R^3}\sqrt{V},$$

oder:

$$2V''V - V'^2 = -\frac{4M}{R^3}V^2. \tag{28}$$

Es ist dies eine Differentialgleichung vierter Ordnung zur Bestimmung von R; z ergibt sich dann aus (26), r findet man aus der Relation $R^2 = r^2 + z^2$, endlich φ aus (25) durch Quadratur. Durch Integration von (28) werden 4 Konstante eingeführt; dazu kommt die Konstante h aus (24) und C aus (25), ferner eine 7. Konstante durch die Quadratur zur Berechnung von φ. Zwischen diesen 7 Konstanten muß eine Relation bestehen.

Ist ω sehr klein, so daß $\omega^2 (R^2 - z^2) = \omega^2 r^2$ vernachlässigt werden kann, so wird (26):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 R^2}{d t^2} \sim \frac{M}{R} + 2h - 2\omega C$$

oder:

$$\left(\frac{d R^2}{dt}\right) \sim 8 (MR + hR^2 - \omega C R^2 + C'),$$

also:

$$t \sim \int \frac{R\,dR}{\sqrt{2C' - 2\omega C R^2 + 2h R^2 + MR}} + C''$$

in Übereinstimmung mit (10) für kleine Werte von ω; ebenso ergibt sich dann φ analog zu (11); es kann dann aber (26) nicht zur Bestimmung von z benutzt werden; dazu wird die dritte Gleichung (23) dienen können, durch welche zwei neue Konstante eingeführt würden. Für kleine Werte von ω müssen sich aus diesen Formeln wieder die Gleichungen v. Seeligers ergeben, von denen einige auch schon Anding aufgestellt hatte.

Über singuläre Punkte gleichmässiger Konvergenz.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

1. In seiner Abhandlung „Zur Funktionenlehre" [1]) hat Weierstraß neben dem allgemein üblich gewordenen Begriff der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche* denjenigen der gleichmäßigen Konvergenz *in der Nähe einer Stelle* eingeführt. Eine unendliche Reihe von der Form $\sum' f_\nu(x)$, wo x eine komplexe Veränderliche bezeichnen mag, heißt danach *in der Nähe der Stelle a gleichmäßig* konvergent, wenn ein $\varrho > 0$ existiert derart, daß sie für den Bereich:

$$|x - a| \leqq \varrho$$

gleichmäßig konvergiert; d. h. es muß für eine zwar beliebig klein zu denkende, aber *feste* Umgebung $|x - a| \leqq \varrho$ zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein m_ε vorhanden sein, so daß für alle x dieser Umgebung

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty}{}' f_\nu(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{wenn: } n > m_\varepsilon.$$

Weierstraß zeigt sodann, daß eine Reihe, die *in der Nähe* jeder einzelnen, *im Innern* oder *auf der Begrenzung* eines zusammenhängenden Bereiches (B) gelegenen *Stelle* in dem obigen Sinne *gleichmäßig* konvergiert *im ganzen Bereiche* gleichmäßig konvergiert[2]).

[1]) Berl. Monatsber. 1880, S. 719 = Werke 2, S. 202.

[2]) Unzutreffend und irreführend erscheinen mir die Bemerkungen, die Herr Osgood in seinem Enzyklopädie-Artikel über analytische Funktionen (Enzykl. der Mathem. Wissenschaften II B 1) an die Weier-

Während der Weierstraßische Beweis auf dem Umstande beruht, daß die obere Grenze R jener Umgebungsradien ϱ mit der Stelle a sich *stetig* ändert und daher in (B) ein *Minimum*

---

straßischen Definitionen der gleichmäßigen Konvergenz knüpft. Nachdem er dort (S. 20) im Text, unter ausdrücklichem Hinweis auf die in unserer Fußnote 1) angeführte Stelle, die Weierstraßische Definition der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche* erwähnt hat, fügt er in einer Fußnote (a. a. O. 32) folgendes hinzu: „Eine *andere* Definition der gleichmäßigen Konvergenz hat Weierstraß in seinen Vorlesungen gegeben, wonach $s(z, a)$ *in einem Punkte* $z = z_0$ gleichmäßig konvergieren soll, wenn a gegen a konvergiert, falls *in einer gewissen Umgebung* des Punktes z_0 die Bedingungen der im Text gegebenen Definition erfüllt sind." Hierzu ist vor allem zu bemerken: diese angeblich *„andere"* Vorlesungs-Definition ist ja genau *dieselbe*, die Weierstraß auch in jener *Abhandlung* (und zwar mit voller Absicht *neben* derjenigen der gleichmäßigen Konvergenz *in einem Bereiche*) gegeben hat, nur nennt er daselbst etwas zweckmäßiger *gleichmäßige Konvergenz in der Nähe von* z_0, was er in der *Vorlesung* als solche *im Punkte* z_0 bezeichnet haben soll. Herr Osgood, der dies sonderbarer Weise völlig übersehen zu haben scheint, sucht nun des weiteren ganz mit Unrecht einen Widerspruch zwischen jenen beiden Definitionen der gleichmäßigen Konvergenz zu konstruieren, indem er a. a. O. fortfährt: „Nach dieser letzten Definition konvergiert insbesondere eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises stets gleichmäßig; nach der ersten Definition ist dies im allgemeinen nicht der Fall." Die *erste* dieser beiden Behauptungen ist aber in dem vorliegenden Zusammenhange durchaus hinfällig. Sie wäre nämlich nur dann richtig, wenn man auf Grund der Weierstraßischen Festsetzungen die gleichmäßige Konvergenz *in einem Bereiche* und diejenige *in der Nähe jeder einzelnen Stelle* (bzw. *in jedem Punkte*) des betreffenden Bereiches von vornherein als *gleichwertig* anzusehen hätte. Daß indessen hiervon keine Rede sein kann, geht ja unzweideutig daraus hervor, daß Weierstraß es (mit Recht) für notwendig hält, die *Äquivalenz* beider Definitionen für den Fall eines *abgeschlossenen* Bereiches — und *nur* für einen solchen — ausdrücklich zu *beweisen*. Im übrigen sind ja analoge Unterscheidungen für die Weierstraßische Terminologie geradezu charakteristisch. Danach braucht z. B. eine Funktion, die *an jeder Stelle* eines Bereiches *endlich* ist, noch nicht *im Bereiche* selbst *endlich* (d. h. *beschränkt* nach neuerer Ausdrucksweise) zu sein. Und eine *für jede Stelle* eines Bereiches *stetige* Funktion ist zwar *im Bereiche (gleichmäßig) stetig*, wenn derselbe ein *abgeschlossener* ist, braucht es aber im entgegengesetzten Falle wiederum *nicht* zu sein. (Vgl. Enzykl. d. Math. Wissensch. II A 1: Nr. 6 und 9, I.)

besitzen muß[1]), welches dann auf Grund der Voraussetzung von Null verschieden ist, habe ich späterhin einen anderen

---

[1]) Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um zu völliger Klarstellung dieser auch für andere ähnliche Zwecke verwendeten Beweismethode folgendes zu bemerken. Im zunächst vorliegenden Falle geht Weierstraß von der Voraussetzung aus, daß auch für jeden der *Begrenzung* des Bereiches (B) angehörigen Punkt eine *vollständige* d. h. *kreisförmige* Umgebung gleichmäßiger Konvergenz existiert; mit anderen Worten, daß der abgeschlossene Bereich (B) im *Innern* eines anderen Bereiches liegt, dessen *Innenpunkte* ausnahmslos die fragliche Eigenschaft besitzen. In diesem Falle ist jene obere Grenze R der Umgebungsradien eine *eindeutig definierte* Funktion der Punkte a (die sich dann mit a stetig ändert). Anders liegt aber die Sache, wenn für die Punkte der *Begrenzung* als *Umgebung*, innerhalb deren die gleichmäßige Konvergenz bzw. irgend eine andere Voraussetzung besteht, nur derjenige *Teil* einer Kreisfläche in Betracht kommt, *welcher zum Bereiche* (B) *gehört*, wie dies z. B. bei dem bekannten Lürothschen Beweise für die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion zweier reeller Variablen der Fall ist (Math. Ann. 6 [1873], S. 318). Daselbst findet sich sogar eine Bemerkung, deren Form zunächst geeignet erscheint, an der Haltbarkeit der ganzen Schlußweise gewisse Zweifel aufkommen zu lassen. Nachdem nämlich die Stetigkeit von $f(x, y)$ in der Weise definiert ist, daß im Innern eines um den Punkt (x, y) mit einem gewissen Radius $\varrho(x, y)$ beschriebenen *Kreises* die Schwankung der Funktion einen gewissen Kleinheitsgrad ε nicht übersteigt, heißt es weiter: „Auch für Punkte *in der Nähe* oder auf der Grenze des Bereiches, für welchen die Funktion definiert ist, läßt sich die Definition anwenden, wenn man nur diejenigen Teile eines Kreises betrachtet, welche in den Bereich fallen.“ Damit ist aber ein Dualismus geschaffen, der zu folgender Schwierigkeit führt. Hält man sich zunächst an die für „*nicht in der Nähe*“ der Grenze liegende Punkte (x, y) gültige Definition und bezeichnet die obere Grenze der Radien $\varrho(x, y)$ mit $R(x, y)$, so würde als *Minimum* der $R(x, y)$ für den gesamten Bereich die *Null* erscheinen. Um diesem Übelstande zu entgehen, muß man also „*in der Nähe*“ der Grenze zu jener *zweiten*, erweiterten Definition übergehen. Aber wo *beginnt* nun eigentlich die fragliche „*Nähe*“ der Grenze? Mit anderen Worten, bei dieser Fassung der erforderlichen Definitionen ist $R(x, y)$ überhaupt gar nicht als *eindeutige* Funktion von (x, y) definiert. Um dies zu erzielen, hat man *ohne Unterschied* $R(x, y)$ zu definieren als obere Grenze für die Radien $\varrho(x, y)$ solcher um (x, y) beschriebenen Kreise, deren *zum Bereich gehörige Innenpunkte* Funktions-Schwankungen vom Kleinheitsgrade ε liefern. (Dabei können diese Kreise also nach Bedarf auch über den Bereich hinausragen.)

Beweis gegeben[1]), der, auf dem Schlußverfahren des sogenannten Heine-Borelschen Satzes beruhend, insofern über die Weierstraßische Voraussetzung hinausgeht, als dabei nicht die Existenz eines (zwar von a abhängigen, aber) für jedes einzelne a *festen*, d. h. *von* ε *unabhängigen* ϱ gefordert, vielmehr nur angenommen wird, daß für jede Stelle a zu jedem einzelnen ε ein gewisses $\varrho > 0$ vorhanden ist, wobei es also keineswegs ausgeschlossen ist, daß gleichzeitig mit ε auch ϱ *unbegrenzt* abnehmen könnte. Es erscheint zweckmäßig, den durch diese herabgeminderte Bedingung charakterisierten, also *weiteren* Konvergenztypus nach dem Vorgange des Herrn W. H. Young[2]) als *gleichmäßige Konvergenz im Punkte* a[3]), also allgemein als *punktweise gleichmäßige* Konvergenz zu bezeichnen. Herr Fr. Rieß[4]) bedient sich in dem nämlichen Sinne der Bezeichnung *gleichmäßige Konvergenz an der Stelle* a bzw. *stellenweise gleichmäßige* Konvergenz (welche letztere Bezeichnung mir aber etwas weniger ausdrucksvoll erscheint, da durch den landläufigen Sprachgebrauch das Wort „stellenweise“ allzusehr an Prägnanz verloren hat).

2. Setzt man:

$$\sum_0^n{}^{\nu} f_\nu(x) = F_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

läßt man also an die Stelle der Summe der konvergenten Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} f_\nu(x)$ den Grenzwert der Funktionenfolge $F_0(x)$, $F_1(x), \ldots, F_\nu(x), \ldots$, etwa:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

treten, so heißt jetzt die Funktionenfolge der $F_\nu(x)$ $(\nu = 0,$

[1]) Math. Ann. 44 (1894), S. 80.

[2]) Proc. London Math. Soc. (2), [1903], 1, S. 90.

[3]) Die Bezeichnung „*im Punkte*“ erscheint also hier in wesentlich prägnanterer Bedeutung, als bei der in Fußnote 2) erwähnten gelegentlichen Anwendung.

[4]) Jahresb. der D. M. V. 22 [1908], S. 199.

1, 2, . . .) *im Punkte* x' *gleichmäßig* konvergent, wenn zu jedem einzelnen $\varepsilon > 0$ die Bedingung:

$$(B) \qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

durch Wahl von $\nu \geqq n_\varepsilon$ für alle Stellen einer gewissen Umgebung von x', etwa:

$$|x - x'| < \varrho_\varepsilon(x')$$

befriedigt werden kann. Besitzt dann $\varrho_\varepsilon(x')$ bei unbegrenzt abnehmendem ε ein gewisses von Null verschiedenes *Minimum*, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ zugleich *in der Nähe von* x' *gleichmäßig* konvergent. Hat hingegen $\varrho_\varepsilon(x')$ für $\varepsilon \to 0$ die untere Grenze *Null*, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ wirklich *nur im Punkte* x' (nicht *in der Nähe* von x') *gleichmäßig* konvergent. Ich will dann x' als *singulären Punkt gleichmäßiger Konvergenz* bezeichnen. Die Umgebung einer solchen Stelle x' kann also nicht *ausschließlich* aus Stellen selbst nur *punktweise* gleichmäßiger Konvergenz bestehen, denn diese würden ja nach dem in Nr. 1 erwähnten Satze einen die Stelle x' umgebenden *Bereich* gleichmäßiger Konvergenz konstituieren. Somit müssen *in beliebiger Nähe* eines (dem Konvergenzbereiche der Funktionenfolge angehörigen) *singulären Punktes gleichmäßiger* Konvergenz Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz liegen. Dabei kann sogar der Fall eintreten, daß die Umgebung von x' *ausschließlich* aus Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz besteht, so daß also x' geradezu als *isolierter Punkt gleichmäßiger* Konvergenz erscheint. Diese Verbindung der Eigenschaften „*isoliert*" und „*gleichmäßig* konvergent" klingt zunächst paradox, findet aber ihr vollkommenes Analogon in der Tatsache, daß auch *Stetigkeits*punkte völlig *isoliert* auftreten können[1]). Da, soviel mir bekannt, arithmetische Ausdrücke mit solchen *singulären Punkten gleichmäßiger Konvergenz* bisher nicht bemerkt worden sind, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, wenn ich

[1]) S. die französische Ausgabe der Enzyklopädie: II, 1 (Principes fondamentaux de la théorie des Fonctions), Fußnote 110. Vgl. auch den Schluß von Nr. 4 dieser Mitteilung.

im folgenden einige Beispiele dieser Art mitteile und schließlich den Nachweis hinzufüge, daß bei Folgen *analytischer* Funktionen das Auftreten singulärer Stellen gleichmäßiger Konvergenz *im Innern* ihres Konvergenzbereiches ausgeschlossen ist.

3. Es werde gesetzt:

$$\varphi(x) = \cos^2 \frac{\pi}{|x| + E\left(\frac{1}{1+|x|}\right)}, \tag{1}$$

also:

$$\varphi(0) = \cos^2 \pi = 1, \quad \varphi(x) = \cos^2 \frac{\pi}{|x|} \text{ für } x \neq 0. \tag{2}$$

Definiert man sodann die Funktionenfolge $F_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) durch die Beziehung:

$$F_\nu(x) = |x| \cdot \varphi(x)^\nu, \tag{3}$$

so hat man:

$$0 \leq F_\nu(x) \begin{cases} = |x| \text{ für } |x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{ und } x = 0, \\ < |x| \text{ für jedes andere endliche } x. \end{cases} \tag{4}$$

Die $F_\nu(x)$ sind also insgesamt in jedem endlichen Bereich *beschränkt* und überdies *stetig*, auch an der Stelle $x = 0$, in deren Umgebung jedes $F_\nu(x)$ unendlich oft den Maximalwert $|x|$ annimmt.

Des weiteren ergibt sich:

$$F(x) \equiv \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) \begin{cases} = |x| \text{ für } |x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{ und } x = 0, \\ = 0 \text{ für jedes andere endliche } x. \end{cases} \tag{5}$$

Die Grenzfunktion $F(x)$ ist also *unstetig* für $|x| = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, im übrigen, insbesondere auch für $x = 0$ stetig (und zwar $= 0$).

Der für die Gleichmäßigkeit bzw. Ungleichmäßigkeit der Konvergenz maßgebende Wert von $|F(x) - F_\nu(x)|$ unterscheidet sich von $|F_\nu(x)|$ nur dadurch, daß er an den Stellen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ eine *hebbare* Unstetigkeit aufweist, indem daselbst statt des Wertes $|x|$ für jedes ν der Wert 0 resultiert, dagegen, wie groß man auch ν annehmen mag, in hinlänglicher Nähe jener Stellen $|F(x) - F_\nu(x)|$ dem Werte $|x|$ beliebig nahe kommt.

Die Stellen $\frac{1}{\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) sind also Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz, während die Folge der $F_\nu(x)$ in der Nähe jeder einer Bedingung von der Form $\frac{1}{\mu+1} < |x| < \frac{1}{\mu}$ genügenden Stelle *gleichmäßig* konvergiert. Die 0 erscheint also als Häufungsstelle *beider Kategorien.* Da aber für jedes ν:

$$F(0) - F_\nu(0) = 0$$

und andererseits:

$$|F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \text{wenn: } |x| < \varepsilon,$$

so ist $x = 0$ eine *singuläre Stelle gleichmäßiger Konvergenz.*

4. Setzt man:

$$\varphi(x, a) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n(|x| - a)^2}, \tag{6}$$

so hat man für jedes reelle a:

$$\varphi(x, a) \begin{cases} = 1, & \text{wenn: } |x| = a, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x. \end{cases} \tag{7}$$

Nun bedeute $a_1, a_2, \ldots a_\varkappa, \ldots$ irgend eine Folge *positiver* Zahlen und es werde die Funktionenfolge $F_\nu(x)$ definiert durch die Beziehung:

$$F_\nu(x) = x \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \, \varphi(x, a_\varkappa), \tag{8}$$

so ergibt sich:

$$F_\nu(x) \begin{cases} = x & \text{für } |x| = a_1, a_2, \ldots a_\nu, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x, \end{cases} \tag{9}$$

und sodann:

$$F(x) \equiv \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) \begin{cases} = x & \text{für } |x| = a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots, \\ = 0 & \text{für jedes andere } x. \end{cases} \tag{10}$$

Da hiernach, wie groß man auch ν annehmen mag:

$$|F(x) - F_\nu(x)| = |x| \quad \text{für } |x| = a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, a_{\nu+3}, \ldots, \tag{11}$$

so ist jede *von $x = 0$ verschiedene Häufungsstelle* der $a_\varkappa$ eine Stelle *ungleichmäßiger* Konvergenz für die Folge der $F_\nu(x)$.

Haben die $a_\varkappa$ nur die *einzige* Häufungsstelle 0, ist also $\lim_{\varkappa \to \infty} a_\varkappa = 0$, so ist die Folge der $F_\nu(x)$ durchweg *gleichmäßig* konvergent. Denn wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben und darauf n so fixiert, daß $a_\varkappa < \varepsilon$ für $\varkappa \geq n$, so hat man nach (11):

$$|F(x) - F_\nu(x)| \leq a_n < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x| \leq a_n, \tag{12a}$$

während für $|x| > a_n$ geradezu

$$|F(x) - F_\nu(x)| = 0 \tag{12b}$$

wird (übrigens ein ganz lehrreiches Beispiel dafür, daß die aus Ungl. (12a) zunächst nur zu entnehmende *punktweise gleichmäßige* Konvergenz an der Stelle $x = 0$ in Verbindung mit dem Umstande, daß in der Nähe von $x = 0$ *keine* Stellen ungleichmäßiger Konvergenz liegen, die *vollkommen gleichmäßige* Konvergenz in der Nähe von $x = 0$ nach sich zieht, wie es ja nach dem in Nr. 1 erwähnten Satze tatsächlich der Fall sein muß).

Wählt man dagegen für die $a_\varkappa$ irgend eine abzählbare Menge positiver Zahlen, die in irgend einem bei $x = 0$ beginnenden Intervall *überall dicht* liegen, so finden sich in der Nähe von $x = 0$ nur Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz, während die Stelle $x = 0$ auf Grund der Beziehung (12a) als *singuläre*, nämlich *isolierte* Stelle *gleichmäßiger* Konvergenz erscheint. Versteht man z. B. unter den $a_\varkappa$ die Menge der *positiven rationalen* Zahlen (in welchem Falle $F(x)$ bei Beschränkung auf reelle x offenbar die mit x multiplizierte, total unstetige Dirichletsche Funktion vorstellt), so besitzt die Folge der $F_\nu(x)$ überhaupt keine andere Stelle *gleichmäßiger* Konvergenz, als jene *singuläre* und zwar *isolierte* Stelle $x = 0$, welche übrigens auch den *einzigen Stetigkeitspunkt* der Grenzfunktion $F(x)$ bildet.

5. Eine besonders anschauliche Modifikation des zuletzt angeführten Beispiels gewinnt man in folgender Weise. Unter Beibehaltung der in Gl. (6) angegebenen Bedeutung der Funktion $\varphi(x, a)$ werde gesetzt:

$$F_\nu(x) = x \cdot \sum_{1}^{2^\nu - 1} {}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{\varkappa}{2^\nu}\right). \tag{13a}$$

Mit Rücksicht auf den zu vollziehenden Grenzübergang $\nu \longrightarrow \infty$ läßt sich dieser Ausdruck zunächst folgendermaßen ordnen:

$$(13\,b) \qquad F_\nu(x) = x \cdot \sum_1^\nu{}_\lambda \sum_1^{2^{\lambda-1}}{}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa - 1}{2^\lambda}\right),$$

so daß also:

$$(14) \qquad F_\nu(x) \begin{cases} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} \\ = 0 \text{ für } x \neq \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} \end{cases} \begin{matrix} \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1}, \\ \lambda = 1, 2, \ldots \nu. \end{matrix}$$

Die Werte x, für welche $F_\nu(x) = x$ und somit (abgesehen von $x = 0$) *unstetig* wird, sind hiernach die sämtlichen dyadischen Brüche mit 1, 2, ... ν Stellen, in dyadischer Schreibweise:

0,1
0,01 0,11
0,001 0,011 0,101 0,111
. . . .
$\underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{\nu \text{ Stellen}}$ 0,00 ... 11 ... 0,11 ... 1

Die mit wachsendem ν zunehmende Verdichtung dieser Unstetigkeitspunkte geschieht also durch fortgesetzte Halbierung der vorhandenen Stetigkeits-Intervalle in der Weise, daß beim Übergange von $F_\nu(x)$ zu $F_{\nu+1}(x)$ zu den in obigem Schema enthaltenen die dyadischen Brüche mit $\nu + 1$ Stellen hinzutreten.

Als Grenzfunktion für $\nu \longrightarrow \infty$ erscheint also, analog wie am Schlusse der vorigen Nummer, eine bis auf den einzigen Stetigkeitspunkt $x = 0$ *total unstetige Funktion*:

$$(15) \quad F(x) = x \cdot \sum_1^\infty{}_\lambda \sum_1^{2^{\lambda-1}}{}_\varkappa\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa-1}{2^\lambda}\right) \begin{cases} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa-1}{2^\lambda} \\ = 0 \text{ für } x \neq \dfrac{2\varkappa-1}{2^\lambda} \end{cases} \begin{matrix} \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1}, \\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

Des weiteren ergibt sich:

$$(16)\quad \begin{aligned} F(x) - F_\nu(x) &= x \cdot \sum_{\nu+1}^{\infty} {}^{\lambda} \sum_{1}^{2^{\lambda-1}} {}^{\varkappa}\, \varphi\left(x, \frac{2\varkappa - 1}{2^\lambda}\right) \\ &\left| \begin{array}{l} = x \text{ für } x = \dfrac{2\varkappa - 1}{2^\lambda} \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots 2^{\lambda-1} \\ \lambda = \nu + 1, \nu + 2, \ldots \end{pmatrix}, \\ = 0 \text{ für jedes andere } x. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Wie *groß* man auch ν annehmen möge, so liegen die Punkte x, für welche

$$(17)\qquad F(x) - F_\nu(x) = x$$

wird, im Bereiche $0 < |x| \leq 1$, insbesondere in der Umgebung von $x = 0$, *überall dicht*, und man hat daher in keinem zusammenhängenden Teilbereiche:

$$(18)\qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon$$

außer in der Umgebung von $x = 0$, sofern $|x| < \varepsilon$ ist. Es findet somit an der Stelle $x = 0$ *punktweise gleichmäßige*, sonst durchweg *ungleichmäßige* Konvergenz statt.

6. Es sei jetzt $F_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine zum mindesten *im Innern* eines Bereiches (B) *konvergierende* Folge eindeutiger *analytischer* Funktionen regulären Verhaltens und es werde wieder gesetzt:

$$(19)\qquad \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x).$$

Dann soll gezeigt werden, daß es im Innern von (B) *keinen singulären Punkt gleichmäßiger Konvergenz* geben kann.

Angenommen, x' sei ein im Innern von (B) gelegener Punkt, von dem also zum mindesten feststehen würde, daß bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$:

$$(20)\qquad |F(x) - F_\nu(x)| < \varepsilon \text{ für } \nu > n \text{ und: } |x - x'| < \varrho_\varepsilon.$$

Wir zeigen zunächst, daß dann $F(x)$ für eine gewisse Umgebung von x' *beschränkt* ist. Man hat identisch:

$$F(x) - F(x') = (F_n(x) - F_n(x')) + (F(x) - F_n(x)) - (F(x') - F_n(x'))$$

und daher:

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x')| &\leq |F_n(x)-F_n(x')| + |F(x)-F_n(x)| \\ (21) \qquad &+ |F(x')-F_n(x')| < |F_n(x)-F_n(x')| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $F_n(x)$ regulär, also *stetig* an der Stelle x', so läßt sich ein $\varrho \leq \varrho_\varepsilon$ so fixieren, daß:

$$(22) \qquad |F_n(x)-F_n(x')| < \varepsilon \text{ für } |x-x'| < \varrho \leq \varrho_\varepsilon,$$

und es geht somit Ungleichung (21) in die folgende über:

$$(23) \qquad |F(x)-F(x')| < 3\varepsilon \text{ für } |x-x'| \leq \varrho,$$

welche zeigt, daß $F(x)$ für $|x-x'| \leq \varrho \leq \varrho_\varepsilon$ *beschränkt* ist. Das gleiche gilt dann, wie aus Ungl. (20) hervorgeht, für die *Gesamtheit* der $F_\nu(x)$ zunächst, falls $\nu \geq n$, schließlich aber, mit Hinzunahme der (als regulär) gleichfalls *beschränkten* Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_{n-1}(x)$, für die *Gesamtheit aller* $F_\nu(x)$. Daraus folgt aber mit Benützung eines bekannten von Herrn Vitali herrührenden Satzes[1]), daß nach Annahme von $\varrho' < \varrho$ die Folge der $F_\nu(x)$ *im Bereiche* $|x-x'| \leq \varrho'$ *gleichmäßig* konvergiert. Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen, der man im übrigen mit Benützung der in Nr. 1 erklärten Terminologie auch die folgende Fassung geben kann: Liegt x' im Innern des Konvergenzbereiches der regulären Funktionenfolge $(F_\nu(x))$ und steht nur soviel fest, daß die $F_\nu(x)$ *im Punkte* x' *gleichmäßig* konvergieren, so konvergieren sie auch *in der Nähe* von x' *gleichmäßig*.

Es kann hiernach, ebensowenig wie einzelne *singuläre Punkte gleichmäßiger* Konvergenz, auch keine *singulären Linien* dieser Art geben, weder solche, die ganz *in das Innere* des Konvergenzbereiches fallen, noch solche, die sich bis an die *Begrenzung* erstrecken. In dieser Hinsicht liegen also hier die Verhältnisse etwas anders, wie bezüglich des etwaigen Auftretens von Stellen *ungleichmäßiger* Konvergenz in analogem Zusammenhange. Allerdings ist auch, wie zuerst von Herrn

---

[1]) Annali di Mat. (3), 10 (1904), p. 65. Vgl. den sehr schönen und einfachen Beweis des fraglichen Satzes von E. Lindelöf: Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), p. 171.

Runge[1]) bewiesen wurde, das Vorkommen von einzelnen *Punkten* oder *Linien ungleichmäßiger* Konvergenz *im Innern* des Konvergenzbereiches einer im übrigen gleichmäßig konvergierenden, regulären Funktionenfolge ausgeschlossen, dagegen können derartige *Linien* vorhanden sein, die sich bis an die *Begrenzung* erstrecken, und zwar ohne den Charakter der *Grenzfunktion* als einer analytischen Funktion regulären Verhaltens zu beeinträchtigen[2]).

---

[1]) Acta Math. 6 (1885), S. 247. Der Rungesche Beweis beruht auf der Darstellung von $F_{\nu+p}(x) - F_{\nu}(x)$ durch ein über eine geschlossene Linie gleichmäßiger Konvergenz erstrecktes Randintegral. Noch etwas einfacher gelangt man zu dem gleichen Ziele durch Anwendung des Satzes, daß das *Maximum* von $|F_{\nu+p}(x) - F_{\nu}(x)|$ für den von einer solchen geschlossenen Linie begrenzten Bereich auf dieser Begrenzung liegen muß.

[2]) Ebendas. S. 248.

Angenäherte Geradstreckung der Kreisbögen.

Von **Ludwig Burmester.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Dezember 1919.

Die Konstruktion einer Strecke, die der Länge eines Kreisbogens angenähert gleich ist, nennen wir eine *angenäherte Geradstreckung* anstatt Rektifikation. Die angenäherte Geradstreckung für Kreisbögen bis 90°, welche wir betrachten wollen, wird sich aus den nachherigen Darlegungen ergeben und lautet:

Ist in Fig. 1 ein Kreisbogen as mit dem Mittelpunkt m gegeben und zu dem Halbkreis k bis zum Punkt b ergänzt, so halbiere man den Radius mb im Punkt $\mathfrak{m}$, beschreibe um ihn mit dem Radius $\mathfrak{m}a$ den Kreisbogen $\mathfrak{k}$ und ziehe seinen durch den Punkt s gehenden Radius $\mathfrak{m}\mathfrak{s}$; dann ist die Sehne $a\mathfrak{s}$ angenähert gleich dem Kreisbogen as.

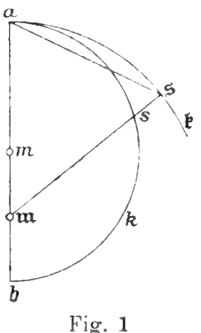


Fig. 1

Die uralte Annahme[1]), daß die Länge eines Kreises gleich der dreifachen Länge seines Durchmessers, also $\pi = 3$ sei, hat

[1]) Diese Annahme ist ausführlich erörtert in J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. II, S. 108 (1903), wo auch hingewiesen wird auf die Beschreibung des Tempels Salomons in der Bibel I. Könige, Kap. 7, v. 23—26. „Und er machte ein Meer, gegossen, von einem Rand zum anderen zehn Ellen weit, rund umher, und fünf Ellen hoch, und eine Schnur, dreißig Ellen lang, war das Maß ringsum. Es stund auf

in einer eigenartigen Weise Anlaß zu dieser vornehmlichen Geradstreckung gegeben. Denn es liegt der Gedanke nahe, daß aus dieser groben Annäherung, die wir als einen Grenzfall auffassen, durch Verallgemeinerung eine feinere Annäherung für Kreisbögen von mäßiger Länge hervorgehen könnte.

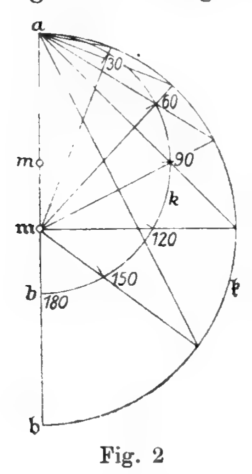


Fig. 2

Zu diesem Zweck verlängen wir in Fig. 2 den Durchmesser $a\,b$ des Halbkreises k um dessen Radius r bis zum Punkt $\mathfrak{b}$ und beschreiben über $a\,\mathfrak{b}$ als Durchmesser den Halbkreis $\mathfrak{k}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist. Nach jener Annahme ist dann $a\,\mathfrak{b} = 3\,r$ grob angenähert gleich der Länge des Halbkreises k. Wir nehmen nun an, der Punkt b werde auf dem Halbkreis k beispielsweise in die Lagen 150, 120, 90, 60, 30 Grade bewegt, die den vom Punkt a aus gemessenen Kreisbögen entsprechen. Dadurch werden die Lagen des mit dem Punkt b bewegten Radius $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ des Halbkreises $\mathfrak{k}$ und in ihm die von dem Punkt a ausgehenden Sehnen bestimmt.

Nun mußte vermittelst einer sehr genau ausgeführten Zeichnung, in der für den Halbkreis k der Radius $r = 100$ mm ist, geprüft werden, ob und wie weit sich diese Verallgemeinerung als zweckmäßig erweise. In der sechsmal kleineren Fig. 3 wollen wir die Ausführung dieser Zeichnung beschreiben. Zuvörderst bestimmen wir nach der sehr angenäherten Konstruktion von Kochanski[1]) die Länge des Halbkreises k, dessen

---

zwölf Rinder. Seine Dicke aber war eine Hand breit, und sein Rand war wie eines Bechers Rand, wie eine aufgegangene Lilie." Hiernach war es eine mit Wasser gefüllte, große, eherne Schale. Ferner auch II. Chronika, Kap. 4, v. 2. „Und ein Maß von dreißig Ellen machte es umher begreifen."

[1]) Die hier ausgeführte, bekannte Konstruktion folgt etwas vereinfacht aus der in Acta Eruditorium 1685, p. 397 von Adam Kochanski mitgeteilten Konstruktion.

Radius r ist. Indem wir im Punkt b an den Halbkreis k die Tangente legen und vermittels des Winkeldreieckes die unter 30^0 gegen den Durchmesser $b a$ geneigte Gerade $m h$ ziehen, welche die Tangente im Punkt H schneidet, und auf ihr die dem Radius gleichen Strecken $H\text{I}$, $\text{I}\,\text{II}$, $\text{II}\,J$ abtragen, also $HJ = 3r$ machen, ergibt sich die Strecke Ja sehr angenähert gleich der Länge $r.\pi$ des Halbkreises.

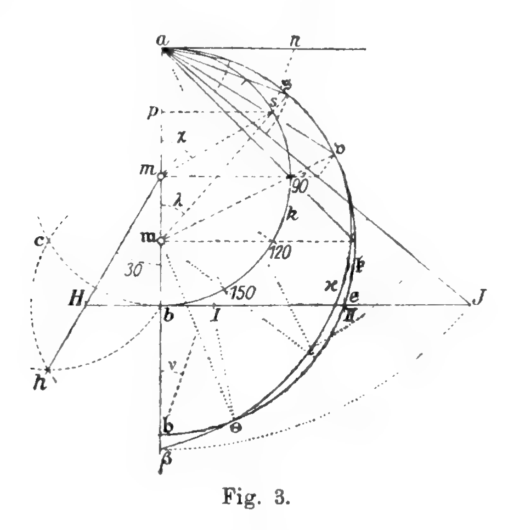


Fig. 3.

Die Gerade $m h$ wird auch bestimmt durch die um die Punkte b, c mit dem Radius r beschriebenen beiden Kreisbögen, die sich in dem Punkt h schneiden; und demnach ist die Kochanskische Konstruktion dadurch ausgezeichnet, daß sie zu ihrer Ausführung nur eine einzige Zirkeiöffnung gleich dem Radius des Kreises erfordert.

Durch Rechnung ergibt sich die Strecke

$$Ja = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \tan 30^0)^2} = r\sqrt{4 + (3 - \tan 30^0)^2}$$
$$= r.3{,}14153;$$

und die Zahl 3,14153 stimmt in vier Dezimalen mit der Zahl $\pi = 3{,}14159$ überein.

Ferner sei noch erwähnt, wenn e den Schnittpunkt des Halbkreises $\mathfrak{k}$ mit der Tangente HJ bezeichnet, daß die Strecke be $= \sqrt{\left(\frac{3}{2}r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = r\sqrt{2}$, und die Strecke $He = r \tan 30^0$ $+ r\sqrt{2} = r\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right) = r.1{,}9915$ ist. Mithin ist die Strecke He angenähert gleich der Strecke $Hu = 2r$, folglich lich fallen die Punkte e, u zeichnerisch zusammen, und es ist $\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}$ angenähert gleich 2.

Teilen wir nun die Strecke Ja beispielsweise in sechs gleiche Teile, so sind die Strecken von dem Punkt a bis an die Teilpunkte sehr angenähert gleich den entsprechenden um je 30⁰ zunehmenden Kreisbögen. Diese Strecken übertragen wir durch um a beschriebene Kreisbögen auf die entsprechenden Sehnen des Halbkreises $\mathfrak{k}$. Dadurch wird eine Kurve $\varkappa$ bestimmt, die wir die Abweichkurve von dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ nennen. Die Zeichnung mit dem Maß $r = 100$ mm ergibt, daß die Abweichkurve für die Kreisbögen bis 90⁰ mit dem Bogen $a\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{v}$ auf dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ zeichnerisch zusammenfällt, wobei die Sehne $a\,\mathfrak{v}$ dem Viertelkreis auf k entspricht. Bei der theoretischen Fortsetzung der Abweichkurve $\varkappa$ erreicht die innere Abweichung von $\mathfrak{k}$ ungefähr für 150⁰ ein auf der Sehne gemessenes Maximum von 6 mm, verkleinert sich bis zu dem Schnittpunkt θ, den die Abweichkurve $\varkappa$ mit dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ bildet, und die äußere, negative Abweichung von ihm ist für 180⁰ zeichnerisch, $\mathfrak{b}\beta = -14$ mm. Dem Schnittpunkt θ entspricht sehr nahe ein Bogen von 168⁰, dessen Länge also wieder sehr angenähert gleich der Sehne $a\theta$ ist.

Hiernach hat die Zeichnung ergeben, daß die Geradstreckung in einer Reichweite für Kreisbögen bis 90⁰ und Radien bis 100 mm sich praktisch bewährt. Durch diese Darlegungen ist nun der Gedankengang gekennzeichnet, der zu dieser vornehmlichen Geradstreckung geführt hat.

Um die Annäherung der durch die Geradstreckung be-

stimmten Längen der Sehnen in dem Halbkreis $\mathfrak{k}$ an die Längen der um je 10° zunehmenden Kreisbögen des Halbkreises k zu berechnen, nehmen wir dessen Radius in Fig. 3 als Einheit an, setzen den Winkel $a\,m\,s = \chi$, der dem Kreisbogen $\widehat{as}$ entspricht, ferner den Winkel $a\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{s} = \lambda$ und fällen auf ab die Senkrechte $s\,p$.

Danach ist $s\,p = \sin\chi$ und $\mathfrak{m}\,p = \cos\chi + \frac{1}{2} = \cos\chi + \cos 60^0$, folglich

$$\tan\lambda = \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \cos 60^0} = \frac{\sin\chi}{2\cos\frac{\chi + 60^0}{2}\cos\frac{\chi - 60^0}{2}}.$$

Wegen $\mathfrak{m}\,\mathfrak{s} = \frac{3}{2}$ ist die Sehne

$$a\,\mathfrak{s} = 3\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Vermittelst dieser beiden Gleichungen wird die konstruktiv bestimmte Sehne $a\,\mathfrak{s}$ für die um je 10° zunehmenden Winkel χ berechnet; sodann werden die berechneten Längen der zugehörigen Kreisbögen aus der Tabelle in Ludwig Schröns „Siebenstelligen Logarithmen 1877“ entnommen. Hiernach ergeben sich in der Rechnungsfolge für die Werte des Winkels χ die entsprechenden Annäherungswerte der Sehnen $\overline{a\,\mathfrak{s}}$, ferner die Längen der Kreisbögen $a\,s$, die Abweichungen oder die Fehler $f = \overline{a\,\mathfrak{s}} - \widehat{a\,s}$, und auch die relativen Fehler $v = \frac{\overline{a\,\mathfrak{s}} - \widehat{a\,s}}{\widehat{a\,s}}$.

Diese Werte sind der theoretischen Vollständigkeit halber bis für $\chi = 180^0$ in der Tabelle I zusammengestellt, deren Spalten mit den Werten f und v bei den Annäherungen in Betracht kommen. Dabei sind die Annäherungswerte der Sehnen $\overline{a\,\mathfrak{s}}$ des Halbkreises $\mathfrak{k}$ bis zum Punkt θ um die Fehler f länger als die Kreisbögen. Die Fehlerstrecken sind proportional den Radien dieser Kreisbögen, also gleich $r.f$; und bei dem Radius $r = 100$ mm, wie in jener Zeichnung angenommen wurde, ist z. B. für 90° die berechnete Fehlerstrecke $r.f = 100 \cdot 0{,}00639 = 0{,}639$ mm, für 70° gleich 0,177 mm, also ungefähr $^1/_5$ Milli-

meter. Bei genauester Ausführung einer solchen Zeichnung kann ein Konstruktionsfehler von ungefähr einem halben Millimeter entstehen, der zeichnerisch kaum bemerkbar ist.

Umgekehrt wird in Fig. 1 zu einer gegebenen, als Sehne $a\mathfrak{s}$ in den Halbkreis $\mathfrak{k}$ gelegten Strecke der ihr angenähert gleiche Kreisbogen as auf dem Halbkreis k konstruiert; dabei darf diese Strecke nicht länger als dessen Viertelkreis sein. Wenn ein Kreisbogen gegeben ist, zu dem ein angenähert gleicher Kreisbogen auf einem gegebenen Kreis bestimmt werden soll, so wird jener Kreisbogen erst geradgestreckt und dann zu der erhaltenen Strecke der zugehörige Kreisbogen wie vorhin konstruiert.

Um noch diese Geradstreckung mit der bekannten Geradstreckung zu vergleichen, die in Fig. 3 ausgeführt lautet:

„Man mache $b\mathfrak{b} = bm$, ziehe an den Halbkreis k im Punkt a die Tangente, ferner die Gerade $\mathfrak{b}s$, welche sie in einem Punkt n schneidet; dann ist die Strecke an angenähert gleich dem Kreisbogen as“.

Bezeichnet ν den Winkel $a\mathfrak{b}n$, so ist, wenn wir den Radius r als Einheit annehmen:

$$\tan \nu = \frac{\sin \chi}{2 + \cos \chi} \quad \text{und} \quad an = \frac{3 \sin \chi}{2 + \cos \chi}.$$

Hiernach ergeben sich für die um je 10^0 bis 90^0 zunehmenden Werte des Winkels χ die berechneten Annäherungswerte $\overline{an}$, die kleiner als die Kreisbögen sind. In der Tabelle II sind die Werte der Fehler $f = \widehat{as} - \overline{an}$ und der relativen Fehler $v = \dfrac{\widehat{as} - an}{\widehat{as}}$ zusammengestellt.

Da die Fehler f und v in der ersten Tabelle bedeutend kleiner sind als in der zweiten, so folgt, daß jene vornehmliche Geradstreckung in Annäherung und Reichweite diese andere Geradstreckung sehr übertrifft.

Tabelle I.

χ	f	v	$\overline{a\mathfrak{s}}$	$\widehat{as}$
10^0	0,00000	0,00000	0,17453	0,17453
20^0	0,00001	0,00001	0,34907	0,34906
30^0	0,00002	0,00005	0,52362	0,52360
40^0	0,00011	0,00015	0,69824	0,69813
50^0	0,00032	0,00037	0,87299	0,87267
60o	0,00081	0,00077	1,04801	1,04720
70^0	0,00177	0,00145	1,22350	1,22173
80^0	0,00351	0,00251	1,39977	1,39626
90^0	0,00639	0,00407	1,57719	1,57080
100^0	0,01093	0,00626	1,75626	1,74533
110^0	0,01765	0,00919	1,93751	1,91986
120^0	0,02692	0,01285	2,12132	2,09440
130^0	0,03858	0,01700	2 30751	2,26893
140^0	0,05072	0,02076	2,49418	2,44346
150^0	0,05741	0,02192	2,67540	2,61799
160^0	0,04506	0,01614	2,83759	2,79253
170^0	— 0,01132	— 0,00381	2,95574	2,96706
180^0	— 0,14159	— 0,04507	3,00000	3,14159

Tabelle II.

χ	f	v	$\overline{an}$	$\widehat{as}$
10^0	0,00000	0,00000	0,17453	0,17453
20^0	0,00002	0,00008	0,34904	0,34906
30^0	0,00023	0,00044	0,52337	0,52360
40^0	0,00097	0,00139	0,69716	0,69813
50^0	0,00308	0,00353	0,89659	0,87267
60^0	0,00797	0,00761	1,03923	1,04720
70^0	0,01803	0,01476	1,20370	1,22173
80^0	0,03706	0,02654	1,35920	1,39626
90^0	0,07080	0,04507	1,50000	1,57080

Berichtigung.

S. 315, Z. 4 v. o. l. Kâtib statt Kâhib.

S. 317, Z. 19 v. o. l. $\sphericalangle ACD$ statt $\sphericalangle ACB$.

S. 327, Z. 5 v. u. (Anm. 1) l. ac de statt aede.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

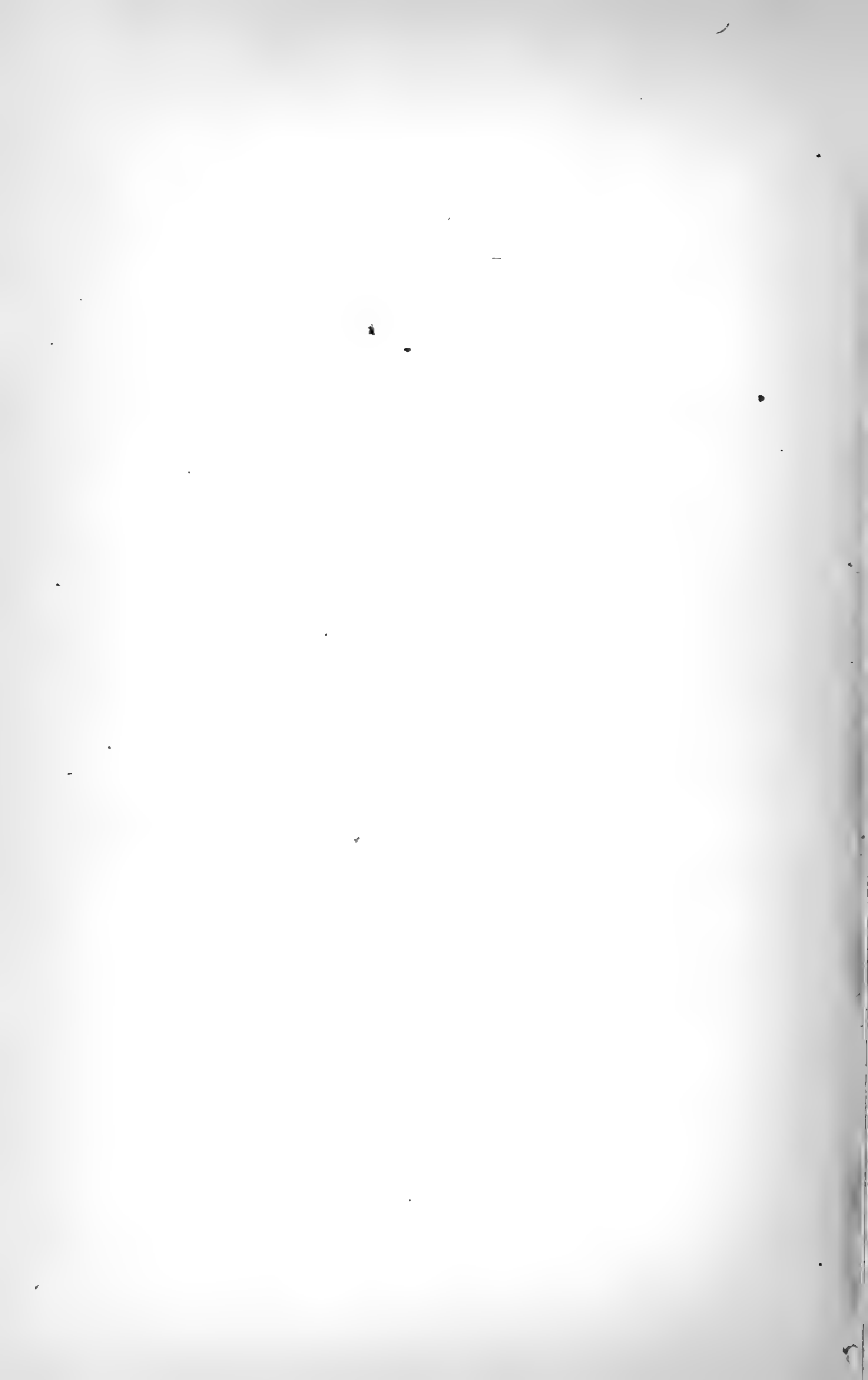
Bayerischen Akademie der Wissenschaften

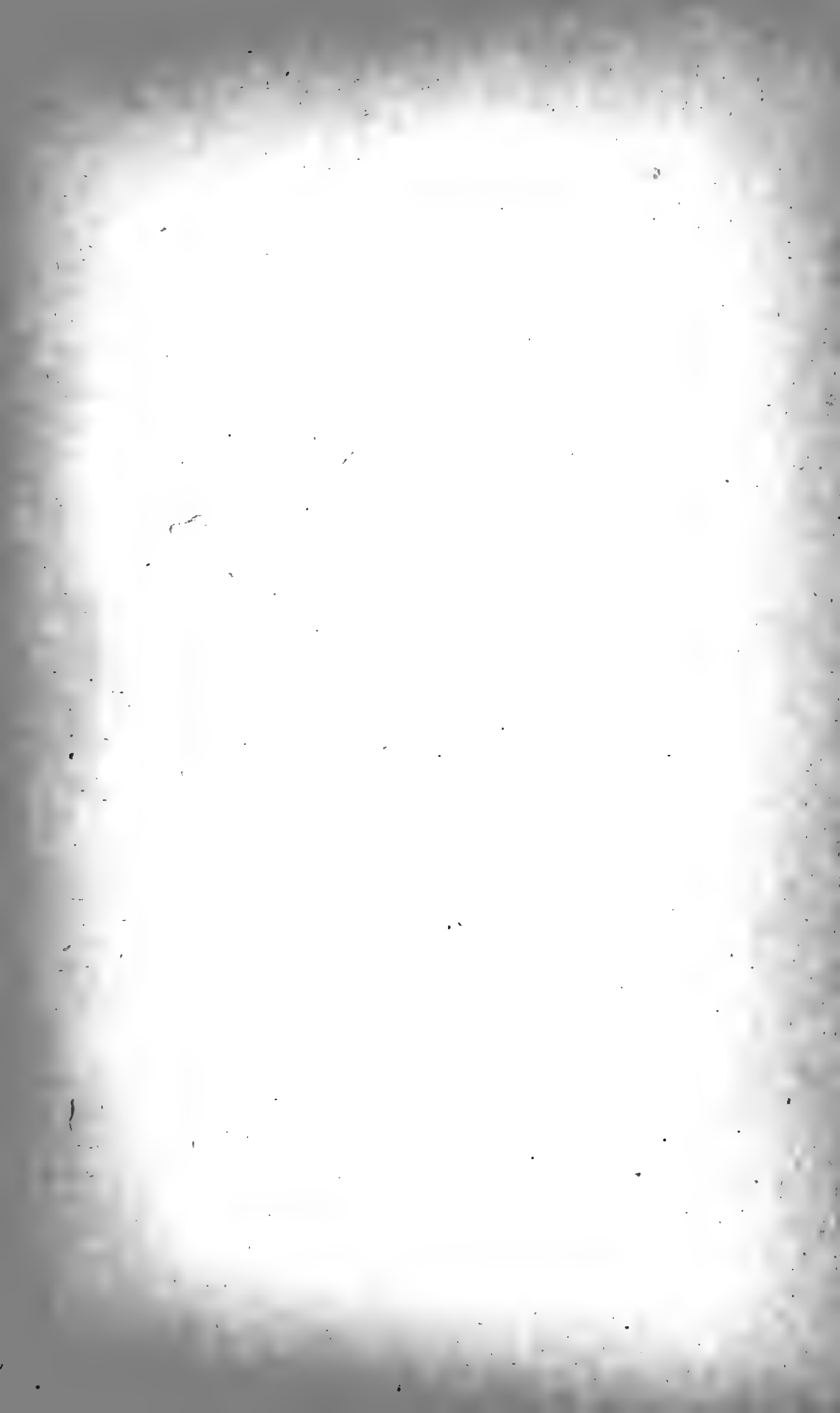
zu München

1919. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

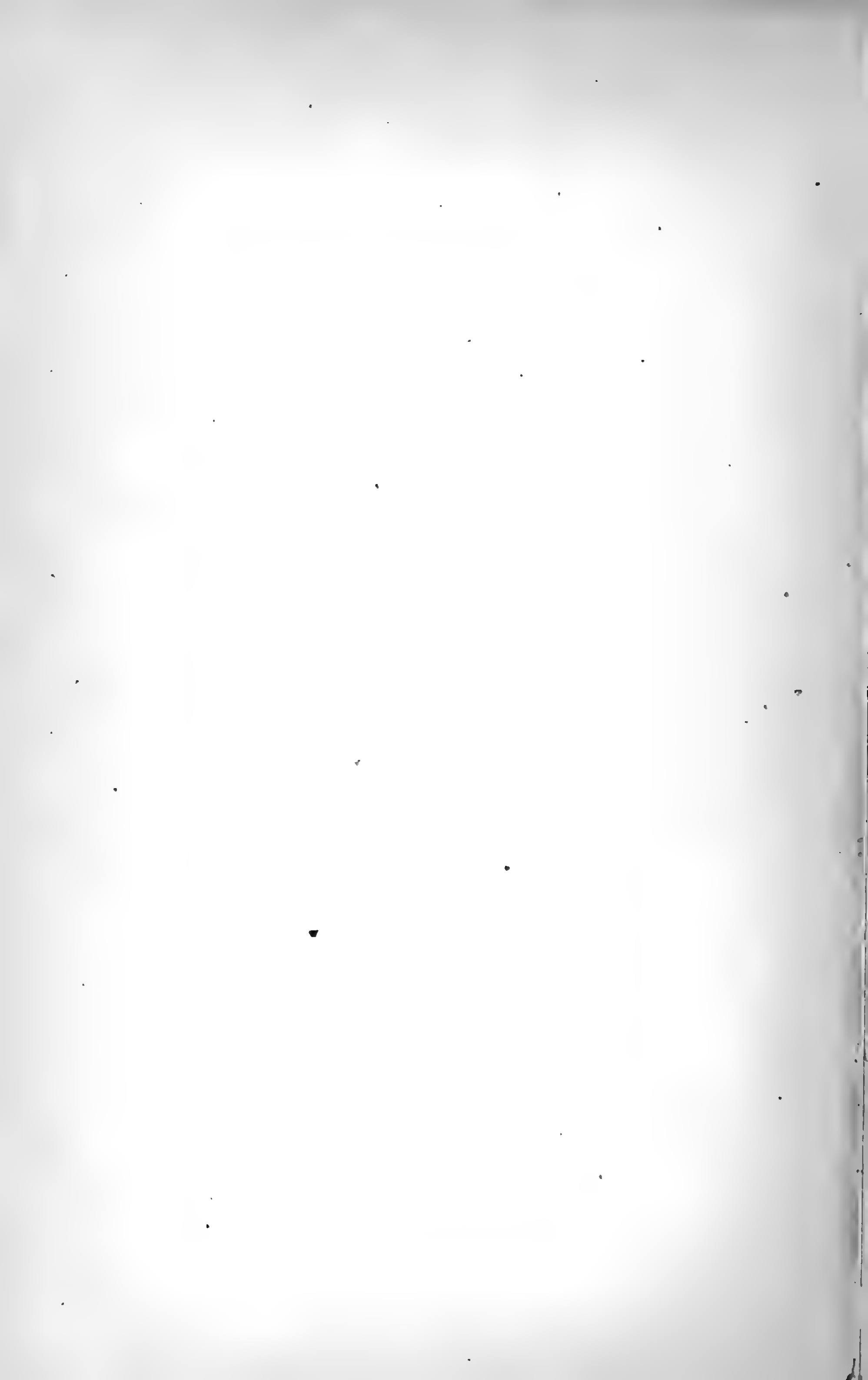
1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

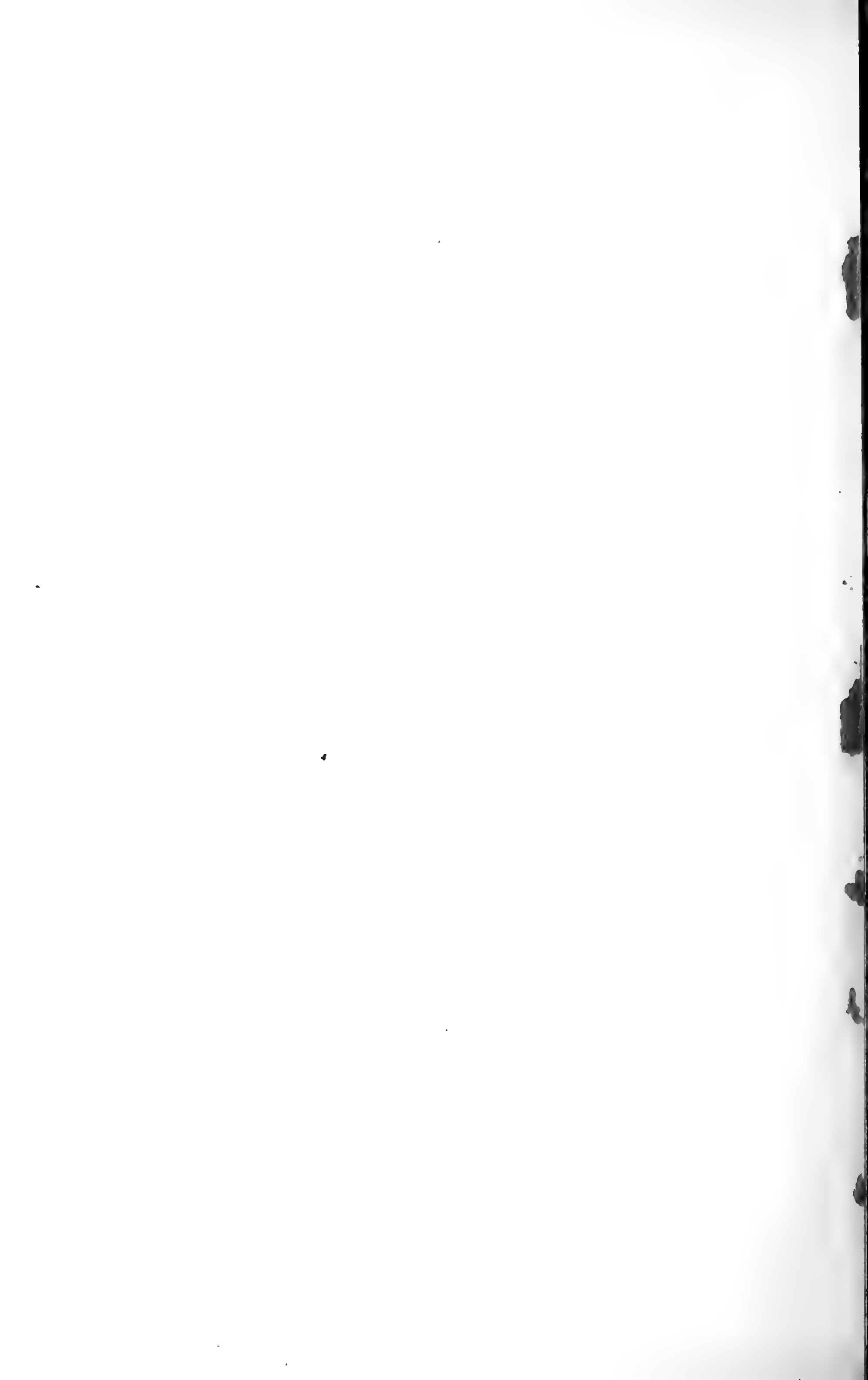




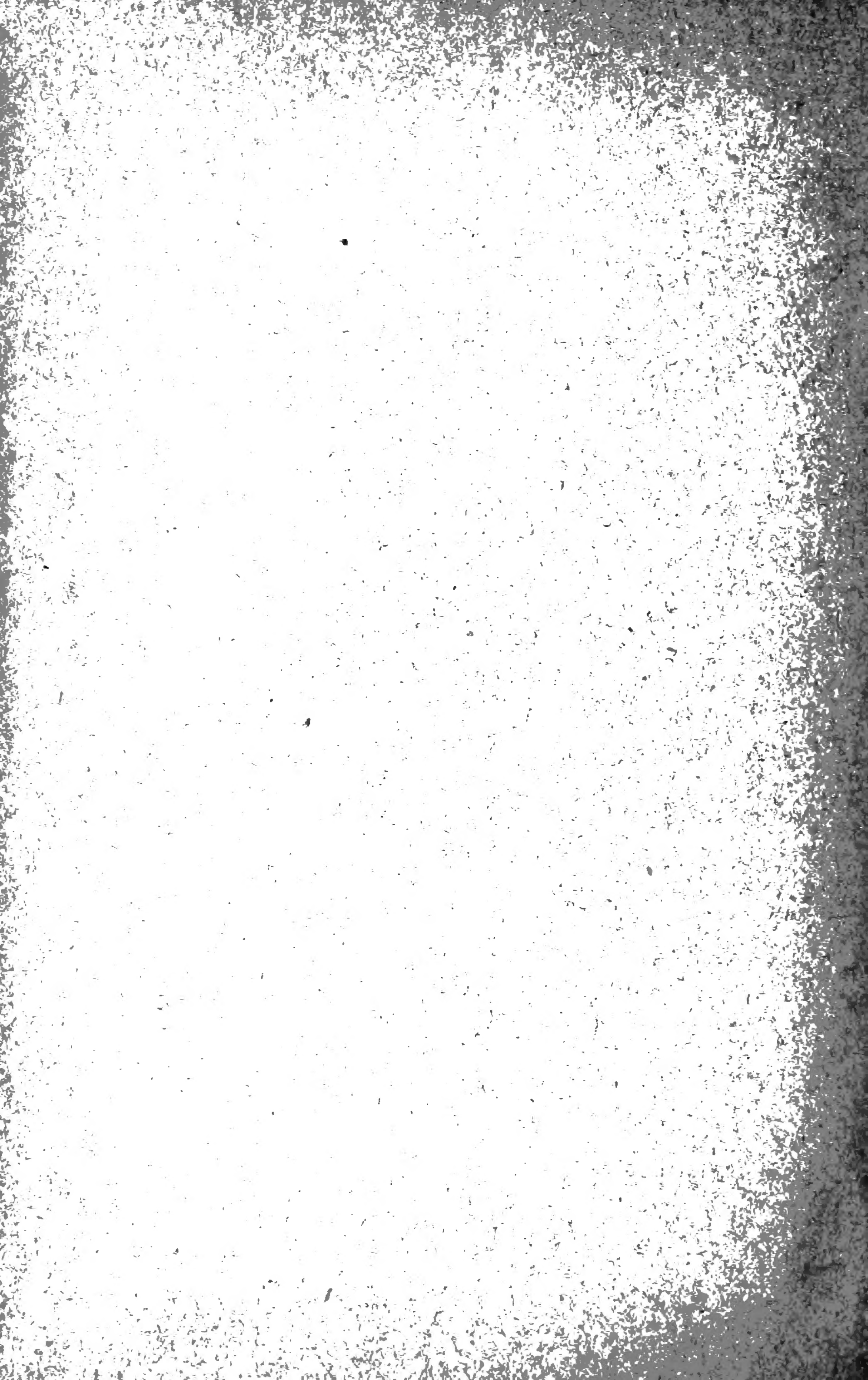
Inhalt.

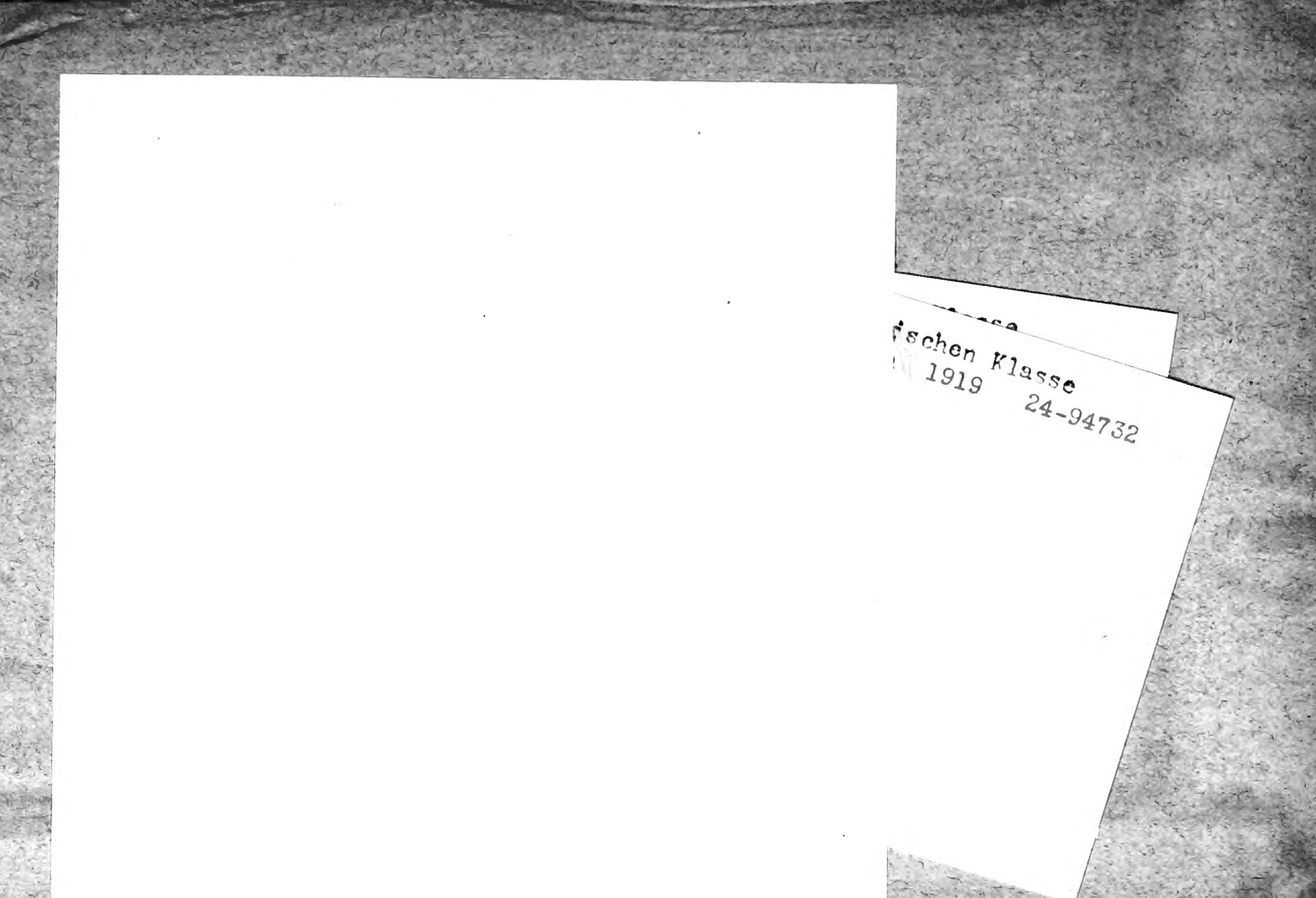
Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.










ischen Klasse
1919 24-94732